Ю.А. Еремин, А.Г. Свешников

ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ В ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ЭМИТТЕРА НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Введение.

В последнее время пристальный интерес у исследователей вызывает анализ процессов флюоресценции в присутствии плазмонных структур (ПС). Эти структуры, представляющие собой совокупность плазмонных частиц позволяют существенно повысить интенсивность оптического излучения флюоресцирующей молекулы [1-2]. В данном случае оказывается необходимым проводить анализ характеристик рассеяния и поглощения при возбуждении точечным эмиттером (флюоресцирующей молекулой), располагающимся поблизости от подобной структуры. При этом обычно проводится осреднение параметров по положению эмиттера или его поляризации, что требует проведения многократных вычислений интегральных характеристик излучения и поглощения.

Другой областью, в которой рассматривается возбуждение ПС локальным источником, является область конструирования оптических антенн [3-5]. При оптимизации эффективности оптической антенны приходится многократно решать задачу возбуждения кластера плазмонных частиц точечным эмиттером, меняя его расположение [4]. При этом, как квантовый выход флюоресценции, так эффективность оптической антенны вычисляются как отношение энергии излучения эмиттера в присутствии ПС к сумме излученной и поглощенной энергий. Последнее обстоятельство приводит к необходимости вычисления поглощенной энергии, интегрируя поля по поверхности ПС, что весьма затруднительно в режиме плазмонного резонанса, когда относительная интенсивность поля вблизи частиц возрастает в 10^8-10^{10} раз [6-7]. ПС, которые используются для усиления флюоресценции, как и оптические антенны, формируются, как правило, на прозрачной подложке [4, 8]. В этом случае вычисление энергии поглощения приводит к необходимости вычисления интегралов Зоммерфельда, в то время как энергия излучения эмиттера в присутствии ПС вычисляется без их использования [9]. Кроме того, использование численно-аналитических методов имеет одну особенность. Дело в том, что рассеянное поле на удалении от рассеивателя вычисляется с большей точностью, чем поле на поверхности [10]. Все это делает привлекательным использование энергетических соотношений, позволяющих исключить вычисление энергии, поглощенной заданной структурой.

В настоящей работе рассмотрена задача рассеяния поля электрического диполя (модель флюоресцирующей молекулы [1]) на локальном проницаемом теле, расположенном как в свободном пространстве R^3, так и в присутствии полупространства, с отличными от исходного пространства характеристиками. Показано, что имеет место соотношение, позволяющее вычислять квантовый выход флюоресцирующей молекулы или эффективности оптической антенны без вычисления сечения поглощения, что существенно снижает вычислительные затраты. Последнее особенно актуально при проведении осреднения квантового выхода флюоресценции по отношению к расположению диполя и его поляризации.

Электрический диполь в свободном пространстве.

Рассмотрим возбуждение локального проницаемого тела D_i с гладкой поверхностью ∂D_i электрическим диполем с моментом $\mathbf{e}$, расположенным во внешней точке $\mathrm{M}_0 \notin D_i$. Тогда математическая постановка задачи рассеяния может быть записана в следующем виде

$$
\begin{array}{lll}
rot\ \mathbf{H}_e = jk\mathbf{E}_e + \mathbf{J}; & rot\ \mathbf{E}_e = -jk\mathbf{H}_e & \text{в } D_e := \mathbb{R}^3 / \bar{D}_i, \\
rot\ \mathbf{H}_i = jk\varepsilon_i\mathbf{E}_i & rot\ \mathbf{E}_i = -jk\mu_i\mathbf{H}_i & \text{в } D_i \\
\left.\begin{array}{l} \mathbf{n}_p \times \ \mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_e(p) \ = 0, \\ \mathbf{n}_p \times \ \mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_e(p) \ = 0, \end{array}\right. & p \in \partial D_i, \quad , & \\
\lim\limits_{r\to\infty} r \cdot \left(\mathbf{H}_e \times \dfrac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{E}_e \right) = 0, \quad r = |M| \to \infty, & &
\end{array}
\qquad (1)
$$

Здесь $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $\mathbf{J} = \mathbf{e}\delta(M - M_0)$, $\mathbf{n}_p$ - единичная нормаль к поверхности ∂D_i. Полагаем, что поверхность частицы является гладкой $\partial D_i \subset C^{(2,\alpha)}$, а параметры среды, будучи постоянными в D_i, удовлетворяют условиям $\mathrm{Im}\,\varepsilon_i, \mu_i \le 0$. Что соответствует временной зависимости $\exp\{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}\}$, тогда граничная задача (1) имеет единственное решение [11].

Выберем сферу Σ_R, радиуса R, заключающую область D_i и точку M_0 внутри себя, внутреннюю область обозначим как D_R. Применим формулу Гаусса к решению граничной задачи (1) $\mathbf{E}_e$ и $\mathbf{H}_e^*$ в области D_R / D_i. Имеем

$$\int\limits_{D_R/D_i} div\left[\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*\right] d\tau = \int\limits_{D_R/D_i} \mathbf{H}_e^* \cdot rot\mathbf{E}_e - \mathbf{E}_e \cdot rot\mathbf{H}_e^* \; d\tau =$$

$$= \int\limits_{D_R/D_i} \left\{ ik\left(-\left|\mathbf{H}_e^*\right|^2 + \left|\mathbf{E}_e\right|^2 \right) - (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}^*) \right\} d\tau = \int\limits_{\Sigma_R \cup \partial D_i} \left[\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*\right] \cdot \mathbf{n} d\sigma \qquad (2)$$

здесь $\mathbf{n}$ - нормаль внешняя по отношению к области D_R / D_i. Беря реальную часть от обеих частей (2) и расписывая интеграл в правой части в виде суммы, получим

$$\mathrm{Re} \int\limits_{\partial D_i} \left[\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*\right] \cdot \mathbf{n} d\sigma + \mathrm{Re} \int\limits_{\Sigma_R} \left[\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*\right] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} d\sigma = -\mathrm{Re} \int\limits_{D_R/D_i} (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}^*) d\tau \quad (3)$$

Аналогично предыдущему, применяя формулу Гаусса в D_i и беря реальную часть от обеих частей, имеем

$$\mathrm{Re} \int\limits_{\partial D_i} \left[\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*\right] \cdot \mathbf{n} d\sigma = k \int\limits_{D_i} \left|\mathrm{Im}\,\mu_i\right| \left|\mathbf{H}_i\right|^2 + \left|\mathrm{Im}\,\varepsilon_i\right| \left|\mathbf{E}_i\right|^2 \; d\tau \qquad (4)$$

Отметим, что в правой части (4) стоит энергия поглощения, которую мы обозначим W_{abs}. Преобразуем интеграл по сфере Σ_R, используя условия излучения, получаем

$$\mathrm{Re} \int\limits_{\Sigma_R} \left[\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*\right] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} d\sigma = \mathrm{Re} \int\limits_{\Sigma_R} \mathbf{E}_e \cdot \left[\mathbf{H}_e^* \times \frac{\mathbf{r}}{r}\right] d\sigma = \mathrm{Re} \int\limits_{\Sigma_R} \left|\mathbf{E}_e\right|^2 d\sigma$$

Введем в рассмотрение диаграмму направленности $\mathbf{F}(\theta,\varphi)$ полного поля, удовлетворяющего условиям излучения [11]

$$\mathbf{E}_e(M) = \frac{e^{-jkr}}{r} \mathbf{F}(\theta,\varphi) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \to \infty,$$

определенную на единичной сфере Ω. Тогда в силу произвольности R получим

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Re} \int\limits_{\Sigma_R} \left[\mathbf{E}_e \times \mathbf{H}_e^*\right] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} d\sigma = \int\limits_{\Omega} \left|\mathbf{F}\right|^2 d\omega \qquad (5)$$

В правой части (5) стоит энергия излучения диполя в присутствии рассеивателя D_i - W_{sc}. Таким образом, учитывая соотношения (3)-(5), будем иметь

$$W_{abs} + W_{sc} = -\mathrm{Re} \int\limits_{D_e/D_i} (\mathbf{E}_e \cdot \mathbf{J}^*) d\tau \qquad (6)$$

Осталось преобразовать последний интеграл, стоящий в правой части (6). Разобьем полное поле на рассеянное и поле электрического диполя $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_d$, тогда правая часть (6) примет вид

$$-\mathrm{Re}\int\limits_{D_e/D_i}(\mathbf{E}_e\cdot\mathbf{J}^*)d\tau=-\mathrm{Re}\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_s(M_0)\ -\mathrm{Re}\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_d(M)\ \Big|_{M=M_0} \qquad (7)$$

В соответствии с (1) электрическое поле электрического диполя в D_e может быть записано как [11]

$$\mathbf{E}_d(M)=-\frac{j}{k}rotrot\ \Psi(M,M_0)\mathbf{e}\ ,$$

где $\Psi(M,M_0)=\dfrac{e^{-jkR_{MM_0}}}{4\pi R_{MM_0}}$ - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца для свободного пространства. Для удобства дальнейшего преобразуем

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{j}{k}\Psi\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jkR_{MM_0}}}{kR_{MM_0}}\right)=-\frac{1}{4\pi}\frac{\sin\ kR_{MM_0}}{kR_{MM_0}}=-\frac{1}{4\pi}j_0(kR_{MM_0})$$

здесь $j_0(kR_{MM_0})$ - сферическая функция Бесселя. Тогда, имеет место

$$\mathbf{e}\cdot rotrot(j_0\cdot\mathbf{e})=-|\mathbf{e}|^2\Delta j_0+\mathbf{e}\cdot\nabla div(j_0\cdot\mathbf{e})=|\mathbf{e}|^2\left(k^2j_0+\frac{\partial^2}{\partial e^2}j_0\right)$$

Учитывая предыдущее, получим

$$-\mathrm{Re}\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_d(M)\ \Big|_{M=M_0}=\frac{|\mathbf{e}|^2}{4\pi}\left(k^2j_0+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}j_0\right)\Bigg|_{M=M_0}=\frac{|\mathbf{e}|^2}{4\pi}\left(k^2-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^2}{6\pi}|\mathbf{e}|^2$$

Окончательно энергетическое соотношение для локального источника окончательно принимает вид

$$W_{tot}:=W_{abs}+W_{sc}=-\mathrm{Re}\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_s(M_0)\ +\frac{k^2}{6\pi}|\mathbf{e}|^2 \qquad (8)$$

Легко видеть, первое слагаемое в правой части (8) описывает взаимодействие рассеянного поля с диполем, а последнее слагаемое представляет собой энергию излучения диполя, расположенного в свободном пространстве, в отсутствии рассеивателя.

Таким образом, эффективность оптической антенны может быть записана, как $\eta=W_{sc}/W_{tot}$ [4] и может быть легко вычислена, используя соотношение (8). Это особенно актуально при рассмотрении плазмонных структур, состоящих из близко расположенных частиц, реализующих усиление интенсивности поля на несколько порядков [6-7].

Электрический диполь при наличии полупространства.

Напомним, что оптические антенны, как правило, формируются на прозрачной подложке [4]. Рассмотрим случай, когда все пространство $\mathbb{R}^3$

состоит из двух полупространств D_0 $z>0$ и D_1 $z<0$ с плоскостью раздела Ξ $z=0$. Пусть тело D_i располагается в верхнем полупространстве и возбуждается электрическим диполем с моментом $\mathbf{e}$, расположенным в точке $\mathrm{M}_0 \in D_0$. Тогда математическая постановка задачи рассеяния может быть записана в следующем виде

$$\begin{aligned}
&rot\,\mathbf{H}_0 = jk_0\mathbf{E}_0 + \mathbf{J}; \qquad rot\,\mathbf{E}_0 = -jk_0\mathbf{H}_0 \qquad \text{в } D_0,\\
&rot\,\mathbf{H}_{1,i} = jk_0\varepsilon_{1,i}\mathbf{E}_{1,i} \qquad rot\,\mathbf{E}_{1,i} = -jk_0\mu_{1,i}\mathbf{H}_{1,i} \qquad \text{в } D_{1,i}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{n}_p \times \left[\mathbf{E}_i(p) - \mathbf{E}_0(p)\right] = 0,\\
\mathbf{n}_p \times \left[\mathbf{H}_i(p) - \mathbf{H}_0(p)\right] = 0,
\end{aligned}\right. \; p \in \partial D_i, \quad
\begin{aligned}
\mathbf{i}_z \times \left[\mathbf{E}_1(Q) - \mathbf{E}_0(Q)\right] = 0,\\
\mathbf{i}_z \times \left[\mathbf{H}_1(Q) - \mathbf{H}_0(Q)\right] = 0,
\end{aligned} \quad \mathrm{Q} \in \Xi \qquad (9)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma_R} \left| \sqrt{\mu_l}\mathbf{H}_l \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \sqrt{\varepsilon_l}\mathbf{E}_l \right|^2 d\sigma = 0, \;\; r = |M|, \; l = 0,1.$$

Здесь $\mathbf{J} = \mathbf{e}\delta(M - M_0)$, $\mathbf{n}_p$ - единичная нормаль к поверхности ∂D_i $\mathbf{i}_z$ - единичный вектор декартовой системы координат, параллельный оси 0z. Отметим, что последние соотношения представляют собой так называемые условия излучения Сильвера-Мюллера в слабой форме. Полагаем, что $\partial D_i \subset C^{(2,\alpha)}$, а параметры среды, будучи постоянными в каждой из областей, удовлетворяют условиям $\operatorname{Im}\varepsilon_i, \mu_i \le 0$, а $\operatorname{Im}\varepsilon_1, \mu_1 = 0,\ \mu_1 = 1$. Тогда граничная задача (9) имеет единственное решение [12].

Выберем, как и раньше, сферу Σ_R с центром на плоскости Ξ, радиуса R, заключающую область D_i и точку M_0 внутри себя, внутреннюю область обозначим, как D_R. Плоскость Ξ разрезает D_R на два полушара $D_R^{\pm}$, располагающиеся в $D_{0,1}$ соответственно. Применим формулу Гаусса к решению граничной задачи (9) $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0^*$ в области D_R^+. Имеем

$$\begin{aligned}
\int_{D_R^+/D_i} div\left[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*\right] d\tau &= \int_{D_R^+/D_i} \left\{ ik_0\left(-\left|\mathbf{H}_0^*\right|^2 + \left|\mathbf{E}_0\right|^2 \right) - (\mathbf{E}_0\mathbf{J}^*) \right\} d\tau = \\
&= \int_{\Sigma_R \cup \partial D_i \cup \Xi_R} \left[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*\right] \cdot \mathbf{n}\, d\sigma
\end{aligned} \qquad (10)$$

здесь Ξ_R - круг на плоскости Ξ, отсекаемый сферой Σ_R. Выделяя реальные значения от обеих частей (10), с учетом энергетического соотношения внутри области D_i, получим

$$W_{abs} + \mathrm{Re}\int\limits_{\Sigma_R^+} \mathbf{E}_0 \cdot \left[\mathbf{H}_0^* \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\sigma \ + \mathrm{Re}\int\limits_{\Xi_R} \left[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* \right] \cdot \mathbf{e}_z d\sigma = -\mathrm{Re}\int\limits_{D_R^+/D_i} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{J}^*) d\tau$$

Здесь Σ_R^+ - верхняя полусфера. Проводя аналогичное рассмотрение в области D_R^- нижнего полупространства, имеем

$$\mathrm{Re}\int\limits_{\Sigma_R^-} \mathbf{E}_1 \cdot \left[\mathbf{H}_1^* \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\sigma \ - \mathrm{Re}\int\limits_{\Xi_R} \left[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1^* \right] \cdot \mathbf{e}_z d\sigma = 0$$

Здесь Σ_R^- - нижняя полусфера. Складывая два последних соотношения, с учетом условий сопряжения для полей на Ξ, получаем

$$W_{abs} + \mathrm{Re}\int\limits_{\Sigma_R^+} \mathbf{E}_0 \cdot \left[\mathbf{H}_0^* \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\sigma + \mathrm{Re}\int\limits_{\Sigma_R^-} \mathbf{E}_1 \cdot \left[\mathbf{H}_1^* \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\sigma = -\mathrm{Re}\int\limits_{D_R^+/D_i} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{J}^*) d\tau \quad (11)$$

Вводя в рассмотрение диаграммы направленности полного поля в верхнем $z > 0$ - $\mathbf{F}_0(\theta,\varphi)$ и нижнем $z < 0$ - $\mathbf{F}_1(\theta,\varphi)$ полупространствах

$$\mathbf{E}_{0,1}(M) = \frac{e^{-jkn_{0,1}r}}{r} \mathbf{F}_{0,1}(\theta,\varphi) + o(\frac{1}{r}), \ \ r \to \infty,$$

$$\mathbf{H}_{0,1}(M) = \frac{e^{-jkn_{0,1}r}}{r} \sqrt{\frac{\varepsilon_{0,1}}{\mu_{0,1}}} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{F}_{0,1}(\theta,\varphi) \right] + o(\frac{1}{r}), \ \ r \to \infty,$$

определенных на единичных полусферах $\Omega^{\pm}$, учитывая (11) и условия излучения в слабой форме

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{Re}\int\limits_{\Sigma_R^{\pm}} \mathbf{E}_l \cdot \left[\mathbf{H}_l^* \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_l \mu_l}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Sigma_R^{\pm}} \ \varepsilon_l \left|\mathbf{E}_l\right|^2 + \mu_l \left|\mathbf{H}_l\right|^2 \ d\sigma$$

а также, что $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, $n_0 = 1$, получим, переходя к пределу в (11) при $R \to \infty$

$$W_{abs} + \int\limits_{\Omega^+} \left|\mathbf{F}_0\right|^2 d\omega \ + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \int\limits_{\Omega^-} \left|\mathbf{F}_1\right|^2 d\omega = -\mathrm{Re}\int\limits_{D_0/D_i} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{J}^*) d\tau \qquad (12)$$

Отметим, что $W_{sc}^+ = \int\limits_{\Omega^+} \left|\mathbf{F}_0\right|^2 d\omega$ и $W_{sc}^- = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \int\limits_{\Omega^-} \left|\mathbf{F}_1\right|^2 d\omega$ представляют собой энергии излучения электрического диполя в присутствии рассеивателя D_i верхнем и нижнем полупространствах соответственно. Еще раз отметим, что $W_{sc}^{\pm}$ включают в себя, как энергию рассеянного поля, так и энергию излучения самого диполя.

Разобьем поле в верхнем полупространстве на рассеянное поле и поле диполя $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^s + \mathbf{E}_0^d$. Будем полагать, что они определены так, что каждое из них удовлетворяет условиям сопряжения на Ξ, тогда правая часть (12) может быть записана как

$$W_{tot} := W_{abs} + W_{sc}^{+} + W_{sc}^{-} = -\mathrm{Re}\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^s(M_0) - \mathrm{Re}\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^d(M)\Big|_{M=M_0}\right) \quad (13)$$

Для вычисления конкретного вида полной энергии W_{tot}, нам понадобится представление для поля электрического диполя в присутствии полупространства. Соответствующий векторный потенциал имеет вид [12]

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{D_0} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^e(M,P)\mathbf{J}(P)d\tau_P$$

где $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^e(M,M_0)$ - тензор Грина полупространства

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^e(M,M_0) = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ \partial g/\partial x_M & \partial g/\partial y_M & G_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

При этом соответствующие компоненты тензора Грина в $D_{0,1}$ могут быть записаны как

$$G_{ll}(M,M_0) = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\, v_{ll}(\lambda,z,z_0)\lambda d\lambda,\ l = 1,3;$$

$$g(M,M_0) = \int\limits_0^\infty J_0(\lambda r)\, v_{31}(\lambda,z,z_0)\lambda d\lambda$$

здесь $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, $J_0(.)$ – цилиндрическая функция Бесселя, (x_0, y_0, z_0) - декартовы координаты источника, расположенного в точке M_0. В данном случае для спектральных функций v_{11}, v_{33}, v_{31}, обеспечивающих непрерывность тангенциальных компонент полей, справедливы следующие представления:

$$v_{ll}(\lambda,z,z_0) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\eta_0|z-z_0|)}{\eta_0} + A_{ll}(\lambda,z_0)\dfrac{\exp(-\eta_0 z)}{\eta_0},\ z_0 > 0,\ z \ge 0, \\ B_{ll}(\lambda,z_0)\dfrac{\exp(\eta_1 z)}{\eta_0},\ \ z_0 > 0,\ \ z \le 0,\ \ l = 1,3; \end{cases}$$

$$v_{31}(\lambda,z,z_0)=\begin{cases}A_{31}(\lambda,z_0)\exp\left(-\eta_0 z\right), z_0>0,\ z\geq 0,\\ B_{31}(\lambda,z_0)\exp\left(\eta_1 z\right),\ z_0>0,\ z\leq 0\end{cases}$$

где $\eta_{0,1}^2=\lambda^2-k_{0,1}^2$. Спектральные коэффициенты A,B определяются из условий для скачков полей при z=0 [12]. Откуда легко получить, что

$$A_{11}(\lambda,z_0)=\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\cdot\exp\left(-\eta_0 z_0\right);\qquad B_{11}(\lambda,z_0)=\frac{2\eta_0}{\eta_0+\eta_1}\cdot\exp\left(-\eta_0 z_0\right);$$

$$A_{33}(\lambda,z_0)=\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\cdot\exp\left(-\eta_0 z_0\right);\qquad B_{33}(\lambda,z_0)=\frac{2\varepsilon_1\eta_0}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\cdot\exp\left(-\eta_0 z_0\right);$$

$$A_{31}(\lambda,z_0)=\frac{2(\varepsilon_1-1)\cdot\exp\left(-\eta_0 z_0\right)}{\left(\eta_0+\eta_1\right)\left(\varepsilon_1\eta_0+\eta_1\right)};\qquad B_{31}(\lambda,z_0)=\frac{2(\varepsilon_1-1)\cdot\exp\left(-\eta_0 z_0\right)}{\left(\eta_0+\eta_1\right)\left(\varepsilon_1\eta_0+\eta_1\right)}.$$

Отметим, что первое слагаемое в первой строке v_{ll} соответствует фундаментальному решению $4\pi\cdot\Psi(M,M_0)$. Таким образом, поле электрического диполя, удовлетворяющее условиям сопряжения для полей на границе раздела полупространств, принимает вид

$$\mathbf{E}_0^d(M)=-\frac{j}{4\pi k_0}rot\ rot\int\limits_{D_0}\vec{\mathbf{G}}^e(M,P)\cdot\mathbf{J}(P)d\tau_P \tag{15}$$

Рассмотрим компоненты вектора поляризации исходного диполя в декартовой системе координат. Начнем с вертикального диполя, то есть компоненты e_z. Тогда получаем

$$\mathbf{E}_0^{d(z)}(M)=-\frac{j}{k_0}rot\ rot\left(\Psi(M,M_0)\mathbf{e}_z\right)-\frac{j}{4\pi k_0}rot\ rot\left(\bar{G}_{33}(M,M_0)\mathbf{e}_z\right)$$

соответственно первое слагаемое представляет поле диполя в свободном пространстве и следовательно его вклад в правую часть (13) будет аналогичен предшествующему рассмотрению. Рассмотрим подробнее второе слагаемое, в котором $\bar{G}_{33}$ - соответствующий элемент тензора Грина без сингулярности. Поскольку компоненты тензора (14) удовлетворяют уравнению Гельмгольца в D_0, то аналогично предшествующему рассмотрению, имеем

$$\mathbf{e}_z\cdot rot\ rot\left(\bar{G}_{33}(M,M_0)\mathbf{e}_z\right)\Big|_{M=M_0}=\left|\mathbf{e}_z\right|^2\left\{k_0^2\bar{G}_{33}(M_0,M_0)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{G}_{33}(M,M_0)\Big|_{M=M_0}\right\}$$

$$=\left|\mathbf{e}_z\right|^2\int\limits_0^\infty\left(k_0^2+\eta_0^2\right)\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda d\lambda=\left|\mathbf{e}_z\right|^2\int\limits_0^\infty\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda^3 d\lambda$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\int_{D_0}(\mathbf{E}_0^{d(z)}\cdot\mathbf{J}^*)d\tau=\frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^\infty\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp(-2\eta_0 z_0)}{\eta_0}\lambda^3 d\lambda$$

$$=\frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^{k_1}\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp(-2\eta_0 z_0)}{\eta_0}\lambda^3 d\lambda \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь случай горизонтального диполя, компоненты e_x. Как и в предыдущем случае достаточно рассмотреть лишь соответствующий элемент тензора без сингулярности. То есть $\bar{G}_{11}(M,M_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(M,M_0)$, имеем

$$\mathbf{e}_x\cdot rot\ rot\left\{\left[\bar{G}_{11}(M,M_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(M,M_0)\right]\mathbf{e}_x\right\}\Bigg|_{M=M_0}=$$

$$=|\mathbf{e}_x|^2\left\{k_0^2\left[\bar{G}_{11}(M_0,M_0)+\frac{\partial}{\partial x}g(M,M_0)\Big|_{M=M_0}\right]\right\}+$$

$$+|\mathbf{e}_x|^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{G}_{11}(M_0,M_0)\Big|_{M=M_0}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}g(M,M_0)\Big|_{M=M_0}\right\}$$

Сразу отметим то обстоятельство, что наличие любых производных нечетного порядка по x или y от интеграла, содержащего $J_0(\lambda r)$, приводит к обнулению результата при $M=M_0$ $(r=0)$. В этом легко убедиться выписав ряд для функции Бесселя $J_0(x)$, содержащий лишь четные степени аргумента [13]. Учитывая данное обстоятельство, получим

$$\left\{k_0^2\bar{G}_{11}(M_0,M_0)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{G}_{11}(M,M_0)\Big|_{M=M_0}\right\}=k_0^2\int_0^\infty\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp(-2\eta_0 z_0)}{\eta_0}\lambda d\lambda+$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\frac{\exp(-\eta_0(z+z_0))}{\eta_0}\lambda d\lambda\Bigg|_{M=M_0}=$$

$$=\int_0^\infty\left(k_0^2-\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp(-2\eta_0 z_0)}{\eta_0}\lambda d\lambda$$

или

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int_{D_0}(\mathbf{E}_0^{d(x)}\cdot\mathbf{J}^*)d\tau &= \frac{|\mathbf{e}_x|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^\infty\left(k_0^2-\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda d\lambda = \\
&= \frac{|\mathbf{e}_x|^2}{8\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^{k_1}\left(2k_0^2-\lambda^2\right)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda d\lambda
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Отметим, что аналогичное соотношение можно получить и для случая горизонтального диполя, компоненты e_y. Собирая слагаемые в (16)-(17), имеем

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re}\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^d(M)\Big|_{M=M_0}\right) &= \frac{k_0^2}{6\pi}|\mathbf{e}|^2-\frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^{k_1}\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda^3 d\lambda - \\
&-\frac{|\mathbf{e}_x|^2+|\mathbf{e}_y|^2}{8\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^{k_1}\left(2k_0^2-\lambda^2\right)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda d\lambda
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Итак, энергетическое соотношение для электрического диполя в присутствии полупространства, принимает следующий окончательный вид

$$
\begin{aligned}
W_{tot} = W_{abs}+W_{sc}^{+}+W_{sc}^{-} &= -\frac{|\mathbf{e}_z|^2}{4\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^{k_1}\frac{\varepsilon_1\eta_0-\eta_1}{\varepsilon_1\eta_0+\eta_1}\cdot\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda^3 d\lambda+\frac{k_0^2}{6\pi}|\mathbf{e}|^2 \\
-\operatorname{Re}\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{E}_0^s(M_0)\right) &-\frac{|\mathbf{e}_x|^2+|\mathbf{e}_y|^2}{8\pi k_0}\operatorname{Im}\int_0^{k_1}\left(2k_0^2-\lambda^2\right)\frac{\eta_0-\eta_1}{\eta_0+\eta_1}\frac{\exp\left(-2\eta_0 z_0\right)}{\eta_0}\lambda d\lambda
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Заметим, что при $k_1 = k_0$ формула (19) автоматически переходит в соотношение для свободного пространства (8).

Следует отметить, что в случае полупространства вычисление поглощенной энергии W_{abs} должно производиться с учетом представления для рассеянного поля через интегралы Зоммерфельда, входящие в компоненты тензора Грина (14). Что достаточно трудоемко осуществлять, в отличие от вычисления сечений рассеяния, которые не содержат интегралов и могут быть вычислены к интегралы от комбинаций элементарных функций [14].

Заключение.

На основе энергетических соотношений показано, что такие важные характеристики рассеяния как квантовый выход флюоресценции или эффективность оптической антенны возможно рассчитывать не используя энергию поглощения, которая вычисляется путем интегрирования либо по поверхности либо по объему локального рассеивателя. Это обстоятельство существенно снижает вычислительные затраты, особенно в случае необходимости проведения осреднения требуемых величин по отношению к расположению источника и его поляризации.

Список литературы.

1. Liaw J.-W., Chen C.-S., Kuo M.-K.//J. Quantitat. Spectr. Radiat. Transfer. 2014. Vol.146. P.321.
2. Liaw J.-W., Tsai H.-Y., Huang C.-H.//Plasmonics. 2012. Vol.7. P.543.
3. Bharadwaj P., Deutsch B., Novotny L. // Advanced in Optics and Photonics. 2009. Vol.1. P. 438.
4. Novotny L. Van de Hulst N.//Nature Photon. 2011. Vol.5. N1. P.83.
5. Taminiau T.H., Stefani F.D., van Hulst N.F. // Optics Express. 2008. Vol.16. P.10858.
6. Liaw J.-W., Chen C.-S., Chen J.-H. // J. Quantitat. Spectr. Radiat. Transfer. 2010. Vol.111. N8. P.454.
7. Гришина Н.В., Еремин Ю.А., Свешников А.Г. // Опт. спектр. 2012. Т.113. № 4. С.484.
8. Hofmann H.F., Kosako T., Kadoya Y. // Nature Photonics. 2010. Vol.4. P.312.
9. Гришина Н. В., Еремин Ю. А., Свешников А. Г. //Опт. спектр. 2013, Т.115. № 1. С.133.
10. Фарафонов В.Г., Ильин В.Б., Винокуров А.А. // Опт. спектр. 2010. Т.9. № 4. С.476.
11. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
12. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973.
14. Гришина Н. В., Еремин Ю. А., Свешников А. Г. // Опт. спектр. 2014. Т.117. №5. С.992.