Д.С. Филиппычев

О РЕШЕНИИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ*

1. Введение

В работе [1] для получения асимптотического решения сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения плазма-слой с ядром Эммерта [2] использовался метод пограничных функций [3-5]. Это уравнение описывает распределение потенциала, как в слое, так и в основном объеме плазмы. В методе пограничных функций [3-5] решение представляется в виде регулярного и пограничного рядов по степеням малого параметра μ:

$$u(\xi,\mu)=Ru(\xi,\mu)+\Pi u(\zeta,\mu),$$
$$Ru(\xi,\mu)=R_0u(\xi)+\mu R_1u(\xi)+\ldots+\mu^n R_nu(\xi)+\ldots,$$
$$\Pi u(\zeta,\mu)=\Pi_0u(\zeta)+\mu\Pi_1u(\zeta)+\ldots+\mu^n\Pi_nu(\zeta)+\ldots$$

Коэффициенты рядов $Ru(\xi,\mu)$, $\Pi u(\zeta,\mu)$ определяются в результате формальной подстановки разложения в рассматриваемое уравнение. Затем, члены одного порядка по μ в правой и левой частях уравнения приравниваются. Такая процедура производится раздельно, как для членов, зависящих от ξ, так и для членов, зависящих от $\zeta\equiv(1-\xi)/\mu$ – растянутой переменной.

В данной работе рассматривается только регулярный ряд $Ru(\xi,\mu)$. В результате применения метода пограничных функций к уравнению плазма-слой была получена система уравнений для определения неизвестных функций $R_k(\xi)$ [1]. Первые два коэффициента регулярного ряда выглядят следующим образом [1]:

$$0=R_0F(u,\xi)=f(u(\xi),\xi)\,,\qquad 0=R_1F(u,\xi).$$

Первое соотношение представляет собой вырожденное $(\mu=0)$ уравнение плазма-слой (уравнение *плазменного приближения*), в то время как второе является однородным сингулярным интегральным уравнением первого рода, описывающим поведение поправки первого порядка регулярного ряда. Из общих соображений, в работе [1] было сделано утверждение, это уравнение имеет только тривиальное решение. В данной

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Грант РФФИ 11-01-00216-а.

работе дается обоснование этого утверждения об отсутствии нетривиального решения.

2. Уравнение плазма-слой Эммерта [2]

Для тепловых ионов уравнение плазма-слой было получено в работе [2]. В безразмерных переменных (ξ – пространственная переменная; $u(\xi)$ – потенциал) оно выглядит следующим образом:

$$\mu^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} = -e^{-u} + be^{\chi u}\left\{J^1 - J^{\xi}(u)\right\} \equiv f(u,\xi) \ , \qquad (1)$$

$$J^1 = \int_0^1 h(\xi')K^1(u')d\xi', \ \ J^{\xi}(u,\xi) = \int_0^{\xi} h(\xi')K^{\xi}(u,u')d\xi',$$

$$K^1(u') = e^{-\chi u'}, \ \ K^{\xi}(u,u') = e^{-\chi u'} erf(\sqrt{\chi(u-u')}) .$$

Здесь были использованы обозначения: $h(\xi)$ – функция формы источника ионов, $u = u(\xi)$, $u' = u(\xi')$, $\mathrm{erf}(x)$ – функция ошибок (интеграл вероятностей). χ, Z, b, μ – параметры задачи, имеющие постоянные значения.

В работе [2] уравнение (1) дополнялось краевыми условиями: $u(0) = 0$ в начале координат и условием на стенке $u(1) = u_w$. В газоразрядной плазме выполняется неравенство $\mu << 1$, поэтому в уравнении (1) перед старшей производной стоит малый параметр μ^2 . Положив формально $\mu = 0$, получим *плазменное приближение* $(0 = f(u,\xi))$, которое справедливо только в области вне пристеночного слоя:

$$e^{-u} = be^{\chi u}\left\{J^1 - J^{\xi}(u)\right\}, \ \ u(0) = 0 . \qquad (2)$$

Поскольку частная производная $f(u,\xi)$ по ξ равна нулю, а именно

$$f_{\xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} = -be^{\chi u}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J^{\xi}(u)\right) = -bh(\xi)\mathrm{erf}(\sqrt{\chi(u-u')})\big|_{u'=u} = 0 ,$$

то дифференцирование по ξ сводится к дифференцированию по u $df/d\xi = f_u\, du/d\xi + f_{\xi} = f_u\, du/d\xi$. Используя (2), получаем:

$$f_u(u,\xi) = (1+\chi)e^{-u_0} - b\sqrt{\frac{\chi}{\pi}}\int_0^{\xi}\frac{h(\xi')d\xi'}{\sqrt{u(\xi)-u(\xi')}} = 0 . \qquad (3)$$

Замена переменной интегрирования $d\xi' \to \left(d\xi'/du'\right)du'$ приводит к интегральному уравнению

$$e^{-u(\xi)} = B\int_0^{u(\xi)} \frac{d\xi'}{du'} h(u')\frac{du'}{\sqrt{u-u'}} ,$$

решение которого было получено в неявном виде для произвольной функции источника $h(\xi)$ [2] и имеет вид:

$$\pi Bh(u)\sqrt{u}\frac{d\xi}{du} = 1 - 2\sqrt{u}D(\sqrt{u})\,. \tag{4}$$

Здесь $D(x) \equiv \exp(-x^2)\int\limits_0^x \exp(t^2)dt$ – функция Доусона, $B \equiv b\sqrt{\chi/\pi}\big/(1+\chi)$.

В данной работе используется функция $h(\xi)$, соответствующая одной из форм источника работы [2]

$$h(\xi) = \begin{cases} 2\,, & 0<\xi<1/2=\xi_S, \\ 0\,, & 1/2<\xi. \end{cases} \tag{5}$$

При этом решение плазменного приближения дается выражением

$$\begin{cases} \pi B\xi = D\left(\sqrt{u_0(\xi)}\right), & 0 \le \xi < 1/2, \\ \pi B = 2D\left(\sqrt{u_0(\xi)}\right), & \xi \ge 1/2. \end{cases} \tag{6}$$

После интегрирования по всей области с учетом нормировки работы [2] $\int\limits_0^1 h(\xi')d\xi' = 1$ получается соотношение $\pi B = 2D(\sqrt{u_1})$. Здесь величина u_1 соответствует значению решения уравнения (2) на входе в слой $\xi = 1$.

Физические параметры задачи, использованные в расчетах, также соответствовали параметрам работы [2]: $Z = 1,\ \chi = 1$. Значения $u_0(\xi)$ получаются в результате численного решения уравнения (6) методом деления отрезка пополам. При значениях $\xi \ge 1/2$ решением является $u_0(\xi) = const = u_0(1) = u_1 = 0.40445$.

Следует отметить соотношения, которые получаются при $\xi = 0$, соответственно, из (2) и (3):

$$J^1 = \int\limits_0^1 e^{-\chi u_0'} h(\xi')d\xi' = \frac{1}{b}, \quad \int\limits_0^{\xi=0} \frac{h(\xi')d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} = \frac{(1+\chi)}{b}\sqrt{\frac{\pi}{\chi}}\,.$$

Для выбранной формы источника (5) эти соотношения переходят в:

$$\int\limits_0^{\xi_S} \mathrm{e}^{-\chi u_0'}\, d\xi' = 1/2b = 0.4528\,, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^{\xi=0} \frac{h(\xi')d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} = \frac{(1+\chi)}{b}\sqrt{\frac{\pi}{\chi}} \equiv C_{RP} = 1.605\,.$$

3. Коэффициент первого приближения регулярного ряда $R_1 u(\xi)$.

Коэффициент при первой степени μ регулярной части разложения решения $Y(\xi) \equiv R_1 u(\xi)$ определяется из соотношения $R_1 F(u,\xi) = 0$. $R_1 F(u,\xi)$ представляет собой сумму двух слагаемых (подробнее, см. [1]). Первое слагаемое получается в результате дифференцирования функции $f\left(u(\xi;\mu),\xi\right)$ по μ $\left(d/d\mu = f_u\, du/d\mu\right)$, взятой на плазменном решении $u(\xi) = u_0(\xi)$ при $\mu = 0$. Поскольку $f_u(u_0,\xi) = 0$ (3), то это слагаемое обращается в нуль. Второе слагаемое получается в результате разложения в ряд ядер интегралов (при первой степени по μ) и рассмотрения членов относящихся к переменной интегрирования $u' = u(\xi')$. Таким образом, для функции $R_1 u(\xi)$ получается однородное сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\chi \mathrm{e}^{\chi u_0} C_{un} - \int_0^{\xi^*} K_x(x) Y(\xi') d\xi' = 0,\; C_{un} \equiv \chi \int_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'} \mathrm{Y}(\xi') d\xi',\; Y(\xi = 0) = 0. \quad (8)$$

Здесь $\xi^* = \begin{cases} \xi^* = \xi,\; 0 \le \xi \le 1/2 = \xi_S \\ \xi^* = 1/2,\; 1/2 < \xi \le 1 \end{cases}$, $K_x(x) = \left\{ \chi e^{\chi x} \left[\mathrm{erf}(\sqrt{\chi x}) \right] + \sqrt{\dfrac{\chi}{\pi x}} \right\}$,
$x \equiv u(\xi) - u(\xi')$.

Первый интеграл в левой части не зависит от ξ и, следовательно, равен постоянной величине. C_{un} является функционалом от искомого решения $Y(\xi)$, т.е. $C_{un} = C_{un}\left[Y\right]$. Целесообразно представить интеграл в левой части (8), как суперпозицию двух интегралов:

$$\int_0^{\xi^*} K_x(x) Y(\xi') d\xi' = \chi \mathrm{I}^{(1)}(\xi) + \sqrt{\chi/\pi}\, \mathrm{I}^{(2)}(\xi),$$

$$\mathrm{I}^{(1)}(\xi) = \int_0^{\xi^*} \mathrm{e}^{\chi(u_0(\xi) - u_0(\xi'))} \mathrm{erf}\left(\sqrt{\chi\left(u_0(\xi) - u_0(\xi')\right)} \right) Y(\xi') d\xi' ,$$

$$\mathrm{I}^{(2)}(\xi) = \int_0^{\xi^*} \frac{Y(\xi')}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} d\xi' .$$

В результате уравнение (8) приводится к следующему виду:

$$C_{un} = \mathrm{e}^{-\chi u_0} \left\{ \chi \mathrm{I}^{(1)}(\xi) + \sqrt{\chi/\pi}\, \mathrm{I}^{(2)}(\xi) \right\} \equiv \mathrm{Inv}(\xi). \quad (9)$$

Из приведенных выше выражений следует, что в области вне источника $\left(1/2 = \xi_S \le \xi \le L = 1\right)$ искомая поправка имеет постоянное значение $Y(\xi) = R_1 u(\xi) = const = Y(\xi_S)$, поскольку в этой области $u_0(\xi) = const = u_0(\xi = \xi_S = 1/2) = u_0(\xi = 1)$. Таким образом, уравнение (9) достаточно решить только в области источника $\left(0 \le \xi \le \xi_S = 1/2\right)$.

Рассматриваемое однородное сингулярное интегральное уравнение (8) (или (9)) всегда имеет тривиальное решение $Y(\xi) = 0$. Помимо этого оно может иметь бесконечно много нетривиальных решений.

4. Численное решение интегрального уравнения.

Аппроксимация интегралов. В интегральном уравнении (9) левую часть C_{un} можно рассматривать как неизвестную постоянную. Тогда это уравнение переписывается как уравнение Вольтерра первого рода:

$$C_{un} = \mathrm{e}^{-\chi u_0}\left\{\chi \mathrm{I}^{(1)}(\xi) + \sqrt{\chi/\pi}\,\mathrm{I}^{(2)}(\xi)\right\},\ Y(0) = 0.$$

Для нахождения значений $Y(\xi)$ в точках равномерной сетки с шагом h $\left(\xi_1 = 0;\ \xi = (j-1)h;\ j = 1,2,...,N+1 = N_S;\ \xi_{N_S} = \xi_S = 1/2\right)$ применялся метод простой итерации. Полученные на s-ой итерации значения $Y(\xi)$ использовались для вычисления интеграла C_{un}.

Аппроксимация всех интегралов (C_{un}, $\mathrm{I}^{(1)}(\xi)$, $\mathrm{I}^{(2)}(\xi)$ и т.д.) проводилась на каждом шаге сетки по квадратурной формуле Гаусса с использованием $n_{GK} = 2N_{GK} + 1$ узлов $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum\limits_{k=1}^{n_{GK}} f(x_k)w_k$, где x_k – координата k-ой точки интегрирования, w_k – соответствующий весовой коэффициент. Такая аппроксимация была выбрана с учетом того, что в сингулярном интеграле $\mathrm{I}^{(2)}(\xi)$ имеется особенность на верхнем пределе интегрирования. На верхнем пределе интеграла $\mathrm{I}^{(1)}(\xi)$ подынтегральное выражение обращается в нуль и аппроксимация по квадратурной формуле Гаусса на последнем шаге оказывается целесообразным для более точного вычисления интеграла. Приведение интеграла на шаге сетки к “стандартному” виду проводится с помощью линейного преобразования $\xi = Ax + P$, где $A = \left(\xi_j - \xi_{j-1}\right)/2 = h/2$, $P = \left(\xi_j + \xi_{j-1}\right)/2 = \xi_j - h/2$.

Для определения значений $Y(\xi)$ в точках интегрирования ξ_k используется линейная интерполяция. Таким образом, интегралы правой части уравнения (9) аппроксимируются по формулам $(m = 1,\ 2)$:

$$I_i^{(m)} = I^{(m)}(\xi_i) \equiv S_{m,i} + G_i^m Y_i, \tag{10}$$

$$S_{m,i} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{i-1}\left(\sum_{k=1}^{n_{GK}} K_m(\xi_i,\xi_k)\,w_k\left(\left[\left(\xi_k - \xi_{j-1}\right)Y_j + \left(\xi_j - \xi_k\right)Y_{j-1}\right]\Big/\left(\xi_j - \xi_{j-1}\right)\right)\right) +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_{GK}} K_m\left(\xi_i,\xi_k\right) w_k\left(\xi_i-\xi_k\right)\right] Y_{i-1},\ G_i^m=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_{GK}} K_m\left(\xi_i,\xi_k\right) w_k\left(\xi_k-\xi_{i-1}\right)\right] Y_i .$$

Как известно, дискретный аналог уравнения Вольтерра разрешим в том смысле, что значения неизвестных $Y_2, Y_3,..., Y_{N+1}$ находятся из последовательных вычислений. Собирая вместе все приведенные выше аппроксимации, получаем формулу для последовательного вычисления

$$Y_i=\frac{C_{un}\,\mathrm{e}^{\chi u_{0,i}}-\chi S_{1,i}-\sqrt{\chi/\pi}\ S_{2,i}}{\chi G_i^{(1)}+\sqrt{\chi/\pi}\ \mathrm{G}_\mathrm{i}^{(2)}}. \qquad (11)$$

Тестовые расчеты для квадратурных формул. Аппроксимации интегралов уравнения (9) по квадратурным формулам Гаусса (типа (10)) проверялись в ряде тестовых расчетов. Использовалось $n_{GK}=9$ $\left(N_{GK}=4\right)$ точек аппроксимации. Ряд полезных соотношений можно получить для интегралов с $Y(\xi)\equiv 1$. При этом используется выбранная форма источника $h(\xi)$ (5). Так из соотношения (7) получаем $2\int_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'}d\xi'-\frac{1}{b}=0$. При вычислениях ошибка составляла $\Delta=-1.1\times 10^{-5}$ при $1/b=0.9056$.

Из соотношения (3) получается выражение

$$\mathrm{I}^{(2)}\left[Y\left(\xi\right)\equiv 1\right]=\int_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}}=\frac{(1+\chi)}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{\chi}}e^{-u_0},$$

из которого следует равенство

$$\mathrm{I}^{(2)}\left[Y\left(\xi\right)\equiv 1\right]e^{u_0(\xi)}-C_{RP}=0,\quad C_{RP}\equiv\frac{(1+\chi)}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{\chi}}, \qquad (12)$$

а при $\xi=0$ получается предельное значение интеграла

$$\int_0^{\xi=0}\frac{d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}}=\frac{(1+\chi)}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{\chi}}=C_{RP}=1.605.$$

При вычислениях по формуле (12) максимальная ошибка (по всей области $0<\xi\le 0.5$) равнялась $\Delta_{\max}=0.345$ и достигалась в точке $\xi_2=h=0.005$. При увеличении ξ ошибка резко уменьшается до величины $\Delta=-0.00691$ $\left(\xi_2=0.03\right)$. После достижения значения $\xi_{14}=0.065$ $\left(\Delta=-0.01208\right)$ ошибка монотонно уменьшается вплоть до значения $\Delta=-0.0039$ на правой границе области расчета $\xi_s=\xi_{101}=0.5$.

В серии расчетов с заданным начальным профилем $Y(\xi)$ вычислялась левая часть уравнения (9), т.е. C_{un}. Полученное значение C_{un}

использовалось в формуле (11) для получения решения в узлах сетки $Y_i = Y(\xi_i)$. После этого вычислялись правые части уравнения (9).

Использовались начальные профили $Y(\xi)$ трех типов:

- "точное решение", т.е. разница между решением уравнения плазма-слой, полученным численным решением в работе [6,7], и плазменным решением (6): $C_{un} = -0.041333$, $\Delta_{\min} = -4.9\times10^{-18}$, $\Delta_{\max} = 5.4\times10^{-18}$;
- линейная зависимость $Y(\xi) = a\xi$; $a = -6$ отрицательные значения: $C_{un} = -0.641535$, $\Delta_{\min} = -9.1\times10^{-17}$, $\Delta_{\max} = 1.0\times10^{-16}$;
- квадратичная зависимость $Y(\xi) = a\xi^2 + b\xi$, $a = 2(8-b)$, $Y(\xi = 1/2) = 4$; $b = -7, -6, -4, ..., 6, 7$: $C_{un} = 0.281196 \div 0.817101$,

$\Delta_{\min} = -2.8\times10^{-17} \div -1.5\times10^{-16}$, $\Delta_{\max} = 2.7\times10^{-17} \div 1.1\times10^{-16}$.

Результаты расчетов представлены в таблице: ξ_{ext} – координата экстремума профиля; при $\xi_{ext} \le 0$ профиль положительный и возрастающий; $0 < \xi_{ext} \le \xi_S = 1/2$ профиль функции $Y_0(\xi)$ меняет знак – с отрицательных значений на положительные. В колонках *Error* показаны минимальное $\Delta_{\min}$ и максимальное $\Delta_{\max}$ значения разности между правой и левой частями уравнения (9).

Таблица

				Error	
a	b	ξ_{ext}	C_{un}	Min	max
"точное" решение			-0.0415333	-4.9×10^{-18}	5.39×10^{-18}
Linear $Y(\xi) = a\xi$					
-6			-0.641535	-9.1×10^{-17}	1.0×10^{-16}
6			0.641535	-1.0×10^{-16}	9.1×10^{-17}
Quadratic $Y(\xi) = a\xi^2 + b\xi$; $a = 2(8-b)$					
30	-7	0.12	0.281196	-2.8×10^{-17}	2.7×10^{-17}
28	-6	0.11	0.319475	-4.5×10^{-17}	4.4×10^{-17}
24	-4	0.08	0.396033	-5.0×10^{-17}	4.5×10^{-17}
28	-2	0.05	0.472591	-5.2×10^{-17}	5.3×10^{-17}
16	0	0.00	0.549149	-5.5×10^{-17}	5.6×10^{-17}
12	2	-0.08	0.625707	-9.4×10^{-17}	9.0×10^{-17}
8	4	-0.25	0.702264	-8.9×10^{-17}	1.0×10^{-16}
4	6	-0.75	0.778822	-1.0×10^{-16}	8.9×10^{-17}
2	7	-1.75	0.817101	-1.5×10^{-16}	1.1×10^{-16}

Приведенные результаты расчетов показали высокую точность как аппроксимации интегралов, так и вычисления $Y_i = Y(\xi_i)$ по формуле (11). Во всех рассмотренных случаях в итерационном процессе как $Y_i = Y(\xi_i)$, так и C_{un} стремились к нулевым значениям, т.е. наблюдался выход на тривиальное решение.

5. Отсутствие нетривиального решения интегрального уравнения.

Перепишем соотношение (9) в виде операторного уравнения;

$$\hat{A}\left[Y\left(\xi\right)\right] = 0,$$

$$\hat{A}[\cdot] = \chi\left\{e^{\chi u_0}\int_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'}[\cdot]d\xi' - \int_0^{\xi} \mathrm{e}^{\chi\left(u_0(\xi)-u_0(\xi')\right)}\mathrm{erf}\left(\sqrt{\chi\left(u_0(\xi)-u_0(\xi')\right)}\right)[\cdot]d\xi'\right\} -$$

$$-\sqrt{\frac{\chi}{\pi}}\int_0^{\xi}\frac{[\cdot]d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}}. \tag{13}$$

Здесь верхний предел интегрирования ξ^* заменен на ξ, поскольку рассматривается только область источника $\left(0 \le \xi \le \xi_S = 0.5\right)$. В случае $Y(\xi) \equiv C = const$ получаем $C\hat{A}[1] = 0$. Последнее соотношение может выполняться, во-первых, когда $C = 0$ (тривиальное решение) и, во-вторых, когда $\hat{A}[1] = 0$. В последнем случае в уравнение (13) входят функции только на плазменном решении $u_0\left(\xi\right)$.

Покажем, что $\hat{A}[1] \ne 0$. После замены фигурной скобки ее выражением, вытекающим из (2), левая часть уравнения (13) преобразуется к виду:

$$-\hat{A}[1] = \sqrt{\frac{\chi}{\pi}}\int_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}} - \frac{\chi}{2b}e^{-u_0(\xi)}.$$

Из соотношения (3) вытекает равенство

$$\int_0^{\xi}\frac{d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}} = \frac{\left(1+\chi\right)}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{\chi}}e^{-u_0(\xi)} = C_{RP}e^{-u_0(\xi)},$$

которое приводит к искомому неравенству:

$$-\hat{A}[1] = \frac{e^{-u_0(\xi)}}{2b}\left((\chi+1)-\chi\right) = \frac{e^{-u_0(\xi)}}{2b} \ne 0.$$

Соотношение (9) должно выполняться для любого ξ из диапазона $0 \le \xi \le \xi_S = 1/2$ и, следовательно, при $\xi = 0$ $C_{un} = \sqrt{\chi/\pi}\,\mathrm{I}^{(2)}\left(\xi = 0\right)$.

Сделаем в интеграле $\mathrm{I}^{(2)}(\xi)$ замену переменной интегрирования $\xi' \to u'$. После использования формулы (4) получим

$$\mathrm{I}^{(2)}(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{Y(\xi')d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} = \int_0^{u_0} \frac{Y(\xi')}{\sqrt{u_0 - u_0'}} \frac{d\xi'}{du_0'} du_0' =$$

$$= \frac{1}{2\pi B} \int_0^{u_0} \frac{Y(u_0')}{\sqrt{u_0 - u_0'}} \frac{\left(1 - 2\sqrt{u_0'} D(\sqrt{u_0'})\right)}{\sqrt{u_0'}} du_0' .$$

Рассмотрим малую окрестность начала координат $0 \le \xi \le \varepsilon$, в которой $Y(\xi)$ можно аппроксимировать с большой точностью линейной зависимостью $Y(\xi) = \alpha u_0$. Тогда получим

$$\mathrm{I}^{(2)}(\varepsilon) = \frac{\alpha}{2\pi B} \int_0^{u_0(\varepsilon)} \frac{u_0'}{\sqrt{u_0(\varepsilon) - u_0'}} \frac{\left(1 - 2\sqrt{u_0'} D(\sqrt{u_0'})\right)}{\sqrt{u_0'}} du_0' .$$

После замены переменной интегрирования $u_0' = t^2 u_0$ $\left(u_0' = u_0 2tdt\right)$ и простых преобразований получаем равенство

$$\mathrm{I}^{(2)}(\varepsilon) = \frac{\alpha u_0(\varepsilon)}{\pi B} \left\{ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} \left[1 - 2t\sqrt{u_0(\varepsilon)} D\left(t\sqrt{u_0(\varepsilon)}\right)\right] dt - 2\sqrt{u_0(\varepsilon)} \int_0^1 \frac{D(t\sqrt{u_0(\varepsilon)})}{\sqrt{1 - t^2}} tdt \right\}.$$

Первый интеграл правой части является табличным и равняется $\arcsin(t)\big|_0^1 = \pi/2$, $\arcsin(t)\big|_o^1 = \pi/2$, второй интеграл не имеет особенностей, а третий равняется $\frac{\pi}{4}\sqrt{u_0(\varepsilon)} - u_0(\varepsilon)\int_0^1 D(t\sqrt{u_0(\varepsilon)})\sqrt{1 - t^2}\, 2tdt$, т.е. также не имеет особенностей. При $\varepsilon \to 0$ $u_0(\varepsilon) \to 0$ и правая часть равенства обращается в нуль $\mathrm{I}^{(2)}(\varepsilon = 0) = 0$. Следовательно, $C_{un} = 0$ и $\int_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'} Y(\xi') d\xi' = 0$. Из последнего равенства вытекает $Y(\xi) = 0$. Таким образом, однородное линейное сингулярное интегральное уравнение (9) имеет только тривиальное решение.

Литература

1. Филиппычев Д.С. Метод пограничных функций для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой.// Прикладная математика и информатика № 19: Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2004, С. 21-40.

2. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma.//Phys.Fluids.1980. Vol. 23, № 4. P. 803-812.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: *Наука*, 1973. 272 с.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: *Изд-во Моск.Ун-та*, 1978. 106с.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: *Высшая Школа*, 1990. 208с.
6. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой с использованием сгущающейся сетки.// Прикладная математика и информатика № 14: Сб. /*Под ред*. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева-М: *МАКС Пресс*, 2003, С 35-54.
7. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой// Вестн. Моск.ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. 2004. № 4.С. 32-39.