Д.С.Филиппычев

УРАВНЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕГО ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ *

1. Введение

Одним из эффективных методов получения асимптотического решения сингулярно возмущенных уравнений является метод пограничных функций [1-3], в котором решение представляется в виде регулярного и пограничного рядов по степеням малого параметра μ:

$$u(\xi,\mu)=Ru(\xi,\mu)+\Pi u(\zeta,\mu),$$

$$Ru(\xi,\mu)=R_0u(\xi)+\mu R_1u(\xi)+\ldots+\mu^n R_n u(\xi)+\ldots,$$

$$\Pi u(\zeta,\mu)=\Pi_0u(\zeta)+\mu\Pi_1u(\zeta)+\ldots+\mu^n\Pi_n u(\zeta)+\ldots$$

После формальной подстановки разложения в рассматриваемое уравнение коэффициенты рядов $Ru(\xi,\mu)$ и $\Pi u(\zeta,\mu)$ определяются в результате приравнивания членов одного порядка по μ (раздельно для членов, зависящих от ξ и ζ; $\zeta\equiv(1-\xi)/\mu$ – растянутая переменная).

Интегро-дифференциальное уравнение плазма-слой с ядром Эммерта [4] описывает распределение потенциала, как в слое, так и в основном объеме плазмы. В работе [5] к этому уравнению применялся метод пограничных функций [1-3]. За вырожденное решение этого метода выбиралось одно из аналитических решений плазменного уравнения $(\mu=0)$ работы [4]. Были получены уравнения, описывающие поведение коэффициентов разложения до первого порядка по μ. Регулярный ряд нулевого порядка является плазменным приближением, а для коэффициента первого порядка $R_1u(\xi)$ получено однородное сингулярное интегральное уравнение первого рода. Численное решение дифференциального уравнения второго порядка для пограничной функции нулевого порядка $\Pi_0u(\zeta)$ и его асимптотика рассматривались в работах [5-8]. Полученные результаты сравнивались с результатами численного решения полного уравнения плазма-слой [9,10]. В работе [7] было строго доказано, что однородное интегральное уравнение относительно $R_1u(\xi)$ имеет только тривиальное решение.

В данной работе для описания поведения пограничной функции нулевого порядка $\Pi_0u(\zeta)$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение. В результате анализа интегрального члена правой части этого

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 02-01-00299.

уравнения оказывается, что в нулевом порядке по μ вклад от него в правую часть уравнения сводится к дополнительному алгебраическому члену. Таким образом, интегро-дифференциальное уравнение редуцируется снова к дифференциальному уравнению второго порядка, рассмотренному в работах [5-8]. Дополнительный член в правой части существенно изменяет свойства уравнения. В результате этого эффективный численный алгоритм [7,8] не может быть использован. Альтернативный численный алгоритм основывается на использовании трёхточечной разностной схемы.

2. Уравнение плазма-слой Эммерта [4].

Для тепловых ионов уравнение плазма-слой было получено в работе [4]. Использовались безразмерные переменные: ξ – пространственная переменная $0 \le \xi \le 1$; $u(\xi)$ – потенциал. В данной работе функция формы источника $h(\xi)$ выбиралась в виде (одна из форм $h(\xi)$ работы [4]): $h(\xi) = \{2\,, 0 < \xi < 1/2 = \xi_S; 0\,, 1/2 < \xi\}$ и рассматривается узкий слой вблизи правой границы области. Уравнение плазма-слой в области $\xi_S \le \xi \le 1$ записывается в виде:

$$\mu^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} = -\mathrm{e}^{-u} + b\int_0^{\xi_S} e^x\left[1 - \mathrm{erf}(x)\right]d\xi' \equiv f(u,\xi) \qquad (1)$$

Здесь $u = u(\xi), u' = u(\xi'), \mathrm{erf}(x)$ – функция ошибок, $x = u - u'$; χ, Z, b, μ – параметры задачи, имеющие постоянные значения $(\chi = Z = 1)$. В работе [4] уравнение (1) дополнялось краевыми условиями: $u(0) = 0$ и условием на стенке $u(1) = u_w$.

В газоразрядной плазме выполняется неравенство $\mu \ll 1$. Поэтому в уравнении (1) перед старшей производной стоит малый параметр μ^2. Положив формально $\mu = 0$, получим *плазменное приближение* ($0 = f(u,\xi)$), справедливое только в области вне пристеночного слоя. Для этого приближения имеется только одно краевое условие $u(0) = 0$. Процедура получения решения интегрального уравнения плазменного приближения подробно рассматривалась, как в оригинальной работе [4], так и в работах автора [5-10]. Решение для произвольной функции источника $h(\xi)$ было получено в неявном виде [4]: $\pi B h(u)\sqrt{u}\,\dfrac{d\xi}{du} = 1 - 2\sqrt{u}D(\sqrt{u})$. $D(x) \equiv \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)dt$ – функция Доусона, $\mathrm{B} \equiv \mathrm{b}\sqrt{\chi/\pi}\,/(1+\chi) = \mathrm{b}/2\sqrt{\pi}$. Для выбранной формы $h(\xi)$ это решение приобретает вид [4]: $\pi B\xi = D(\sqrt{u_0(\xi)})$, $0 \le \xi < 1/2$; $\pi B = 2D(\sqrt{u_0(\xi)})$, $\xi \ge 1/2$.

После интегрирования по всей области с учетом нормировки работы [4] $\int_0^1 h(\xi')d\xi' = 1$ получается соотношение $\pi B = 2D(\sqrt{u_1})$, в котором величина u_1 соответствует значению решения плазменного уравнения на входе в слой $\xi = 1$. В работе [4] для нахождения u_1 было выведено трансцендентное уравнение, решение которого можно получить только численными методами. После нахождения u_1 вычисляется параметр B и, следовательно, b. При значениях $\xi \ge 1/2$ решением является $u_0(\xi) = const = u_0(1) = u_1 = 0.40445$.

3. Дифференциальное уравнение для вычисления пограничной функции нулевого порядка.

В работе [5] метод пограничных функций [1-3] применялся к уравнению плазма-слой. Была получена система уравнений для определения неизвестных функций $Ru_k(u(\xi),\xi;\mu)$ и $\Pi u_k(u(\zeta),\zeta;\mu)$. В данной работе будет рассматриваться только уравнение для пограничной функции нулевого порядка $\Pi_0 u(\zeta)$, т.е. коэффициента при нулевой степени μ сингулярного ряда $\Pi u(\zeta,\mu)$:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_0 u(\zeta) = \Pi_0 F(u,\zeta). \qquad (2)$$

Используя метод пограничных функций [1-3], для сингулярного ряда правой части уравнения (1) в нулевом порядке получаем:

$$\Pi_0 f(u(\zeta),\zeta) = f(u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta),\zeta) - f(u_0(1),\zeta). \qquad (3)$$

Здесь $u_0(\xi) \equiv R_0 u(\xi)$. Переменная разностных ядер интегралов $x = u - u'$ для первого слагаемого правой части (3) преобразуется к виду $x = \Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta')$, в то время как для второго слагаемого (3), эта разность обращается в нуль $x = 0$.

При переходе к интегрированию по "растянутой" координате $\zeta = (1-\xi)/\mu$ интегралы преобразуются к виду $\int [] d\xi = -\mu \int [] d\zeta$. На первый взгляд, из последнего соотношения следует, что вклад интегральных членов в сингулярную часть правой части уравнения начинается только с первого порядка по μ. Таким образом, в нулевом порядке сингулярная часть правой части уравнения (2) принимает вид: $\Pi_0 F(u,\zeta) = -\,\mathrm{e}^{-u}\Big|_{u=u_0(\xi)}^{u=u_0(\xi)+\Pi_0 u(\zeta)} = c\left(1 - \mathrm{e}^{-\Pi_0 u(\zeta)}\right)$, где $c \equiv \mathrm{e}^{-u_1}$. В этом предположении было получено уравнение для нахождения пограничной функции нулевого порядка [5]:

$$\frac{d^2U(\zeta)}{d\zeta^2} = c\left(1 - e^{-U(\zeta)}\right) \equiv F(U), \tag{4}$$

с краевыми условиями: $U(\zeta = 0) = C_W = u_W - u_1$; $U(\zeta \to \infty) \to 0$. Ниже будут использоваться следующие обозначения: $\Pi \equiv \Pi_0 u(\zeta)$, $\Pi' \equiv \Pi_0 u(\zeta')$, а в случае для решения уравнения (4) $(b = 0)$ $U \equiv \Pi_0 u(\zeta)$.

Численные алгоритмы получения решения дифференциального уравнения пограничной функции нулевого порядка (4), а также асимптотические решения этого уравнения рассматривались в [5-8]. В работах [7, 8] после умножения уравнения (4) на первую производную с последующим интегрированием и учетом краевого условия на бесконечности $\left((U(\zeta \to \infty) = 0\right.$, и как следствие $\left.\left(dU/d\zeta\right)\big|_{\zeta\to\infty} = 0\right)$ было получено уравнение для нахождения первой производной:

$$D(\zeta) \equiv \frac{dU(\zeta)}{d\zeta} = -\sqrt{2c\left(U(\zeta) + \mathrm{e}^{-U(\zeta)} - 1\right)}. \tag{5}$$

Из этого выражения видно, что значение $D_j \equiv D(\zeta_j)$ в j-ом узле дискретной сетки вычисляется по значению $U_j \equiv U(\zeta_j)$. Численное значение U_j находится с использованием схемы повышенного порядка аппроксимации:

$$U_{j+1} = U_j + hD_j + h^2 F(U_j)/2,.h = \zeta_{j+1} - \zeta_j \tag{6}$$

4. Модернизированное уравнение для нахождения $\Pi_0 u(\zeta)$.

После замены переменной интегрирования ξ' на растянутую координату ζ' в слагаемых правой части уравнения (1), содержащих интегралы, эти члены преобразуются к виду:

$$I(u(\zeta)) = 2b\mu \int_{1/2\mu}^{1/\mu} B_0(x)\,d\zeta', \qquad B_0(x) \equiv \mathrm{e}^x\left(1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{x}\right)\right). \tag{7}$$

В области источника $\Pi' \ll 1$ и $\Pi' \ll \Pi$. Разложим подынтегральное выражение $B_0(x)$ в ряд Тэйлора. Для вычисления производных по X легко получить общую формулу:

$$d^n B_0(x)/(dx)^n = \left\{B_0(x) - \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k}\frac{1}{x^k}\right]\right\}.$$

Заметим, что $d^n B_0(x)/(d\Pi')^n = (-1)^n d^n B_0(x)/(dx)^n$. Обозначим через B_n производные по Π', взятые при $\Pi' = 0$. Тогда разложение Тэйлора представляется в виде $B_0(X) = B_0(\Pi) + S_E$, $S_E \equiv \sum_{n=1}(B_n/n!)(\Pi')^n$.

На больших расстояниях можно предположить экспоненциальное убывание Π: $\Pi(\zeta)=\Pi(\zeta_0)e^{-g(\zeta-\zeta_0)}$, $d\Pi/d\zeta=-g\Pi$. Последнее выражение используется при замене переменной интегрирования $d\zeta'\to d\Pi'$ по формуле $d\zeta'=(d\zeta'/d\Pi')(d\Pi'/d\zeta')d\zeta'=-d\Pi'/g\Pi'$. После интегрирования $B_0(x)$ получаем $2\mu\int\limits_{1/2\mu}^{1/\mu}B_0(x)d\zeta'=B_0(\Pi)-\frac{2\mu}{g}\int\limits_{1/2\mu}^{1/\mu}\frac{S_E}{\Pi'}d\Pi'=B_0(\Pi)-\frac{2\mu}{g}S_E^I$, $S_E^I\equiv\sum\limits_{n=1}(B_n/n!n)(\Pi')^n$. В этой формуле первый член был получен интегрированием по ζ', а последующие (т.е. соответствующие S_E) интегрированием по Π'. Поскольку $\Pi<\Pi'$, то $\mu S_E^I=O(\mu)$ и, следовательно, $2\mu\int\limits_{1/2\mu}^{1/\mu}B_0(X)d\zeta'=B_0(\Pi)+O(\mu)\approx B_0(\Pi)$. В низшем порядке по μ вклад $I(u(\zeta))$ в пограничный ряд разложения правой части уравнения (1) вычисляется по формуле $\Pi_0 I(u(\zeta))=I(u(1)+\Pi)-I(u(1))=$ $=c(1-e^{-\Pi})+b\{B_0(\Pi)-1\}$ и вместо (4) необходимо решать уравнение:

$$\frac{d^2\Pi}{d\zeta^2}=c(1-e^{-\Pi})+b\{e^{\Pi}[1-\mathrm{erf}(\sqrt{\Pi})]-1\}\equiv F^M(\Pi). \qquad (8)$$

После умножения на первую производную и интегрирования по ζ получается выражение:

$$\left(\frac{d\Pi}{d\zeta}\right)^2=2c(\Pi+e^{-\Pi})+2b\left\{e^{\Pi}[1-\mathrm{erf}(\sqrt{\Pi})]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\Pi}-\Pi\right\}+C_1.$$

Использование условия на бесконечности дает значение постоянной $C_1=-2(c+b)$. Окончательно получаем:

$$\frac{d\Pi}{d\zeta}=-F^D(\Pi)\equiv-\sqrt{2c(\Pi+e^{-\Pi}-1)+2b\{B_0(\Pi)+(2/\sqrt{\pi})\sqrt{\Pi}-\Pi-1\}}. \qquad (9)$$

5. Вычисление правой части модифицированного уравнения пограничной функции.

Формулы представления в виде рядов функции $B_0(X=z^2)$ при малых и больших X можно найти в справочнике ([14], с.70).

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!!}z^{2n+1}, \qquad (10)$$

$$B_0(X)=e^X-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{X}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!!}X^n. \qquad (11)$$

Для больших значений X имеется асимптотическая формула:

$$e^{z^2}\left[1-\operatorname{erf}(z)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{z}\left\{1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1\bullet 3}{\left(2z^2\right)^2}-\frac{1\bullet 3\bullet 5}{\left(2z^2\right)^3}+\ldots\right\},$$

$$B_0(X)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{X}}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2X)^n}\right\}. \qquad (12)$$

Первая производная равняется $B_0'(X)\equiv\dfrac{dB_0(X)}{dX}=B_0(X)-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{X}}$.

Таблица 1

X	$B_0(X)$	$F^M(X)$	$F^D(X)$
10^{-20}	$1-1.13\times10^{-10}$	-1.246×10^{-10}	-9.829×10^{-17}
10^{-18}	$1-1.13\times10^{-9}$	-1.246×10^{-9}	-3.831×10^{-18}
10^{-16}	$1-1.13\times10^{-8}$	-1.246×10^{-8}	7.183×10^{-18}
10^{-14}	$1-1.13\times10^{-7}$	-1.246×10^{-7}	5.404×10^{-17}
10^{-12}	$1-1.13\times10^{-6}$	-1.246×10^{-6}	-6.656×10^{-17}
10^{-10}	$1-1.13\times10^{-5}$	-1.246×10^{-5}	-1.630×10^{-15}
10^{-8}	0.9999	-1.246×10^{-4}	-1.661×10^{-12}
10^{-6}	0.9989	-1.244×10^{-3}	-1.660×10^{-9}
10^{-4}	0.9888	-1.228×10^{-2}	-1.644×10^{-6}
10^{-2}	0.8965	−0.1077	-1.491×10^{-3}
0.1	0.7236	−0.2417	-3.682×10^{-2}
0.5	0.5232	−0.2640	-0.253
1.0	0.4276	−0.2102	-0.4896
2.0	0.3362	−0.1559	-0.843
3.0	0.2873	−0.1528	-1.147
4.0	0.2554	−0.1671	-1.466
5.0	0.2323	−0.1848	-1.818
6.0	0.2146	−0.2015	-2.204
7.0	0.2005	−0.2161	-2.622
8.0	0.1888	−0.2286	-3.067
9.0	0.1790	−0.2393	-3.535
10.0	0.0561	−0.3749	-4.276

На основании формул (11), (12) получаются значения $B_0(X)$ при $X=0$ и $X\to\infty$: $B_0(0)=1$, $B_0(\infty)=0$, $B_0'(0)=-\infty$, $B_0'(\infty)=0$. Таким образом, функция $B_0(X)$ является монотонно убывающей, а $B_0(X)-1$ отрицательной (за исключением точки $X=0$, в которой $B_0(X)-1=0$).

Для получения числовых значений правых частей модифицированных уравнений $F^M(X)$ (8) и $F^D(X)$ (9) функция $B_0(X)$ при $10 \le X \le 25$ вычислялась по асимптотической формуле (12); при $X > 25$ $B_0(X)=0$. При $X < 10$ функция $\mathrm{erf}(\sqrt{X})$ вычислялась по первому разложению в ряд в формуле (10).

Результаты расчетов представлены в таблице 1. Видно, что при всех значениях X, как $F^M(X)$, так и $F^D(X)$ являются отрицательными величинами. В затушеванной области $X \le 10^{-12}$ колонки $F^D(X)$ эта функция проявляет немонотонное поведение (вплоть до перемены знака) и имеет по модулю очень маленькую величину. Скорее всего, это связано с ошибками вычислений малых величин, близких к нулю. Поэтому в этой области необходимо положить $X=0$. Тогда $B_0(0)=1$ и $F^D(X=0)=B_0(0)-1=0$. На основании приведенных результатов следует, что поскольку подкоренное выражение правой части уравнения (9) является отрицательным, то нельзя использовать это уравнение для расчетов по схеме, аналогичной схеме (6), (7).

6. Трехточечная дискретная схема решения модернизированного уравнения, описывающего поведение $\Pi_0 u(\zeta)$.

Для численного решения уравнения (8) запишем его дискретный аналог на равномерной сетке с шагом h:

$$\Pi(\zeta_{j+1}) = \Pi(\zeta_{j-1}) - 2\Pi(\zeta_j) + h^2 F^M(\zeta_j). \qquad (13)$$

Значение параметра b вычислялось по формуле $b = 2\sqrt{\pi}B = (4/\sqrt{\pi})D(\sqrt{u_1}) = 1.10421$. На функцию Π накладываются обычные краевые условия: $\Pi(0)=C_W; \Pi(\zeta \to \infty) \to 0$. Заметим, что при численном решении второе из этих условий практически не реализуемо.

Вычисления начинаются со значения $\Pi_1 = C_W$. Далее решается задача Коши. В частности можно использовать условие 'плавающего потенциала' полной задачи Тонкс-Ленгмюра [4,9,10] $du/d\xi|_{\xi=L} = Q$, где Q – заряд стенки с 'плавающим потенциалом'. Величина Q вычислялась на основании результатов численного решения задачи Тонкс-Ленгмюра [9,10] путем численного интегрирования правой части уравнения (1) по переменной ξ во всей области расчета $0 \le \xi \le L = 1$. На инверсированной сетке растянутых координат это условие преобразуется к виду $d\Pi(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=0} = -\mu Q$. Здесь учтено, что около правой границы $\xi = L = 1$

решение плазменного приближения является постоянной $u(\xi) = u(L=1) = u_1$. В этом случае $D_0(\Pi) = -0.98328$.

Значение Π_2 вычислялось по формуле повышенного порядка аппроксимации:

$$\Pi_2 = \Pi(h) = \Pi(0) + h\left\{\left.\frac{d\Pi}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} + \frac{h}{2}\left.\frac{d^2\Pi}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=0}\right\}, \qquad (14)$$

$$\left.\frac{d^2\Pi}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=0} = F^M(\Pi_0) = F^M(C_W).$$

Вычисления проводились на равномерной сетке с шагом $h = 0.00390625$. По результатам расчета функция $\Pi(\zeta)$ монотонно уменьшается вплоть до отрицательных значений. Учитывая, что $\Pi(\zeta)$ является подкоренным выражением аргумента интеграла ошибок, расчёт заканчивался при появлении первого отрицательного значения $\Pi_{561} = -1.16472\times10^{-3}$ в точке $\zeta_{561} = 2.18750$. Линейная интерполяция по значениям $\Pi(\zeta)$ на последних двух шагах расчёта дает точку $\zeta_0 = 2.1866725$, в которой $\Pi(\zeta)$ обращается в нуль. Использование для аппроксимации первой производной разности вперед (первый порядок аппроксимации: в правой части (14) удерживается только первый член) приводит к небольшим отличиям результатов $\left(\Pi_{561} = -4.94914\times10^{-4}\right.$ $\left.\zeta_0 = 2.1871483\right)$.

7. Перенормировка координаты ζ.

В постановке задачи предполагалось, что функция $\Pi(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$. Решение задачи Коши вовсе не обязано удовлетворять этому условию. Так в рассмотренном расчете нулевое значение функции $\Pi(\zeta)$ достигается на конечном интервале именно в точке ζ_0. Поэтому вполне разумно провести преобразование координаты ζ, с таким расчетом, чтобы при $\zeta = \zeta_0$ значение новой координаты $x(\zeta)$ обращалось в бесконечность. Одним из таких преобразований является: $x(\zeta) = \zeta/(\zeta_0 - \zeta)$: $x(0) = 0$, $x(\zeta_0) = \infty$. Используя такую перенормировку, преобразуем координаты равномерной сетки. Численное решение полной задачи Тонкс-Ленгмюра нам известно на неравномерной сетке растянутой переменной ζ [9,10]. Определяем номера новых (перенормированных) координат $x(\zeta_k)$, между которыми помещается ζ_j: $x(\zeta_k) \le \zeta_j < x(\zeta_{k+1})$. Значениями функции Π_k являются, вычисленные по схеме (13) величины.

Решение задачи в точке ζ_j можно получить с использованием линейной интерполяции по значениям Π_k и Π_{k+1}, соответствующим точкам x_k и x_{k+1}. Результаты расчета представлены в таблице 2. Видно, что $\Pi(\zeta)$ монотонно убывает. Через Π_0^P обозначена разность между численным решением уравнения Тонкс-Ленгмюра [9,10] и плазменным приближением $\Pi_0^P = u(\zeta) - u_1$. В столбцах таблицы, обозначенных через %, показаны относительные ошибки. Например, для решения уравнения (5) $[U(\zeta) \equiv \Pi_0(\zeta)$ при $b = 0]$: $\delta = 100 \times \left(1 - U(\zeta)/\Pi_0^P(\zeta)\right)\%$. Только в интервале $\zeta = 1.0 \div 5.0$ абсолютная величина относительной ошибки для $\Pi(\zeta)$ меньше соответствующей ошибки для $U(\zeta)$. Использование при вычислении первой производной в т. $\zeta = 0$ аппроксимации первого порядка приводит к незначительным изменениям результатов (максимум в четверном знаке).

Таблица 2

j	ζ	Π_0^P	$U(\zeta)$	%	$\Pi(\zeta)$	%
2	0.0156	2.54648	2.53869	0.31	2.52856	0.70
3	0.0313	2.53131	2.51580	0.61	2.49624	1.39
4	0.0469	2.51621	2.49307	0.92	2.46473	2.05
9	0.1250	2.44167	2.38163	2.46	2.31837	5.05
33	0.5000	2.10676	1.89741	9.94	1.80462	14.34
65	1.0000	1.71757	1.37448	19.98	1.39438	18.82
129	2.0000	1.11951	0.68119	39.15	0.96011	14.24
177	3.0000	0.72043	0.31963	55.63	0.73261	-1.69
209	4.0000	0.46588	0.14538	68.79	0.59237	-27.15
241	5.0000	0.30680	0.06510	78.78	0.49721	-62.06
257	6.0000	0.20759	0.02894	86.06	0.42837	-106.36
273	7.0000	0.14514	0.01282	91.16	0.37626	-159.24
289	8.0000	0.10522	0.00568	94.61	0.33546	-218.82
305	9.0000	0.07927	0.00251	96.83	0.30261	-281.76
321	1.0000	0.06215	0.00111	98.21	0.27562	-343.50

Линейная интерполяция хорошо работает вдали от точки взрывного решения (ζ_0), когда множитель $1/(\zeta_0 - \zeta) < 1$. В противном случае $1/(\zeta_0 - \zeta) >> 1$ шаг может стать достаточно большим для того, чтобы привести к большим ошибкам интерполяции. Альтернативным методом вычисления Π_j является решение краевой задачи на этом шаге (с дополнительным дроблением шага) с краевыми условиями Π_k и Π_{k+1}.

Воспользуемся соотношения: $\zeta = x\zeta_0/(1+x)$, $\zeta_0 - \zeta = \zeta_0/(1+x)$; $dx/d\zeta = \zeta_0/(\zeta_0-\zeta)^2 = (1+x)^2/\zeta_0$, $d\Pi/d\zeta = \left[(1+x)^2/\zeta_0\right]d\Pi/dx$. Тогда уравнение (8) в новых переменных $x(\zeta)$ принимает следующий вид:

$$(1+x)\frac{d^2\Pi}{dx^2} + 2\frac{d\Pi}{dx} = \frac{\zeta_0^2}{(1+x)^3}F^M(\Pi) \equiv F_x^M. \qquad (15)$$

Разбивая шаг $h_k = x_{k+1} - x_k$ на n частей $(h = h_k/n)$, запишем дискретный аналог уравнения (15):

$$(1+x_k)(\Pi_{k-1} - 2\Pi_k + \Pi_{k+1}) + h(\Pi_{k+1} - \Pi_{k-1}) = h^2\left(F_x^M\right)_k,$$

$$(1+x_k-h)\Pi_{k-1} - 2(1+x_k)\Pi_k + (1+x_k+h)\Pi_{k+1} = h^2\left(F_x^M\right)_k.$$

Для численного решения последнего уравнения использовался метод пристрелки, в котором параметром стрельбы являлась производная в начальной точке. Результаты расчета представлены в таблице 3.

Таблица 3

j	ζ	Π_0^p	$U(\zeta)$	%	$\Pi(\zeta)$	%
2	0.0156	2.54648	2.53869	0.31	2.49780	1.91
3	0.0313	2.53131	2.51580	0.61	2.43577	3.77
4	0.0469	2.51621	2.49307	0.92	2.37122	5.76
9	0.1250	2.44167	2.38163	2.46	2.09843	14.06
33	0.5000	2.10676	1.89741	9.94	1.27437	39.51
65	1.0000	1.71757	1.37448	19.98	0.76515	55.45
129	2.0000	1.11951	0.68119	39.15	0.36457	67.53
177	3.0000	0.72043	0.31963	55.63	0.21588	70.03
209	4.0000	0.46588	0.14538	68.79	0.14265	69.38
241	5.0000	0.30680	0.06510	78.78	0.09945	67.58
257	6.0000	0.20759	0.02894	86.06	0.07645	63.17
273	7.0000	0.14514	0.01282	91.16	0.05984	58.77
289	8.0000	0.10522	0.00568	94.61	0.04651	55.80
305	9.0000	0.07927	0.00251	96.83	0.04005	49.48
321	1.0000	0.06215	0.00111	98.21	0.03350	46.10

Сравнение результатов расчетов, представленных в таблицах 2 и 3, показывает, что при использовании интерполяции абсолютная величина относительной ошибки меньше по сравнению с ошибками, полученными при решении уравнения (15), вплоть до $\zeta = 5.0$. Однако во второй половине области они существенно превышают соответствующие ошибки таблицы 3. Хотя последние тоже достаточно велики.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: *Наука*, 1973. 272 с.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: *Изд-во Моск. Ун-та*, 1978. 106с.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: *Высшая Школа*, 1990. 208 с.
4. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma. //Phys.Fluids.1980. Vol. 23, *N* 4. P. 803-812.
5. Филиппычев Д.С. Метод пограничных функций для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 19: Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2004 , С. 21-40.
6. Филиппычев Д.С. Применение формализма дуального оператора для получения пограничной функции нулевого порядка уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 22 : Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2005 , С. 76 - 90.
7. Филиппычев Д.С. Численное решение дифференциального уравнения, описывающего поведение пограничной функции нулевого порядка. //Прикладная математика и информатика *N* 23, М.: *МАКС Пресс*. 2006. с. 24-35.
8. Филиппычев Д.С. Численное решение дифференциального уравнения пограничной функции. //Вестн. Моск.ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. 2006. N 1. С. 10-14.
9. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой с использованием сгущающейся сетки. // Прикладная математика и информатика *N* 14: Сб. /*Под ред.* Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: *МАКС Пресс*, 2003, С 35-54.
10. Филиппычев Д.С.Численное моделирование уравнения плазма-слой //Вестн. Моск.ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. 2004. № 4. С. 32-39.
11. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. - Cambridge: *Univ.Press*, 1927, 4-th ed. (1962, 4-th ed. reprint). *имеется перевод*: Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. - М.: *Физматгиз*, 1963. Т. 1.
12. Cacuci D.G., Perez R.B., Protopopescu V. Duals and propagators: A canonical formalism for nonlinear equations. //J.Math.Phys. 1988. Vol. 29. N 2. P. 335-361.
13. Cacuci D.G., Karakashian O.A. Benchmarking the propagator method for nonlinear systems: A Burgers-Korteweg-de Vries equation. //J.Comput.Phys. 1990. Vol. 89. N 1. P. 63-79.
14. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Спецальные функции. - М.:*Наука*,1977.344 с.