

Вычисление траекторий частиц в остройной геометрии ловушки открытого типа.

1. Введение.

Одним из простых устройств, предназначенных для накопления и удержания заряженных частиц, является ловушка открытого типа (антипробкотрон) с "остройной" конфигурацией внешнего магнитного поля. "Острая" конфигурация магнитного поля в простейшем случае создается с помощью двух проводящих витков, в которых протекают токи в противоположных направлениях. Главным преимуществом "остройной" геометрии является устойчивость такой конфигурации, а основным недостатком - большая скорость потерь частиц. За счет объединения таких ловушек в линейную или тороидальную структуры создаются более сложные устройства.

Данная работа посвящена численному моделированию движения заряженных частиц (электронов) в двух различных областях: в диоде и в ловушке (Рис.1).

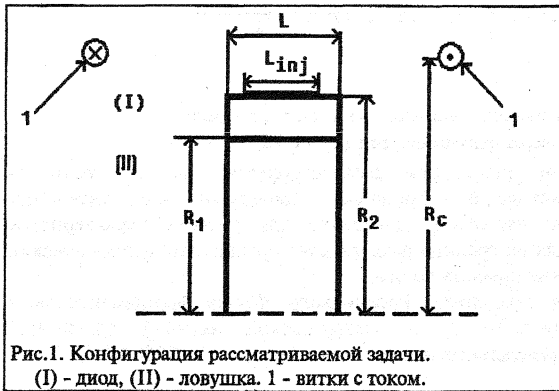


Рис.1. Конфигурация рассматриваемой задачи.
(I) - диод, (II) - ловушка. 1 - витки с током.

Сильноточный вакуумный диод состоит из двух коаксиальных цилиндров с радиусами R_1 (анод) и R_2 (катод) шириной L . Разница потенциалов между анодом и катодом составляет несколько сотен киловольт. Внутренняя поверхность диода ($r=R_1$) прозрачна для частиц.

Система находится во внешнем магнитном поле, которое создается двумя проводящими круговыми витками, токи в которых текут в противоположных направлениях. Такая система называется антипробкотрон. Электроны непрерывно инжектируются с части катода (шириной $L_{inj} \leq L$) в область диода и ускоряются в нем до релятивистских скоростей. В этой области необходимо решать самосогласованную задачу о движении частиц в электромагнитных полях как внешних, так и собственных (т.е. обусловленных самими заряженными частицами). Для ее решения используется метод частиц (PIC - "particle-in-cell" - "частица в ячейке") [1,2].

Магнитная ловушка - внутренняя область $r \leq R_1$ - первоначально заполнена разреженным газом. При инжекции электронного пучка из диода в ловушку образуется плазма, нейтрализующая как объемный заряд, так и ток пучка. Поэтому в этой области на частицы действует только внешнее магнитное поле и для расчета их траекторий применяется метод пробных частиц - т.е. решается задача о движении частиц в заданном поле.

2. Постановка задачи.

В работе используется г-z геометрия - цилиндрическая система координат (r, θ, z) при наличии аксиальной симметрии ($\partial/\partial\theta=0$). Область расчета: $0 \leq r \leq R_2$; $0 \leq z \leq L$. При моделировании рассматриваются все три компонента векторов скорости частицы v , плотности тока j и магнитного поля B . Временная переменная представляется в виде $\tau=ct$, а v и j нормированы на скорость света c . Используются стандартные обозначения для физических величин: γ , e , m - релятивистский фактор, заряд и масса электрона; $x=\{r, z\}$ и v - координата и скорость частицы. $u=\gamma v$. $\gamma=(1-v^2)^{-1/2}=(1+u^2)^{1/2}$; ρ - плотность объемного заряда. $\eta=e/mc^2$. Электрическое (E) и магнитное (B) поля представляются в виде суперпозиции внешних (индекс "ex") и собственных ("S") полей: $E=E_{ex}+E_S$; $B=B_{ex}+B_S$. В дальнейшем эти индексы опускаются поскольку совершенно ясно к какой части поля (внешней или собственной) относятся соответствующие формулы и выражения.

Движение релятивистских частиц описывается уравнениями:

$$du/d\tau = \eta(E + v \times B), \quad (1)$$

$$v = u / (1 + u^2)^{1/2}, \quad x/d\tau = v. \quad (2)$$

В области диода ($R_1 \leq r \leq R_2$) самосогласованное электромагнитное поле определяется из уравнений Максвелла, в которых производные по времени считаются малыми:

$$\text{rot}E = 0, \text{div}E = 4\pi\rho, \quad (3)$$

$$\text{rot}B = 4\pi j, \text{div}B = 0. \quad (4)$$

Уравнения для скалярного (ϕ ; $E = -\text{grad}\phi$) и векторного (A ; $B = \text{rot}A$) потенциалов получаются обычным способом из уравнений (3), (4): $\Delta\phi = -4\pi\rho$; $\text{rot}(\text{rot}A) = 4\pi j$. Краевые условия для скалярного потенциала записываются в виде: $\phi(R_1) = \phi_A$; $\phi(R_2) = 0$; $\phi(r)|_{z=0} = \phi(r)|_{z=L} = \phi_A[\ln(R_2/r)/\ln(R_2/R_1)]$. Векторный потенциал считается равным нулю на границе области (диода).

3. Алгоритм численного моделирования.

Для численного решения самосогласованной задачи в области диода вводятся разностные сетки по времени (с шагом $\Delta\tau$; $\tau^k = k\Delta\tau$, $n=0, 1, 2, \dots$) и по пространству

$$(r_i = R_1 + (i-1)\Delta r, \quad i=1, 2, \dots, N_R, \quad r_{N_R+1} = R_2; \quad z_j = (j-1)\Delta z, \quad j=1, 2, \dots, N_z, \quad z_{N_z+1} = L).$$

В методе частиц каждая "крупная" частица (с координатами r_p и z_p) представляет собой облако постоянной плотности в виде кольцевого цилиндра:

$r_p - \Delta r/2 \leq r \leq r_p + \Delta r/2$; $z_p - \Delta z/2 \leq z \leq z_p + \Delta z/2$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Заряд такой "частицы" вычисляется по формуле $q_p = V_p(\tau=0)n_0e$, где n_0 - число электронов в единице объема, а $V_p = 2\pi r_p \Delta r \Delta z$ - объем "частицы".

Для рассматриваемой задачи на каждом шаге по времени выполняется следующая последовательность вычислений в рамках метода частиц:

- 1) с катода инжектируется новая группа (N_{inj}) частиц;
- 2) интегрируются уравнения движения (1), (2) в полях E и B , вычисленных на предыдущем шаге;
- 3) по координатам и скоростям частиц определяются плотности объемного заряда ρ и компоненты плотности тока j_r, j_z, j_θ ;
- 4) вычисляются значения потенциалов ϕ и A_θ ;

- 5) с помощью разностного дифференцирования потенциалов находятся компоненты электромагнитного поля E_r, E_z, V_r, V_z ;
 6) из закона Ампера (1-е уравнение (4)) находятся B_θ .
 После этого цикл повторяется на следующем временном шаге с новыми значениями полей и "координат" частиц.

3.1. Интегрирование траекторий частиц.

Интегрирование уравнений движения частиц (1), (2) осуществляется по схеме перешагивания (leapfrog). При этом скорости частиц задаются на полцелых шагах по времени, а положения частиц и поля определяются на целых временных шагах. На уровне k известны величины $v^{k-1/2}, u^{k-1/2}, x^k, E^k, B^k$. Дискретный аналог уравнения (1) записывается в виде:

$$du/dt \approx (u^{k+1/2} - u^{k-1/2})/\Delta\tau = \eta(E^k + (u^{k+1/2} + u^{k-1/2}) \times B^k / 2\gamma^k) \quad (5)$$

В магнитном члене (последний член в уравнении (5)) было проведено центрирование u^k обычным способом $u^k = (u^{k-1/2} + u^{k+1/2})/2$. После использования обозначений $\delta^* = \eta\Delta\tau/2, \delta = \delta^*/\gamma^k, U^- = u^{k-1/2} + \delta^*E^k, U^+ = u^{k+1/2} - \delta^*E^k$, разностное уравнение (5) переписывается в форме $U^+ - U^- = \delta\{(U^- + U^+) \times B^k\}$. Для определения значений полей E^k и B^k в точке нахождения частицы x^k используется функция взвешивания $S(X_{ij}, x^k)$ PIC-метода (см., [1-2]). Например, $E^k = \sum_{ij} S(X_{ij}, x^k) E_{ij}^k$. (ij - индекс узла сетки).

В схеме Бориса (leapfrog Бориса) [3] (см. также [1-2]) движение частицы расщепляется на движение только в электрическом поле и движение только в магнитном поле:

$$U^- = u^{k-1/2} + \delta^*E^k, \quad (6a)$$

$$U^+ = U^- + \delta U^- \times B^k, \quad (6b)$$

$$U^+ = U^- + U^- \times B^k (2\delta/(1 + \delta^2(B^k \cdot B^k))), \quad (6c)$$

$$u^{k+1/2} = U^+ + \delta^*E^k. \quad (6d)$$

Используя (6b) и (6c) искомым вектор U^+ можно выписать в явном виде

$$U^+ = \{(1 - \delta^2 B^2)U^- + 2\delta^2(B^k \cdot U^-)B^k + 2\delta U^- \times B^k\} / (1 + \delta^2 B^2), \quad B^2 \equiv (B^k \cdot B^k).$$

После нахождения $v^{k+1/2}$ ($v = u/(1+u^2)^{1/2}$) вычисляется новое положение частицы $x^{k+1} = x^k + \Delta\tau v^{k+1/2}$. В приведенной схеме выполняется требование Бунемана об обратимости разностной схемы уравнений движения [4] так как $(\gamma^k)^2 = 1 + (U^-)^2 = 1 + (U^+)^2$ [5].

При решении уравнений движения в цилиндрической системе координат в правой части этих уравнений для поперечных компонент появляются петробежные члены. Для устранения трудностей, связанных с аппроксимацией этих членов, в данной работе использован метод с локальным преобразованием цилиндрических координат в декартовы с последующим возвращением к исходной системе [5]. Считается, что в момент времени $\tau^{k-1/2}$ цилиндрическая и декартова системы координат совпадают, т.е.

$$v_x^{k-1/2} \equiv v_r^{k-1/2}, \quad v_y^{k-1/2} \equiv v_\theta^{k-1/2}, \quad x^{k-1/2} = r^k - v_r^{k-1/2} \Delta\tau/2, \quad y^{k-1/2} = 0, \\ (d\theta/d\tau)^{k-1/2} = v_\theta^{k-1/2}/r^{k-1/2}.$$

В момент времени τ^k пересчитываются значения компонент E, B по формулам:

$$\alpha = (d\theta/d\tau)^{k-1/2} \Delta\tau/2, \quad x^k = r^k \cos\alpha, \quad y^k = r^k \sin\alpha,$$

$$E_x^k = E_r^k \cos\alpha - E_\theta^k \sin\alpha, \quad E_y^k = E_r^k \sin\alpha + E_\theta^k \cos\alpha,$$

$$B_x^k = B_r^k \cos\alpha - B_\theta^k \sin\alpha, \quad B_y^k = B_r^k \sin\alpha + B_\theta^k \cos\alpha.$$

После решения уравнений движения по схеме leapfrog Бориса (6) осуществляется обратный переход в цилиндрическую систему координат:

$$x^{k+1/2} = x^k + v_x^{k+1/2} \Delta\tau/2, \quad y^{k+1/2} = y^k + v_y^{k+1/2} \Delta\tau/2,$$

$$r^{k+1/2} = [(x^{k+1/2})^2 + (y^{k+1/2})^2]^{1/2},$$

$$\cos\beta = x^{k+1/2}/r^{k+1/2}, \quad \sin\beta = y^{k+1/2}/r^{k+1/2},$$

$$v_r^{k+1/2} = v_x^{k+1/2} \cos\beta + v_y^{k+1/2} \sin\beta, \quad v_\theta^{k+1/2} = -v_x^{k+1/2} \sin\beta + v_y^{k+1/2} \cos\beta.$$

При таком методе вычислений центробежные члены аппроксимируются со вторым порядком по времени [6].

В области ловушки ($0 \leq r \leq R_1$) решается задача Коши нахождения траектории частицы во внешнем магнитном поле. Поскольку для такой несамосогласованной задачи требование Бунемана [4] не имеет особого значения, то для вычисления траекторий используется более простой метод, а именно метод Эйлера с пересчетом, имеющий второй порядок аппроксимации. В отсутствии электрического поля уравнения (1), (2) упрощаются (здесь использовано представление [7]):

$$dv/d\tau = \eta^*(v \times B) \equiv a, \quad \dot{\eta} \equiv \eta \dot{\eta}^{-1} = \eta(1-v^2)^{1/2}, \quad dx/d\tau = v.$$

Метод Эйлера с пересчетом является двухшаговым методом:

$$\text{первый шаг} \quad v^{k+1/2} = v^k + a^k \Delta\tau, \quad x^{k+1/2} = x^k + (v^k + v^{k+1/2}) \Delta\tau/2;$$

$$\text{второй шаг} \quad v^{k+1} = v^k + (a^k + a^{k+1/2}) \Delta\tau/2, \quad x^{k+1} = x^k + (v^k + v^{k+1}) \Delta\tau/2.$$

$$\text{Здесь} \quad a = \{a_r, a_\theta, a_z\} = \{\eta^* v_\theta B_z + v_\theta^2/r, \eta^*(v_z B_r - v_r B_z) - v_r v_\theta/r, -\eta^* v_\theta B_r\}.$$

3.2. Вычисление ρ и j в узлах пространственной сетки.

Наиболее существенным отличием PIC-метода от других методов, использующих траектории частиц (молекулярная динамика, Монте-Карло и т.д.) является процедура распределения ("взвешивания") заряда и тока каждой частицы по ближайшим узлам пространственной сетки для определения значений плотностей пространственного заряда и тока в этих узлах. Такая операция проводится с помощью функции "взвешивания" $Q_{ij}^p = S(x_{ij}, x_p)/V_{ij}$, которая определяет какая часть заряда частицы p передается узлу сетки $(ij) \Leftrightarrow (r_i, Z_j)$. При этом узлу сетки (r_i, Z_j) сопоставляется область кольцевого цилиндра: $r_i - \Delta r/2 \leq r \leq r_i + \Delta r/2$; $Z_j - \Delta z/2 \leq z \leq Z_j + \Delta z/2$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ с объемом $V_{ij} = 2\pi r_i \Delta r \Delta z$. Плотность объемного заряда в узле сетки (ij) определяется по формуле

$$\rho_{ij} = \frac{\sum_{p=1}^P Q_{ij}^p}{V_{ij}},$$

где суммирование проводится по тем частицам, которые "попали" в объем V_{ij} . В данной работе используется линейное взвешивание при котором распределение заряда осуществляется по площадям перекрытия объемов частицы V_p и V_{ij} ($Q_{ij}^p \sim V_p \cap V_{ij}$). Таким образом, заряд каждой частицы распределяется по соседним узлам пространственной сетки. Функция взвешивания представляется в виде произведения

функций взвешивания по z и r направлениям ($Q_{i,j}^P = QZ_j^P QR_i^P$). Взвешивание по z направлению осуществляется по формулам ($Z_j \leq z_p \leq Z_{j+1}$):

$$QZ_j^P = (Z_{j+1} - z_p) / \Delta z; \quad QZ_{j+1}^P = (z_p - Z_j) / \Delta z.$$

Взвешивание по r направлению осуществляется по площади пересечения площадей кольцевых поперечных сечений частицы и ячейки сетки:

$$QR_i^P = (A/2)[r_i(r_i + \Delta r) - r_p(r_p - \Delta r)]; \quad QR_{i+1}^P = (A/2)[r_p(r_p + \Delta r) - r_i(r_i + \Delta r)].$$

Коэффициент A определяется из условия $QR_i^P + QR_{i+1}^P = q_p$. Отсюда $A = q_p / r_p \Delta r$. Заряд "частицы" q_p вычисляется по заданному току "инжекции" с катода J_k :

$$q_p = J_k / (N_{inj} \Delta \tau).$$

Аналогично определяется плотность тока из соотношения $j = \rho v; j_{ij} = \sum_p Q_{ij}^P v_p / V_{ij}$.

В случае использования схемы перешагивания (leapfrog) для интегрирования уравнений движения значения скоростей частиц центрируется по времени $v_p = (v_p^{k-1/2} + v_p^{k+1/2}) / 2$.

3.3. Расчет электромагнитного поля.

Уравнения Пуассона для скалярного потенциала ϕ ($\Delta \phi = -4\pi\rho$) в r - z геометрии записываются в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -4\pi \quad (7)$$

Для решения этого уравнения использовался прямой метод, основанный на дискретном преобразовании Фурье по z координате (метод Хокни) [8]:

- 1) применяется прямое дискретное преобразование Фурье разностного аналога уравнения (7) и крайних условий;
- 2) методом скалярной прогонки по r направлению вычисляются Фурье компоненты потенциала $\hat{\phi}$;
- 3) обратным дискретным преобразованием Фурье получаются значения потенциала ϕ .

Разностный аналог уравнения (7) записывается в виде:

$$\left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \phi_{i+1,j} - \phi_{i,j} - \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \phi_{i,j} - \phi_{i-1,j} + \left(\frac{r_i \Delta r^2}{\Delta z^2} \right) \phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1} = -4\pi \rho_{i,j} r_i \Delta r^2 \quad (8)$$

Решение уравнения (8) представляется в виде дискретного преобразования Фурье:

$$\phi_{i,j} = \sum_{k=2}^{N_z} \hat{\phi}_{i,k} \sin \alpha_{j,k} \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha_{j,k} = \frac{\pi Z_j Z_k}{L \Delta z} = \frac{\pi Z_j (k-1)}{L} = \frac{\pi (j-1) Z_k}{L} = \frac{\pi (j-1) (k-1)}{N_z},$$

$\hat{\phi}_{i,k} = \sum_{j=2}^{N_z} \phi_{i,j} \sin \alpha_{jk}$ коэффициенты Фурье $\hat{\phi}_{i,k}$, которые удовлетворяют системе разностных уравнений:

$$\hat{\phi}_{i+1,k} \left(1 + \frac{\Delta r}{2r_i}\right) - \hat{\phi}_{i,k} \left(2 + 2 \frac{\Delta r^2}{\Delta z^2} \left(1 - \cos \frac{\pi(k-1)\Delta z}{L}\right)\right) + \hat{\phi}_{i-1,k} \left(1 - \frac{\Delta r}{2r_i}\right) = -4\pi\Delta r^2 \hat{f}_{i,k}$$

($\hat{f}_{i,k}$ - дискретное преобразование Фурье плотности объемного заряда $\rho_{i,j}$).

Решение этой системы находится методом скалярной прогонки [9], а затем ИСКОМЫЕ значения потенциала вычисляются по формуле (9).

Аналогичная процедура применялась для нахождения $A=A_0$ из уравнения

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = -4\pi j_0$$

с краевыми условиями $A_0=0$ на границе области расчета.

Компоненты поля E_z , E_r , B_z и B_r определяются из соотношений $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$ и $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$. Для их нахождения используется разностное дифференцирование потенциалов со вторым порядком аппроксимации. Внутри области аппроксимация производных со вторым порядком осуществляется за счет применения центральных разностей. Для сохранения второго порядка аппроксимации в краевых точках обычно используется формула линейной

экстраполяции $y = y_\beta \frac{(x - x_\alpha)}{(x_\beta - x_\alpha)} + y_\alpha \frac{(x_\beta - x)}{(x_\beta - x_\alpha)}$, которая для точек, отстоящих

от краевой точки x на полушаг и на шаг пространственной сетки ($x_\alpha = \Delta x/2$, $x_\beta = \Delta x$ или $x_\alpha = L - \Delta x/2$, $x_\beta = L - \Delta x$), принимает простой вид $y = 2y_\alpha - y_\beta$. Подставляя в последнюю формулу $y_\alpha = (\partial A / \partial x)_{1+1/2} \cong (A_2 - A_1) / \Delta x$ и $y_\beta = (\partial A / \partial x)_2 \cong (A_3 - A_1) / 2\Delta x$, получаем $(\partial A / \partial x)_1 \cong (-3A_1 + 4A_2 - A_3) / 2\Delta x$.

Аналогично, $(\partial A / \partial x)_{N+1} \cong (3A_{N+1} - 4A_N + A_{N-1}) / 2\Delta x$.

Электрическое поле $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi$.

Компонента E_z ($E_z = -\partial\phi/\partial z$):

$$\begin{aligned} (E_z)_{1,j} &= (E_z)_{N_R+1,j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, N_z+1, \\ (E_z)_{i,1} &= (3\phi_{i,1} - 4\phi_{i,2} + \phi_{i,3}) / 2\Delta z, \\ (E_z)_{i,j} &= (\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1}) / 2\Delta z, \quad i=2, 3, \dots, N_R, \quad j=2, 3, \dots, N_z, \\ (E_z)_{i,N_z+1} &= (-3\phi_{i,N_z+1} + 4\phi_{i,N_z} - \phi_{i,N_z-1}) / 2\Delta z. \end{aligned}$$

Компонента E_r ($E_r = -\partial\phi/\partial r$):

$$\begin{aligned} (E_r)_{i,1} &= (E_r)_{i,N_z+1} = \phi_{i,1} \ln(R_2/R_1), \quad i=1, 2, \dots, N_R+1, \\ (E_r)_{1,j} &= (3\phi_{1,j} - 4\phi_{2,j} + \phi_{3,j}) / 2\Delta r, \\ (E_r)_{i,j} &= (\phi_{i-1,j} - \phi_{i+1,j}) / 2\Delta r, \quad i=2, 3, \dots, N_R, \quad j=2, 3, \dots, N_z, \\ (E_r)_{N_R+1,j} &= (-3\phi_{N_R+1,j} + 4\phi_{N_R,j} - \phi_{N_R-1,j}) / 2\Delta r. \end{aligned}$$

Магнитное поле $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$.

Компонента B_r ($B_r = -\partial A / \partial z$; $A=A_0$):

$$(B_r)_{1,j} = (B_r)_{N_R+1,j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, N_z+1,$$

$$\begin{aligned}(B_r)_{i,1} &= (3A_{i,1} - 4A_{i,2} + A_{i,3}) / 2\Delta z, \\ (B_r)_{i,j} &= (A_{i,j-1} - A_{i,j+1}) / 2\Delta z, \quad i = 2, 3, \dots, N_R, \quad j = 2, 3, \dots, N_Z, \\ (B_r)_{i,N_Z+1} &= (-3A_{i,N_Z+1} + 4A_{i,N_Z} - A_{i,N_Z-1}) / 2\Delta z.\end{aligned}$$

Компонента B_z ($B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r A}{\partial r}$; $B_z(z=0)=0$):

$$\begin{aligned}(B_z)_{i,1} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_R + 1, \\ (B_z)_{i,j} &= (-3r_{i,j} A_{i,j} + 4r_{i,j} A_{i,j+1} - r_{i,j} A_{i,j+2}) / 2r_{i,j} \Delta r, \\ (B_z)_{i,j} &= (r_{i+1} A_{i+1,j} - r_{i-1} A_{i-1,j}) / 2r_{i,j} \Delta r, \quad i = 2, 3, \dots, N_R, \quad j = 2, 3, \dots, N_Z, \\ (B_z)_{N_R+1,j} &= (3r_{N_R+1} A_{N_R+1,j} - 4r_{N_R} A_{N_R,j} + r_{N_R-1} A_{N_R-1,j}) / 2r_{N_R+1} \Delta r.\end{aligned}$$

Компонента магнитного поля B_θ вычисляется по схеме бегущего счета разностного аналога закона Ампера ($\partial B_\theta / \partial z = -4\pi j_z$)

$$B_\theta_{i,j} = B_\theta_{i,j-1} - 2\pi \Delta z (j_{z,i,j} + j_{z,i,j-1}), \quad j = 2, 3, \dots, N_Z + 1.$$

Для начала расчета по этой схеме необходимо знать значения $B_\theta_{i,1}$, которые находятся по току замыкания (т.е. току, протекающему через левую границу) из

уравнения $\frac{1}{r} \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} = 4\pi j_z$. Разностная схема для последнего уравнения также является схемой бегущего счета

$$(rB_\theta)_{i,1} = 0, \quad (rB_\theta)_{i+1,1} = (rB_\theta)_{i,1} + \pi \Delta r (j_{z,i,j} + j_{z,i,j-1}) (r_{i+1} + r_i).$$

3.4. Вычисление внешнего магнитного поля.

Компоненты B_r и B_z внешнего магнитного поля, создаваемого круговым током (J_c , нормированным на скорость света c) радиусом (R_c) и расположенным в точке ($z=Z_c$), определяются по формулам [10]:

$$\begin{aligned}Z &= z - Z_c, \quad X^2 = (R_c - r)^2 + Z^2, \quad Y^2 = (R_c + r)^2 + Z^2, \\ B_r(r, z, Z_c) &= \frac{2J_c Z}{Y} \left\{ \frac{R_c^2 + r^2 + Z^2}{X^2} E(k) - K(k) \right\}, \\ B_z(r, z, Z_c) &= \frac{2J_c}{Y} \left\{ \frac{R_c^2 - r^2 - Z^2}{X^2} E(k) + K(k) \right\},\end{aligned}$$

Где $K(k)$ и $E(k)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода, зависящие от параметра k ($k^2 = 2R_c r / Y^2$). Поле от двух круговых токов находится суперпозицией полей, создаваемых токами в точках Z_{c1} и Z_{c2} . $B_{r,z}(r, z; Z_c) = B_{r,z}(r, z; Z_{c1}) - B_{r,z}(r, z; Z_{c2})$. В этой формуле знак минус появляется за счет противоположного направления токов.

4. Результаты численных расчетов полной системы (диод - ловушка).

Для численного моделирования задачи задается набор физических и счетных параметров. Физические параметры можно разбить на три группы:

- группа I - параметры, задающие конфигурацию системы (диод - ловушка): R_1, R_2, L ;
- группа II - параметры, задающие внешнее магнитное поле: R_c, Z_{c1}, Z_{c2}, J_c ;
- группа III - параметры высоковольтного диода: Φ_A, J_k, L_{inj} .

К счетным параметрам относятся шаги сеток по пространству и времени ($\Delta z, \Delta r, \Delta t$), а также число частиц, инжектируемых с катода на каждом временном шаге

(N_{inj}). Численное моделирование системы диод - ловушка проводилось для 4-х вариантов значений параметров. Ниже геометрические размеры приводятся в см, а токи в кА. Во всех вариантах параметры $R_1=4.0$, $\phi_A=300$ кВ, $R_c=5.0$, $J_c=60$; $\Delta\tau=0.03$, $\Delta r=0.1$, $\Delta z=0.05$ были одинаковыми. В таблице 1 приведены значения остальных параметров.

Основной целью этих расчетов являлось рассмотрение динамики накопления частиц в ловушке. Некоторые результаты численного моделирования представлены на рис. 2, на котором показано изменение во времени числа частиц в диоде и в ловушке. На начальной стадии эволюции число частиц в ловушке нарастает линейным образом до тех пор пока частицы не достигнут границы ловушки (R_1). На этом интервале времени объемный заряд вблизи катода еще незначительный и поэтому отсутствует эффективное экранирование катода. После пролета первых частиц через область диода начинается заполнение ловушки. Накоплению частиц в ловушке препятствуют два фактора:

- вылет частиц через боковые границы ловушки ;
- переход частиц в область диода.

Под воздействием этих факторов с течением времени в ловушке устанавливалось динамическое равновесие - т.е. наблюдались незначительные флуктуации числа частиц в ловушке относительно некоторого среднего значения. Согласно данным, представленным на рис. 2, такое "стационарное" состояние достигалось за время $\tau=3+b$. За такое же время устанавливалось и "стационарное" состояние в диоде.

Рассмотрим баланс частиц в диоде. Инжекция частиц в диод происходит с части катода L_{inj} . В диоде частицы ускоряются до релятивистских скоростей и попадают в область ловушки. Часть частиц возвращается на катод, что обусловлено наличием объемного заряда вблизи катода (экранирование катода). "Пилообразный" характер зависимости числа частиц в диоде (рис. 2) как раз и объясняется экранированием катода объемным зарядом пучка.

Таблица 1.

группа N варианта	I		II		III		
	R_2	L	Z_{c1}	Z_{c2}	J_k	N_{inj}	L_{inj}
	см				кА		см
V1	4.5	1.0	-1.5	2.5	50	25	1.0
V2	4.5	2.0	-0.1	2.1	40	32	0.2
V3	4.5	2.0	-0.1	2.1	17	32	0.2
V4	4.3	2.0	-0.1	2.1	50	32	0.2

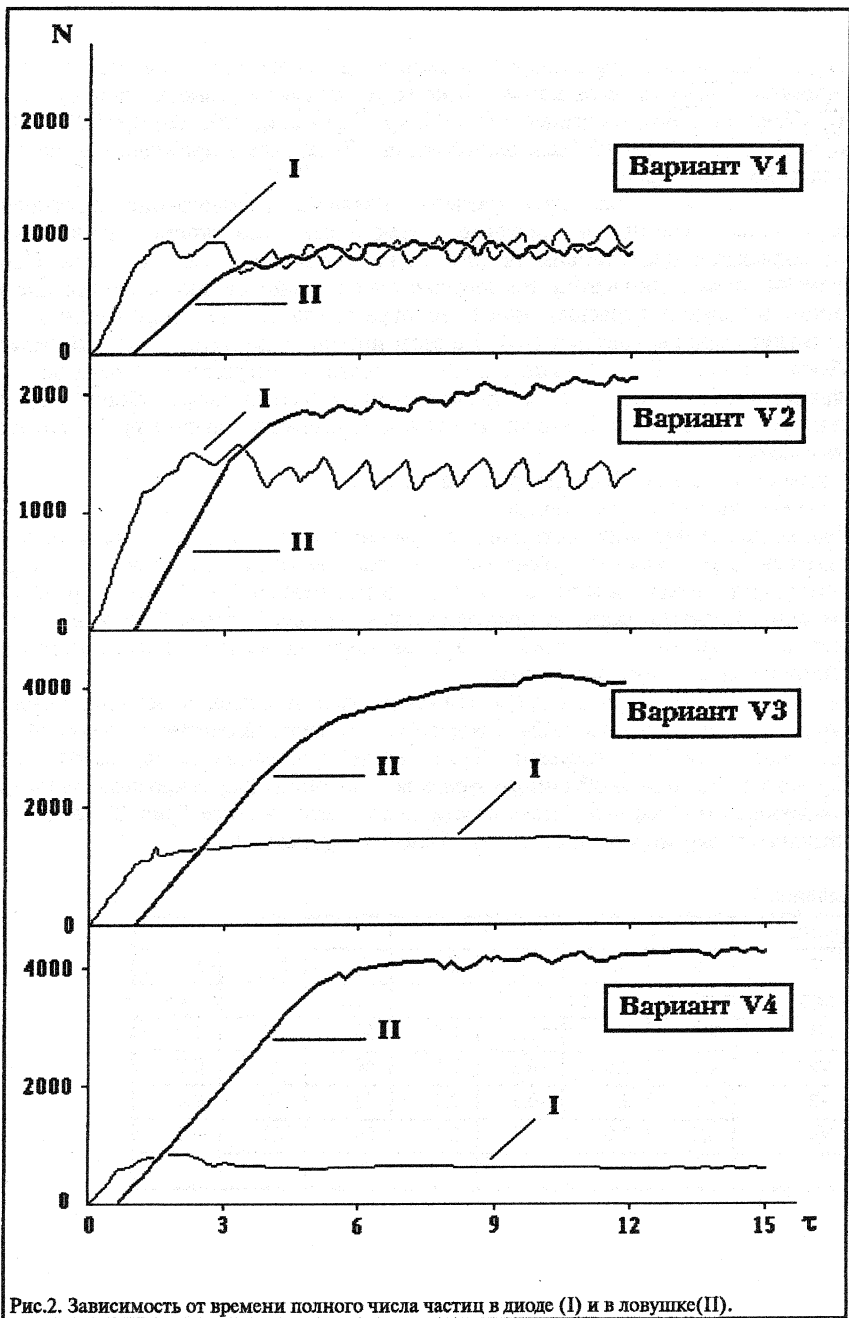


Рис.2. Зависимость от времени полного числа частиц в диоде (I) и в ловушке(II).

Таблица 2.

N варианта	NI ₁	NI ₂	NI _R	ND	NT	<ND>	<NT>
	%%						
V1	26.56	24.14	26.23	11.86	11.21	1052	965
V2	29.41	26.26	19.65	8.16	16.52	1318	2105
V3	23.70	23.69	0.000	13.08	39.12	1512	4345
V4	25.78	23.52	8.45	5.42	36.73	700	4467

Динамика ухода частиц из ловушки представлена в таблице 2, в которой приведены значения части частиц от полного числа (в %%), покинувших систему (через левую NI₁, правую NI₂ и верхнюю NI_R границы) и находящихся в областях диода ND и ловушки NT к концу расчета ($\tau=12=400\Delta\tau$ для V1, V2, V3 и $\tau=15=500\Delta\tau$ для V4). Полное число частиц в момент времени τ равно числу частиц, инжектированному к этому моменту. К концу расчета было инжектировано: 10000 частиц для V1; 12800 для V2 и V3; 1600 для V4. В этой же таблице приведены средние числа частиц в диоде <ND> и в ловушке <NT> за последние 50 шагов по времени ($\tau \in [10.5, 12]$ и $\tau \in [113.5, 15]$ соответственно для V1-V3 и V4).

Траектории некоторых частиц показаны на рис. 3. Для их вычисления выделялась отдельная группа тестовых частиц, которые не учитывались при вычислении объемного заряда и плотности тока. Для этих частиц проводилось только интегрирование уравнений движений.

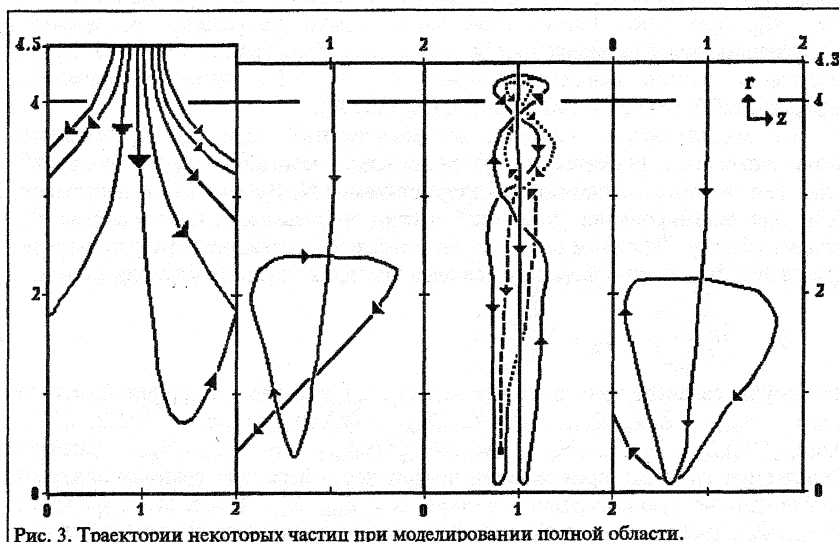


Рис. 3. Траектории некоторых частиц при моделировании полной области.

Как показали расчеты значительная часть частиц не задерживается в ловушке. В варианте расчета V4 (рис.2) в момент времени $\tau=15$ в диоде находилось 5% от общего числа инжектированных в систему частиц, а в ловушке $\approx 37\%$. Основная

масса частиц покидает ловушку через боковые стенки, двигаясь вдоль силовых линий магнитного поля (левая часть рис.3), и только немногие частицы испытывают многократные отражения и остаются в системе более значительное время. Так например, частица, которой на рис. 3 соответствует вторая справа траектория, до конца расчета так и не покинула систему. В области диода эта частица претерпевает несколько отражений от магнитной пробки острой геометрии.

5. Разбиение решения задачи полной системы на отдельные части.

Для изучения динамики заряженных частиц в ловушке был использован также несколько иной подход. Поскольку предварительные расчеты (представленные выше) показали, что "стационарное" состояние достигается за времена $\tau=3+6$, то решение задачи можно разбить на три части:

- 1) расчет самосогласованного движения частиц в диоде и накопление информации о прохождении частиц через верхнюю границу ловушки (R_1) в "стационарном" режиме;
- 2) набранная таким образом статистика частиц, инжектируемых из диода в ловушку, обрабатывается с целью получения относительно небольшого числа (порядка 1000) частиц со средними значениями координат (z_p) и скоростей (v_p);
- 3) расчет движения "средних" частиц непосредственно в ловушке.

Расчет диодной части задачи проводился с использованием PIC-метода (как это было описано выше для решения задачи во всей области). Информация о частицах, проходящих нижнюю границу диода R_1 (переход частиц из диода в ловушку), запоминалась. Для каждой частицы запоминались ее "координаты" (z, v_r, v_z, v_θ)_p при $r \leq R_1$. Расчет этой части задачи проводился до времен, превышающих время установления "стационарного" состояния $\tau > \tau_s = 6 = 200\Delta\tau$, а запоминание частиц начинается только с $\tau = \tau_s$. При этом запоминались "информация" более чем о 10000 частиц ($N_s > 10000$).

На втором этапе, носящем вспомогательный характер, проводилось сжатие запасенной информации до значительно меньшего числа "средних" частиц (т.е. частиц со средними характеристиками) $N_A \leq 1000 \ll N_s$. В настоящей работе для формирования "средних" частиц использовалось усреднение по фазовому объему. При этом определяются частицы, попавшие в фазовый объем V_{jilm} и из этих N_{jilm} частиц формируется одна "средняя" частица с координатами:

$$\hat{z}_p = \frac{\sum_{p \in ijlm} z_p}{N_{ijlm}}; \quad \hat{v}_p = \frac{\sum_{p \in ijlm} v_p}{N_{ijlm}}.$$

Здесь $p \in ijlm$ означает, что p -ая частица (z_p, v_p) находится в ячейке фазового объема V_{jilm} : $Z_j \leq z_p < Z_{j+1}$, $j=1,2,\dots,N_{kz}$; $(v_r)_i \leq (v_r)_p < (v_r)_{i+1}$, $i=1,2,\dots,N_{kvz}$; $(v_z)_l \leq (v_z)_p < (v_z)_{l+1}$, $l=1,2,\dots,N_{kvz}$; $(v_\theta)_m \leq (v_\theta)_p < (v_\theta)_{m+1}$; $m=1,2,\dots,N_{kv\theta}$. Сначала определяются границы прохождения частиц через верхнюю границу ловушки (т.е. цилиндрическую поверхность радиуса R_1): Z_{min} , Z_{max} . После этого интервал $\Delta Z = Z_{max} - Z_{min}$ разбивается на N_{kz} частей и определяется число частиц, попавших в этот интервал. Аналогичная процедура осуществляется и для каждой компоненты пространства скоростей. $N_{kz} = 8$, $N_{kvz} = N_{kvz} = N_{kv\theta} = 5$. В процессе получения "средних" частиц может сложиться такая ситуация, что в некоторые ячейки фазового объема не попала ни одна частица. В этом случае частица,

соответствующая данной ячейке, не принимается во внимание. Таким образом полное число сформированных "средних" частиц N_A может оказаться меньше числа ячеек фазового пространства $N_A < 1000$.

Полученные усредненные "координаты" частиц использовались как начальные условия для расчета траекторий во внешнем магнитном поле. Таким образом, в области ловушки ($0 \leq r \leq R_1$; $0 \leq z \leq L$) рассматривалась задача Коши, для решения которой был использован метод Эйлера с пересчетом второго порядка аппроксимации (см., выше п. 3.1).

6. Результаты численных расчетов траекторий частиц в ловушке.

Получение набора "средних" частиц.

На предварительном этапе моделирования решалась самосогласованная задача движения заряженных частиц, осуществлялся набор статистики частиц на границе R_1 и формировалось распределение "средних" частиц. Было рассчитано три варианта высоковольтного диода. Во всех трех вариантах: $R_1=4.0$, $R_c=5.0$;

$Z_{c1}=-0.1$, $Z_{c2}=L+0.1$, $\varphi_A=300$ кВ; $N_{inj}=50$. Расчетные параметры были такими же как и при моделировании задачи во всей области ($\Delta\tau=0.03$, $\Delta r=0.1$, $\Delta z=0.05$). Значения остальных параметров представлены в таблице 3.

Таблица 3

вариант	R_2	L	L_{inj}	J_c
N	см			кА
D1	4.3	2.0	0.2	60
D2	4.4	4.0	0.2	50
D3	4.4	4.0	0.1	50

Вариант D1 фактически являлся вариантом V1 за исключением числа инжектируемых с катода частиц (50 вместо 32). Варианты D2 и D3 различались только шириной области инжекции с катода.

Таблица 4.

вариант	N_S	N_A	Z_{min}	Z_{max}	ΔZ	NI_1	NI_2	N_R	N_{Ref}	τ_{out}
N	см					%%				
D1	10754	854	0.85	1.11	0.26	44.6	46.6	8.8	2.3	63
D2	14391	51	1.86	2.03	0.17	33.3	37.2	26.5	5.6	51
D3	45855	793	1.88	2.02	0.14	7.3	9.6	83.0	6.0	81

В таблице 4 представлены основные характеристики распределения "средних" частиц (N_A , N_S , Z_{min} , Z_{max} , ΔZ). При численном моделировании высоковольтного диода с параметрами варианта D2 плотность тока инжекции с катода оказалась недостаточно большой для создания вблизи катода объемного заряда существенно влияющего на динамику заряженных частиц. Вследствии этого после достижения "стационарного" режима частицы следовали практически вдоль траекторий раннее инжектированных частиц, что в конечном счете привело к образованию групп частиц, "координаты" которых на выходе из диода почти совпадали. В результате в этом варианте было сформировано всего лишь 51 "средняя" частица. Вариант D3 отличался от предыдущего (D2) только шириной области инжекции с катода, которая была уменьшена в два раза. Кроме

того, время расчета варианта D3 значительно превышало время расчета как D1, так и D2. За счет этого в D3 была набрана значительно большая статистика ($N_s = 45855$). Поэтому, в качестве примера, в таблице 5 приведены основные характеристики фазового пространства частиц, покинувших диод через нижнюю границу ($r=R_j$; т.е. через верхнюю границу ловушки) для этого варианта (D3). В таблице для каждого j -го интервала по z приведено число частиц (N_j), а также минимальное (\min) и максимальное (\max) значения компонент скорости частиц (v_r, v_θ, v_z), попавших в j -ый интервал.

Таблица 5.

Интервал		1	2	3	4	5	6	7	8
	N_j	16908	5944	51	131	801	1007	4554	16459
v_r	\min	-0.823	-0.836	-0.824	-0.828	-0.833	-0.842	-0.852	-0.852
	\max	-0.820	-0.820	-0.814	-0.815	-0.818	-0.826	-0.834	-0.843
v_z	\min	-0.132	-0.135	-0.215	-0.218	-0.220	-0.197	-0.154	-0.040
	\max	-0.091	-0.099	-0.171	-0.184	-0.177	-0.132	-0.033	-0.006
v_θ	\min	-0.205	-0.205	-0.185	-0.151	-0.117	-0.082	-0.054	-0.095
	\max	-0.101	-0.140	-0.148	-0.119	-0.081	-0.049	-0.031	-0.036

Вычисление траекторий частиц в ловушке.

Компьютерное время, требуемое для численного решения самосогласованной задачи в области диода, значительно превышает время, затрачиваемое для расчета траекторий частиц в ловушке. Эффективность численного моделирования значительно увеличивается при раздельном моделировании диода и траекторий частиц. Для каждого варианта расчета диода имеется возможность проводить многократные расчеты несамосогласованной задачи нахождения траекторий частиц в заданном магнитном поле. В данной работе для нахождения траекторий частиц в "остройной" геометрии магнитного поля был фактически использован метод пробных частиц.

Метод пробных (тестовых) частиц является очень полезным и гибким инструментом для исследования динамики заряженных частиц в заданном внешнем магнитном поле (в данном случае в ловушке). Сформированное для каждого варианта диода распределение "средних" частиц можно использовать в расчетах с различными конфигурациями аксиальносимметричной ловушки - при различной ширине ловушки, различной форме и асимметрии ее боковых поверхностей (включая асимметричность расположения этих поверхностей относительно центра области инжекции). Внутри ловушки могут располагаться области с различными свойствами (отражение, прозрачность, поглощение и т.д.). В рамках моделирования инжекции частиц из диода в ловушку была проведена серия расчетов, в которых на оси системы ($r=0$) в различных положениях по z располагался небольшой шарик. Этот шарик считался либо полностью поглощающим (частица, попавшая внутрь него, выбывала из расчета), либо прозрачным (в этом случае только фиксировалось попадание частицы внутрь шарика, а расчет ее траектории продолжался). Результаты этих расчетов в данной статье не приводятся.

В методе пробных частиц имеется возможность независимого вычисления траектории любой частицы. Поэтому в отдельном расчете можно проводить

интегрирование уравнений движения не всей совокупности исходных частиц, а только ее части или набора отдельных частиц, представляющих интерес по той или иной причине.

В данной работе сначала проводился расчет всей совокупности "средних" частиц до вылета последней частицы из ловушки в момент времени τ_{out} и для каждой частицы подсчитывалось число "отражений" (N_{Ref}^P). После этого проводился ряд расчетов по интегрированию траекторий, интересующих нас частиц (например, имеющих большое число "отражений"). Частица считалась "отраженной" если изменялся знак компоненты скорости или v_r ("отражение" от оси) или v_z ("горизонтальное отражение"). Одновременное изменение знака компонент v_r и v_z считалось за одно "отражение". Среднее число "отражений" на одну частицу N_{Ref} вычислялось по формуле

$$N_{Ref} = \frac{\sum_{p=1}^{N_A} N_{Ref}^P}{N_A} .$$

На самом деле в трехмерном пространстве "отражение" от оси сводится к пролету частицы по дуге. На рис. 4 в плоскости $r-\theta$

схематически показаны две траектории "пролетных" частиц: 1 - с одним "отражением", а на самом деле без отражений; 2 - с тремя "отражениями" (фактически с одним).

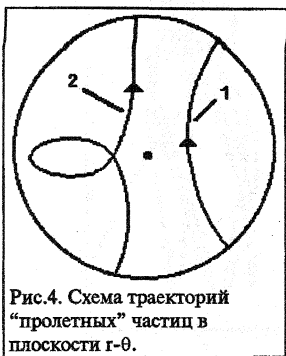


Рис.4. Схема траекторий "пролетных" частиц в плоскости $r-\theta$.

Ниже приводятся результаты расчетов только ловушки без включения внутренних областей и с "симметрично" расположенными прямыми боковыми поверхностями (рис. 1). При этом каждому распределению "средних" частиц однозначно соответствуют значения некоторых величин численного расчета ловушки, представленные в таблице 4: τ_{out} , N_{Ref} , NI_1 , NI_2 , NI_R , - доли частиц (относительно N_A), покинувших ловушку соответственно через левую ($z=0$), правую ($z=L$) и верхнюю ($r=R_1$) границы.

В вариантах расчетов D1 и D2 частицы практически не задерживались в ловушке. За время пролета области ($\tau=6+9$) в области расчета оставалось не более 20% частиц в варианте D1 и не более 50% частиц в варианте D2. Большая часть частиц вылетела через боковые стенки. Траектории некоторых частиц (D1) показаны на рис. 5.

Как указывалось выше, параметры расчета варианта D1 соответствовали варианту V4 численного моделирования полной области. Естественно, траектории частиц варианта D1 во многом похожи на траектории варианта V4 (Рис. 3) за

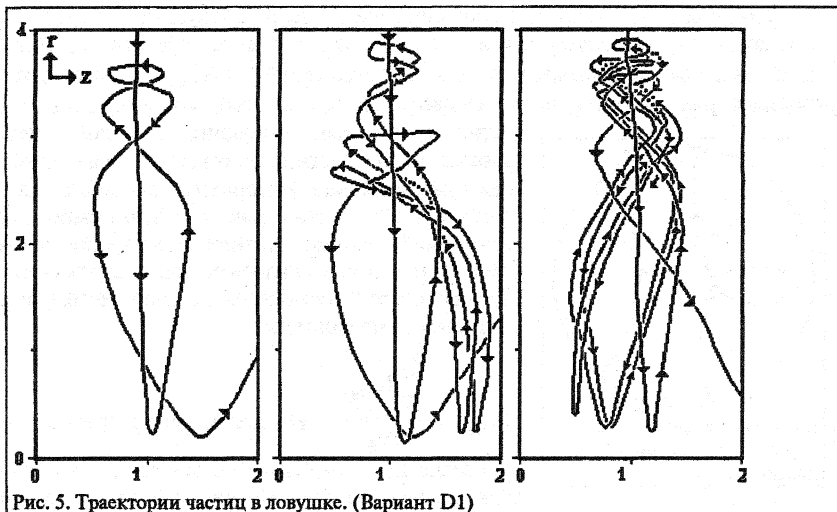


Рис. 5. Траектории частиц в ловушке. (Вариант D1)

исключением двух моментов: расчет траектории заканчивался когда частица попадала в область диода; расчет траектории частицы проводился до конца (т.е. до ее вылета из ловушки). В варианте D1 наблюдались траектории частиц похожие на траектории в области ловушки рис. 3. В первую очередь это касается “пролетных” частиц, вылетевших через боковые границы (левая часть рис. 3). Траектории трех частиц варианта расчета D1 показаны на рис. 5. Для этих частиц характерно наличие отражений от верхней магнитной пробки острой геометрии магнитного поля. Две правые траектории соответствуют частицам с большим числом отражений. Эти частицы находились в ловушке длительное время. Для расчета таких траекторий в полной постановке задачи (диод + ловушка) потребовались бы непомерно большие затраты компьютерного времени.

В варианте D3 основная часть частиц покинула ловушку через “верхнюю” границу. На рис. 6 показаны типичные траектории частиц, пересекающих верхнюю границу ловушки. В верхней части этого рисунка показаны траектории для которых характерно “возвратное” движение: после одного (две левых траектории) или двух (правая траектория) “боковых” отражений частицы практически следуют по своему предыдущему пути в обратном направлении.

Более сложные траектории показаны в нижней части рис. 6. Здесь наблюдаются многократные “боковые” отражения, отражения от верхней магнитной пробки, участки возвратного (или почти возвратного) движения. Несмотря на ряд отражений от верхней пробки (две левые траектории) в конечном счете частица приобретает достаточно малый pitch-угол (угол между скоростью частицы и направлением магнитного поля) чтобы ускользнуть из ловушки через верхнюю границу

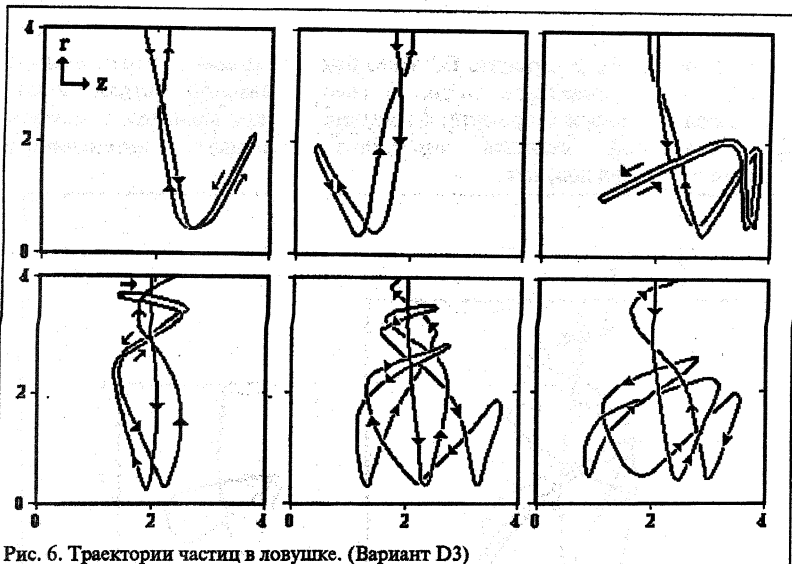


Рис. 6. Траектории частиц в ловушке. (Вариант D3)

Траектории частиц, покинувших область ловушки через боковые границы, представлены на рис.7. В правой части этого рисунка показаны (в верхней части) 5 траекторий частиц с относительно малым числом столкновений. Частицы, соответствующие этим траекториям, после нескольких “боковых” отражений уходят через левую или правую границы ловушки. Нижняя траектория из этой серии соответствует частице, которая после отражения от верхней пробки уходит через левую границу. В левой части рис.7 в увеличенном масштабе показаны две траектории частиц с достаточно большим (особенно нижняя) числом отражений. Здесь наблюдается довольно сложная картина движения частиц до их вылета из области ловушки. Тем не менее большая часть “усредненных” частиц покидает ловушку за значительно меньшее время по сравнению с этими отдельными (довольно редким) частицами.

7. Заключение.

Подводя итоги, можно сказать, что рассматриваемая модель удовлетворительно (по крайней мере качественно) описывает поведение частиц в рассматриваемом устройстве (т.е. ловушке открытого типа). Основным результатом численного решения полной задачи является определение времени выхода на “стационарный” режим ($\tau=3+6$). Это позволило при раздельном решении задачи считать что “стационар” достигается при $\tau \geq 6$ и начинать набор статистики с этого времени. Заметим, что результаты расчетов подтвердили это предположение.

На основании расчета движения частиц в ловушке можно сделать вывод, что направленный характер движения частиц (пучка) особенно ярко проявляется при расчетах варианта D3 (узко направленное распределение частиц). При этом основная масса частиц покидает ловушку за счет простого пролета ловушки за время $\tau \approx 10$ (траектория 1 на рис.4) или на втором пролете за время $\tau \approx 16.5$

(траектория 2 на рис 4). В варианте D3 через боковые границы уходит меньше 20% частиц. Такое поведение частиц в рассматриваемой модели можно объяснить довольно грубой (упрощенной) математической моделью, основным недостатком которой является отсутствие механизма интенсивного перемешивания частиц в ловушке.

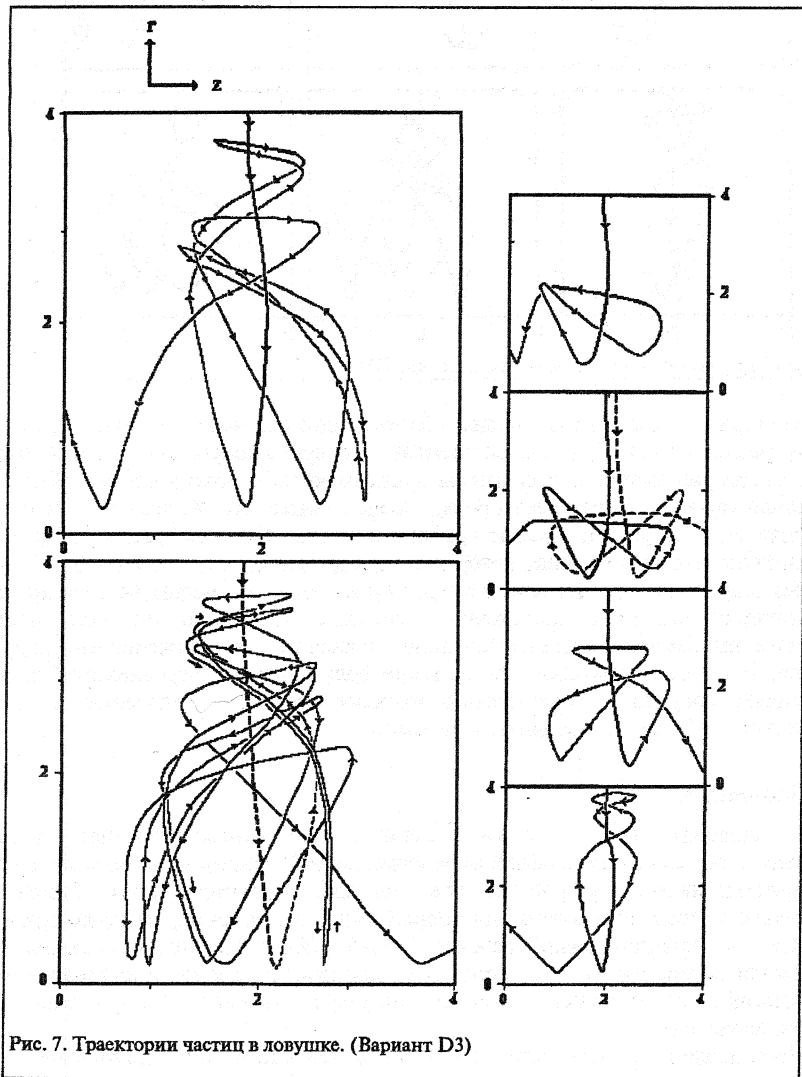


Рис. 7. Траектории частиц в ловушке. (Вариант D3)

Следствием этого является малое время удержания основной массы частиц в ловушке. Для отдельных частиц эти времена составляют $\tau=6+9$, что значительно меньше экспериментальных значений.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 96-01-01171а.

Литература.

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. - М.: Энергоатомиздат, 1989. 452с.
2. Березин Ю.А., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. - Новосибирск: Наука СО, 1993. 357с.
3. Boris J.P. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. // *Proceedings, Fourth conference on Numerical Simulation of Plasmas/Edited by J.P.Boris, R.Shanny - Washington, D.C.,USA: U.S. Government Printing Office, 1970. P. 3-67.*
4. Buneman O. Time reversible difference procedures// *J.Comput. Phys. 1967. Vol. 1, N4. P.517-535.*
5. Ленгдон А., Лазински Б. Электромагнитные и релятивистские вычислительные модели плазмы // *Управляемый термоядерный синтез. - М.: Мир, 1980, с. 347-394.*
6. Филиппычев Д.С. Расчет магнитных полей в ловушках открытого типа // *Библиотека программ для решения краевых задач разностными методами. - М.: Изд-во Моск. ун-та., 1983, с. 111-116.*
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973. 504 с.
8. Хокни Р. Методы расчета потенциала и их приложения. // *Вычислительные методы в физике плазмы. - М.: Мир, 1974. с. 143-212.*
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. 656 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. 623 с.