

Раздел I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Филиппычев Д.С.

Гибридное моделирование плазмы космического пространства: модели с представлением электронов в виде безмассовой жидкости.

2. Медленные и промежуточные ударные волны.

1. Введение.

В ряде задач физики плазмы при исследовании процессов, протекающих на определенных пространственных и временных масштабах, отсутствует необходимость рассматривать явления, происходящие на более коротких или более длинных масштабах по пространству и времени. В этом случае при численном моделировании разумно использовать гибридные коды - коды, в которых для различных компонент плазмы применяются различные модели среды. Довольно общий тип гибридных кодов, в которых электроны рассматриваются как безмассовая жидкость, а ионы описываются набором частиц конечного размера, широко используются при изучении бесстолкновительных ударных волн, пинчей, плазменного фокуса и т.д.

Обширной областью приложения численного гибридного моделирования (ионы-частицы, электроны-безмассовая жидкость) являются задачи физики космического пространства. Это связано с рядом обстоятельств. Во многих областях космического пространства имеется сильно разреженная замагниченная плазма. Длина пробега частиц на много больше характерных размеров тел. Многие плазменные процессы протекают на ионных масштабах длины и времени. Имеются многочисленные данные наблюдений показывающие наличие колебаний с частотами порядка ионной гирочастоты и на частотах значительно меньших. За последние 15 лет были проведены многочисленные численные расчеты с использованием гибридных кодов для моделирования задач космического пространства. Результаты этих исследований составляют обширную литературу. В настоящей статье, которая является продолжением работы [1], дается обзор работ по гибриднему (электромагнитному) моделированию физических процессов, протекающих при распространении медленных и промежуточных бесстолкновительных ударных волн.

2. Гибридная модель: электроны безмассовая жидкость; ионы - частицы.

Довольно часто для изучения физических процессов в плазме с магнитным полем можно применять кинетическое описание (кинетические уравнения или метод частиц) только для ионной компоненты, а электроны рассматривать как жидкость (газодинамическая модель). В этих моделях плазма считается квазинейтральной и в уравнениях Максвелла пренебрегается током смещения (приближение Дарвина [2]). В рамках этого приближения движение частиц плазмы должно быть нерелятивистским. Условие квазинейтральности предполагает, что электронная плотность почти равна ионной плотности (обе они обозначаются через n). Для того чтобы проследить эволюцию системы на больших временах и в большой области пространства необходимо полностью устранить динамику быстрых электронов. Это достигается за счет применения гибридных кодов, в которых ионы рассматриваются как частицы, а электроны как безмассовая жидкость ($m=0$). Такие коды используются также для изучения низкочастотных процессов при сохранении самосогласованного описания

резонансного рассеяния волна-частица. В численном моделировании с применением гибридной модели без учета инерции электронов ($m=0$) хорошо воспроизводятся физические процессы, протекающие на ионных масштабах длины (ионная длина инерции; ионный гирорадиус) и времени (обратная гирочастота ионов). При этом из расчетов устраняются плазменная частота и гирочастота электронов.

Общую схему расчета по гибридной модели можно представить в следующем виде:

- определяются электромагнитные поля из уравнений движения электронной компоненты плазмы;
- моделируется динамика ионной компоненты методом частиц и определяются макроскопические характеристики ионов (как моменты их функции распределения);
- решается уравнение для электронной температуры.

Безразмерные переменные. Ниже используются в основном общепринятые обозначения: c - скорость света; m, e - масса и заряд электрона; M, q - масса и заряд иона; нижний индекс "s" обозначает сорт частиц ($s=e$ - электрон, $s=i$ - ион); m_s, q_s - масса и заряд частицы сорта s ($m_e=m, m_i=M; q_e=e, q_i=q$); $\omega_{ps}=(4\pi q_s^2 n_0/m_s)^{1/2}$ - плазменная частота частицы сорта "s"; $\Omega_i=q_i B_0/Mc$ - ионная гирочастота; $\lambda_D=(k_B T_e/4\pi q_e^2 n_0)^{1/2}$ - дебаевская длина электронов (k_B - постоянная Больцмана, T_e - температура электронов). B_0 и n_0 - базовые значения магнитного поля и ионной (=электронной) плотности. $\gamma=C_p/C_v$ - отношение удельных теплоемкостей, как правило, $\gamma=5/3$.

В гибридной модели характерными масштабами являются ионные масштабы длины и времени. Довольно часто при рассмотрении задач плазмы космического пространства расстояния измеряются в единицах ионной длины инерции δ_i , а время в Ω_i^{-1} ($\delta_i=c/\omega_{pi}=V_A/\Omega_i$; другое название для δ_i "бесстолкновительная ионная скин-глубина"; $V_A=B_0/(4\pi n_0 M)^{1/2}$ - альфвеновская скорость). Таким образом, в гибридном моделировании используются основные безразмерные переменные: расстояние $x^{new}=x/\delta_i$ и время $\tau^{new}=t/(\Omega_i^{-1})=\Omega_i t$. Нормализация остальных переменных проводится на основе этих величин: скорость $v^{new}=v/V_A$; электрическое поле $E^{new}=(q/M\Omega_i V_A)E$; $B^{new}=(q/M\Omega_i c)B$; плотность тока $J^{new}=(1/q n_0 V_A)J$ ($J \equiv j$). (Заметим, что $\Omega_i/\omega_{pi}=V_A/c$.) векторный потенциал магнитного поля $A^{new}=(q/Mc V_A)A$; сопротивление (в общем случае - тензор) $\eta^{new}=\alpha_2 \eta$, $\alpha_1=q/MV_A^2$, $\alpha_2=q^2 n_0/M\Omega_i=c\omega_i/4\pi V_A$, $\alpha_3=V_A^2 n_0 M=B_0^2/4\pi$.

Основные уравнения.

В безразмерных переменных основные уравнения записываются в виде (верхний индекс "new" опущен):

$$dv/d\tau = E + v \times B, \quad dx/d\tau = v, \quad (1a)$$

$$0 = -en_c(E + V_c \times B) - \alpha_1 \nabla(n_c T_e) + en_c \eta \cdot J, \quad (1b)$$

$$E = -\alpha_1 \nabla(n_c T_e) / en_c - V_c \times B + \eta \cdot J, \quad (1c)$$

$$\nabla \times B = J_{\perp} \quad (\text{закон Ампера}), \quad (1d)$$

$$\nabla \times E_{\perp} = -\partial B / \partial \tau \quad (\text{закон Фарадея}), \quad (1e)$$

$$(3/2) \partial(n_c T_e) / \partial \tau + (\partial / \partial x) \left((3/2) (n_c T_e) V_{ex} \right) + (n_c T_e) \partial V_{ex} / \partial x = \alpha_3 \eta J^2 \quad (1f)$$

В задачах, связанных с моделированием физических процессов в космическом пространстве, довольно часто электроны рассматриваются в изотермическом или адиабатическом ($p=n^{\gamma}$) приближении. При этом из модели (1) исчезает уравнение энергии (1f). Ниже безразмерные переменные используются при описании схем гибридного моделирования. В остальной части работы применяются размерные величины для записи формул и соотношений.

3. Основные численные алгоритмы гибридного моделирования.

При численной реализации гибридного моделирования вводятся дискретные сетки во времени (Δt ; $\tau^k = k\Delta t$, $k=1, 2, \dots$) и по пространству (с шагами Δx).

Для вычисления траекторий частиц, как правило, используется схема перешагивания (leapfrog). При этом скорости частиц задаются на полцелых шагах по времени, а положения частиц и поля определяются на целых временных шагах (верхний индекс k). На уровне k известны величины $v^{k-1/2}$, x^k , E^k , B^k . Дискретный аналог уравнения (1а) записывается в виде:

$$dv/dt \approx (v^{k+1/2} - v^{k-1/2})/\Delta t = E^k + v^k \times B^k. \quad (2)$$

В магнитном члене (последний член в уравнении (2)) v^k центрируется обычным способом $v^k = (v^{k-1/2} + v^{k+1/2})/2$. После использования обозначений $\delta = \Delta t/2$, $U^- = v^{k-1/2} + \delta E^k$, $U^+ = v^{k+1/2} - \delta E^k$, разностное уравнение (2) переписывается в форме

$$U^+ - U^- = \delta \{ (U^+ + U^-) \times B^k \}, \quad (3)$$

Значения полей E^k и B^k в точке нахождения частицы x^k находятся с использованием функции взвешивания $S(X_j - x^k)$ PIC-метода (см., [3-5]). Например, $E^k = \sum_j S(X_j - x^k) E_j^k$ - индекс узла сетки (в многомерном случае - мультииндекс)

В схеме Бориса (leapfrog Бориса) [6] (см. также [3-5]) движение частицы расщепляется на движение только в электрическом поле и движение только в магнитном поле:

$$U^- = v^{k-1/2} + \delta E^k, \quad (4a)$$

$$U^* = U^- + \delta U^- \times B^k, \quad (4b)$$

$$U^+ = U^* + \delta U^* \times B^k (2\delta / (1 + \delta^2 (B^k \cdot B^k))), \quad (4c)$$

$$v^{k+1/2} = U^+ + \delta E^k. \quad (4d)$$

Используя (4b) и (4c) искомым вектор U^+ можно выписать в явном виде

$$U^+ = \{ (1 - \delta^2 B^2) U^- + 2\delta^2 (B^k \cdot U^-) B^k + 2\delta U^- \times B^k \} / (1 + \delta^2 B^2), \quad B^2 = (B^k \cdot B^k).$$

После нахождения $v^{k+1/2}$ вычисляется новое положение частицы

$$x^{k+1} = x^k + \Delta t v^{k+1/2}. \quad (5)$$

Ионная часть тока вычисляется путем суммирования ионных моментов с использованием функции взвешивания $S(X_j - x^k)$. При этом для получения значения скорости на целочисленном уровне v_i^{k+1} частицы дополнительно продвигаются на временной полшаг $v^{k+1} = v^{k+1/2} + \delta (E^k + v^{k+1/2} \times B^k)$, где E^k и B^k вычисляются в точке x^{k+1} . В результате суммирования получается скорость потока ионов V_i^{k+1} . Ионная плотность n_i^{k+1} вычисляется по координатам частиц x_i^{k+1} также с использованием функции $S(X_j - x^{k+1})$. В одномерном случае (1-D) из условия квазинейтральности получаются значения электронной плотности и скорости ($n_e = n_i = n$, $V_{ex} = V_{ix} = V_x$).

Хотя все численные коды, использующие гибридные модели, обладают подобными свойствами, имеются различия в их численной реализации. В первую очередь это относится к методам решения уравнений поля. В обзоре [7] эти методы разбиваются на 3 группы; метод сопровитвления (закон Ома); метод предиктор-корректора; метод гамилтониана. В данном обзоре рассматриваются работы по численному моделированию задач космической плазмы, в которых преимущественно применяются гибридные коды с использованием первых двух из перечисленных методов.

Метод, использующий закон Ома для вычисления продольной компоненты электрического поля, предложен в работе [8] и в дальнейшем разработан в работах [9, 10] для анализа лабораторных экспериментов по магнитному удержанию плазмы и в работах [11, 12] для изучения головной ударной волны вблизи магнитосферы земли.

Электронная часть тока вычисляется из уравнения электронного момента с резистивным членом (1с) (т.е. используется закон Ома). Поперечные компоненты (y или z) векторного потенциала \mathbf{A} находятся из закона Ампера (1d)

$$\nabla^2(\mathbf{A}_\perp)^{k+1} = -(\mathbf{J}_\perp)^{k+1}. \quad (6)$$

Поперечные компоненты поля получаются обычным путем

$$\mathbf{V}_\perp = \nabla \times \mathbf{A}_\perp, (\mathbf{V}_x = \text{const.}); \mathbf{E}_\perp = -\partial \mathbf{A}_\perp / \partial t. \quad (7)$$

После решения уравнения энергии для T (1f) вычисляется последняя компонента поля (E_x) из уравнения (1с) для x компоненты $E_x = -(\alpha_1/en) \partial(nT_e)/\partial x - (\mathbf{V}_x \times \mathbf{B})_x$.

В области моделирования космической плазмы, вычисления, базирующиеся на описаном методе, первоначально были проведены для изучения косых ударных волн [13], электромагнитной неустойчивости ионного пучка [14], взаимодействия тяжелых ионов с солнечным ветром [15-17]. Метод был обобщен на двумерные задачи [18] и был применен для моделирования лабораторных экспериментов [19,20] по пересоединению магнитных силовых линий. Трехмерный линеаризованный гибридный код [21] применялся для исследования ионных колец с обращенным полем.

Метод предиктор-корректор. Предиктор-корректорная схема для гибридного моделирования была предложена в работе [22] и использовалась в одномерных кодах [23,24] для моделирования разогрева тяжелых ионов при развитии циклотронной неустойчивости. Метод был обобщен на двумерную геометрию [25] и использовался для изучения вращательных неустойчивостей в конфигурациях с обращенным полем (field-reversed configuration: FRG) [26].

Простейшая форма предиктор-корректорного метода для случая постоянной температуры электронов (T_e) и $\eta=0$ описана в работе [7]. Вычисления на каждом временном шаге включают два этапа: предиктор и корректор.

На предикторном шаге по формулам (4),(5) вычисляются $\mathbf{v}^{k+1/2}$ и \mathbf{x}^{k+1} . Однако, в этом случае сначала получается положение частицы в полувесь момент времени $\mathbf{x}^{k+1/2} = \mathbf{x}^k + (\Delta t/2)\mathbf{v}_x^{k+1/2}$, которое требуется для суммирования ионных моментов $\mathbf{J}_i^{k+1/2}$ и плотности $n_i^{k+1/2}$. Используя закон Фарадея (1е) и уравнение (1с), записанные в дискретной форме

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{k+1/2} &= \mathbf{B}^k - (\Delta t/2)\nabla \times \mathbf{E}^k, \\ \mathbf{E}^{k+1/2} &= (1/(en_i^{k+1/2})) \{ qn_0(\nabla \times \mathbf{B}^{k+1/2} - \mathbf{J}_i^{k+1/2}) \times \mathbf{B}^{k+1/2} - \alpha_1 T_e \nabla n_i^{k+1/2} \}, \end{aligned} \quad (8)$$

вычисляются предварительные значения полей, которые обозначим нижним индексом P

$$\mathbf{E}_P^{k+1} = -\mathbf{E}^k + 2\mathbf{E}^{k+1/2}, \quad \mathbf{B}_P^{k+1} = \mathbf{B}^k - (\Delta t/2)\nabla \times \mathbf{E}^{k+1}. \quad (9)$$

Далее проводятся вычисления $\mathbf{v}^{k+3/2}$ и $\mathbf{x}^{k+3/2}$ для получения $\mathbf{J}_{i,P}^{k+3/2}$ и плотности $n_{i,P}^{k+3/2}$.

После этого, из (8) со значениями полей \mathbf{E}_P^{k+1} и \mathbf{B}_P^{k+1} , определяются значения $\mathbf{E}_P^{k+3/2}$ и $\mathbf{B}_P^{k+3/2}$. Значения полей на временном слое $k+1$ получаются по формулам

$$\mathbf{E}^{k+1} = (\mathbf{E}_P^{k+1/2} + \mathbf{E}_P^{k+3/2})/2, \quad \mathbf{B}^{k+1} = \mathbf{B}^{k+1/2} - (\Delta t/2)\nabla \times \mathbf{E}^{k+1}.$$

Детальное описание гибридных кодов, наиболее часто используемых для моделирования космической плазмы и в первую очередь для численного исследования бесстолкновительных ударных волн, приведено в работах [7, 27-29]. "Популярное" изложение основ численного моделирования задач, связанных с кинетическим поведением космической плазмы, представлено в статье [30]. Материал этой работы предназначен для читателей, не имеющих достаточного опыта в области численного моделирования. На примерах расчета бесстолкновительных ударных волн иллюстрируется методология и применение описанных методов.

4. Некоторые понятия и определения.

Магнитосфера Земли. В исследованиях космической плазмы (в том числе и численным моделировании) наибольшее внимание уделяется магнитосфере Земли, что связано с наличием большого числа данных, полученных как с помощью наблюдений с Земли, так и с помощью всевозможных космических аппаратов. Солнце генерирует плазму - солнечный ветер (основной компонент водород, несколько процентов гелия), который распространяется за пределы Солнца. Солнечный ветер является высокоскоростным (400км/с) высоко-проводящим потоком радиально истекающей разреженной (концентрация 5 см^{-3}) солнечной плазмы. В результате того, что солнечный ветер сильно отклоняется под воздействием геомагнитного поля, вокруг Земли образуется обширная магнитная полость в форме кометы, называемая магнитосферой. Однако при этом происходит передача импульса, так как солнечный ветер "сдувает" геомагнитное поле, вытягивая его в виде огромного цилиндрического магнитного хвоста (геомагнитный хвост) на миллионы километров в межпланетное пространство.

Внешняя граница магнитосферы, носящая название магнитопаузы, представляет собой токовый слой, в котором динамическое давление солнечного ветра (ρv^2 , где ρ -плотность) уравнивает магнитное давление дипольного поля Земли ($B^2/8\pi$). На расстоянии около $5R_E$ (R_E - радиус Земли; в магнитосферных исследованиях обычно используется значение $R_E=6370\text{км}$) от магнитосферы в направлении к Солнцу в потоке солнечного ветра находится стоячая головная ударная волна (ГУВ). Она обусловлена тем, что скорость солнечного ветра превышает скорость, с которой движутся в направлении Солнца волны сжатия, отклоняющие солнечный ветер вокруг магнитосферы.

Основные структуры магнитного поля, связанные с магнитосферой, - это головная ударная волна (ГУВ), переходной слой (или магнитослой), магнитопауза и геомагнитный хвост. Переходной слой (магнитослой) - это область сжатой и нагретой плазмы солнечного ветра, отделяющая головную ударную волну от магнитосферы. Геомагнитный хвост - это область на ночной стороне магнитосферы, где дипольное поле Земли вытянуто в направлении от Солнца в виде длинного цилиндрического хвоста диаметром $40R_E$ и длиной более $1000R_E$. Он состоит из двух противоположно направленных пучков магнитного потока (называемых долями геомагнитного хвоста), разделенных токовым слоем, который носит название нейтрального слоя.

Некоторые обозначения.

Размерность рассматриваемой задачи определяется размерностью конфигурационного пространства и обозначается с использованием символа D . Например, 1-D обозначает одномерную модель, в которой используется только одна пространственная переменная. При этом для векторных величин (скорости частиц, электрическое и магнитное поля) могут учитываться все три компоненты.

При гибридном моделировании дискретные шаги по времени и пространству составляют, как правило, доли соответствующих масштабов. Например, довольно часто используются следующие значения: $\Delta t=0.05$, $\Delta x=0.5$ ($\Delta t=0.05\Omega_i^{-1}$, $\Delta x=0.5\delta_i$).

5. МГД модели для описания низкочастотных волн в плазме.

Одним из наиболее важных объектов изучения физических процессов в космической плазме являются низкочастотные волны с частотами ниже или равными протонной гирочастоте ($\omega \leq \Omega_p$). В теории плазмы имеется несколько уровней описания

таких волн в бесконечной однородной среде. Самым простым гидродинамическим (газодинамическим) описанием бесстолкновительной плазмы является теория идеальной магнитной гидродинамики (ИМГД). Решениями линеаризованных уравнений этого приближения являются хорошо известные МГД волны, которые (за некоторым исключением) являются так же низкочастотным пределом ($\omega \rightarrow 0$) линеаризованных уравнений двух-жидкостной теории, содержащей в своей общей форме эффекты инерции как электронов, так и ионов. Всестороннее рассмотрение поведения мод в плазме с малыми значениями β было проведено в [31]. В работе [32] проведено обобщение этих результатов до средних и больших значений β . При таком рассмотрении внимание концентрируется на волнах, фазовая скорость которых мала по сравнению со скоростью света (приближение Дарвина [2]). При исключении из рассмотрения энергии электронов ($m=0$) упрощенные уравнения двух-жидкостной теории становятся идентичными уравнениям идеальной МГД, за исключением закона Ома, в который оказывается включенным холловский член. По этим причинам, такая теория получила название "холловская МГД" (ХМГД). Более общие гидродинамические (газодинамические; fluid) модели могут быть получены из моментных уравнений бесстолкновительной плазмы совместно с допущениями, позволяющими замкнуть систему (см., например, [33-35]). Эти теории включают в себя некоторые кинетические-эффекты, а именно, сохраняются члены, описывающие эффекты конечного ларморовского радиуса и анизотропию температуры. Однако, такие теории оказываются не совсем справедливыми в низкочастотном пределе и ограничены описанием плазмы с малыми значениями β . Их пригодность оказывается спорной за счет используемой процедуры замыкания. Например, свойства мод, определяемые внедиагональными элементами тензора давлений (натяжений) или моментов более высокого порядка, не принимаются в расчет при обычно используемых условиях замыкания. Корректное и полное описание бесстолкновительной плазмы дается системой уравнений Власова-Максвелла, которую часто называют просто кинетической теорией (см., например, [36, 37]). Довольно полное описание низкочастотных волн в кинетической теории приведено в [38]. Эта работа была частично расширена до больших значений β [39].

Составляющая электрического поля $E_{\text{Hall}} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) / (c n_e e)$ перпендикулярна как к току, так и к магнитному полю. Она часто возникает в плазме автоматически вследствие небольшого разделения зарядов в рамках наложения условия квазинейтральности. Холловская магнитогидродинамика (ХМГД) является МГД обычного типа с добавлением холловского поля E_{Hall} в закон Ома. В приближении безмассовой жидкости скорость центра масс становится $\mathbf{V} = \mathbf{V}_i$ и простейший вариант уравнений резистивной несжимаемой ХМГД (РХМГД) можно записать в виде (в этом и в следующем разделе используются размерные переменные):

$$\partial(\rho)/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (10a)$$

$$\rho(\partial/\partial t + \mathbf{V} \nabla \cdot) \mathbf{V} + \nabla \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{B}^2/8\pi) = 0, \quad (10b)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -c \nabla \times \mathbf{E}, \quad (10c)$$

$$\mathbf{j} = c \nabla \times \mathbf{B} / 4\pi, \quad (10d)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla(p)/en_e - (\mathbf{V}_e \times \mathbf{B})/c + \eta \cdot \mathbf{j} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})/en_e c, \quad (10e)$$

$\rho = M\mathbf{V}$ - массовая плотность, $p = nk_B T$ - давление, где T температура $T = T_e + T_i$, \mathbf{j} - плотность электрического тока. Система уравнений (10) без учета конечного сопротивления ($\eta = 0$; ХМГД) использовалась в работе [40] для изучения физики, связанной с холловским членом. В этой работе приведен так же краткий обзор

исследований по приложению теории ХМГД к задачам космической и лабораторной плазмы.

При отсутствии холловского поля E_{Hall} в правой части обобщенного закона Ома (10e) для системы уравнений (10), а также подобных систем, используется название “резистивная МГД” (РМГД). Термин “идеальная МГД” (ИМГД) применяется в случае КОГДА в системе помимо пренебрежения членом E_{Hall} полагается и отсутствие конечного сопротивления ($\eta=0$). В итоге получается хорошо известное выражение закона Ома ИМГД: $\mathbf{E} = -(\mathbf{V}_e \times \mathbf{B})/c$.

При подстановке (10e) в (10c) закона Фарадея принимает следующий вид

$$\partial(\mathbf{B})/\partial t = \nabla \times (\mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \mathbf{j} - \nabla \times ((\mathbf{j} \times \mathbf{B})/en_e).$$

Последний член этого выражения - холловский член - может быть представлен в виде: $\nabla \times ((\mathbf{j} \times \mathbf{B})/en_e) = -(\nabla n_e) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})/(en_e^2) + (\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}))/en_e$. В плоской геометрии холловское поле влияет на динамику плазмы и поля в поперечном к окружающему магнитному полю направлении только в случае неоднородной плазмы, поскольку $\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = 0$. При включении в рассмотрение динамики параллельного поля оказывается $\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \neq 0$ и холловское поле приводит к вистлерным модам. В цилиндрической геометрии холловское поле может оказаться важным и для однородной плазмы, поскольку в этом случае $\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \neq 0$.

В работе [41] двумерный (2-D) РХМГД код использовался для изучения спонтанного пересоединения магнитных силовых линий. Рассматривалась система уравнений сжимаемой РХМГД (в системе единиц СИ):

$$\begin{aligned} \partial(\rho)/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \partial(\rho \mathbf{V})/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - B^2/2)\mathbf{I})/\mu_0 &= 0, \\ \partial(U)/\partial t + \nabla \cdot (\mathbf{S}) &= 0, \\ \partial(\mathbf{B})/\partial t + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0, \\ \mathbf{E} &= -(\mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \eta \nabla \times \mathbf{j} + h_c (\mathbf{j} \times \mathbf{B})/\rho, \\ U &= \rho V^2/2 + p/(\gamma - 1) + B^2/2\mu_0, \\ \mathbf{S} &= (\rho V^2/2 + p/(\gamma - 1))\mathbf{V} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0. \end{aligned}$$

μ_0 - магнитная восприимчивость вакуума, \mathbf{I} - единичный тензор,

h_c - коэффициент Холла. Численное моделирование показало, что в процессе спонтанного пересоединения участвуют сильные промежуточные ударные волны (типа 2 \rightarrow 4; см. ниже), а не медленные ударные волны как это следует из МГД теории.

6. Разрывы в МГД теории.

В идеальной МГД среда полностью описывается давлением p , плотностью ρ , скоростью \mathbf{V} , отношением удельных теплоемкостей γ и магнитным полем \mathbf{B} . В гидродинамике (газодинамике) существует три типа разрывов [37]: ударные волны (УВ), тангенциальные разрывы (TD - Tangential Discontinuity) и контактные разрывы (CD - Contact Discontinuity). Ниже рассматривается система координат, движущаяся с поверхностью разрыва. Ось x направлена по нормали к этой поверхности. В ударных волнах на поверхности разрыва отличны от нуля скачки давления p , плотности ρ , плотности энтропии s и нормальной компоненты скорости V_x . Тангенциальная же компонента скорости V_{\perp} (т.е. компонента лежащая в плоскости разрыва) остается непрерывной. В тангенциальных разрывах скачок испытывает только тангенциальная компонента скорости, а в контактных разрывах плотность и плотность энтропии.

Определения и обозначения. Введем на примере ударных волн (УВ) некоторые определения и обозначения, которые используются также и для разрывов других типов. Фронт ударной волны разделяет пространство на две части: область вверх по потоку (ОВВП) (или область набегающего потока) и область вниз по потоку (ОВНП). Основными параметрами, определяющими структуру и свойства УВ являются: M - число Маха, $\beta_e = n_e k_B T_e / (B^2 / 8\pi)$ - отношение локальных значений давления соответствующей компоненты плазмы (например, $s=e$ - электроны, $s=i$ - ионы) и магнитного поля; $\theta_{Вн}$ - угол между магнитным полем и нормалью УВ (угол ударной нормали). Все эти величины относятся, как правило, к области набегающего потока (ОВВП). Ниже, как принято в литературе, нижним индексом "1" будут обозначаться величины в ОВВП, а индексом "2" - в ОВНП.

В газодинамике нейтрального газа число Маха определяется соотношением $M \equiv V/V_s$, где V - скорость потока газа, а V_s - скорость звука. В магнитоактивной плазме (при теоретических исследованиях) рассматривают различные числа Маха, являющиеся отношениями скорости потока к соответствующим характерным скоростям; например, альфвеновское число Маха (или число Альфвена-Маха) $M_A \equiv V/V_A$. В дальнейшем при употреблении термина "число Маха" подразумевается "число Альфвена-Маха" M_A . Ударные волны с числами Маха больше 3-х называются ударными волнами с большими числами Маха или сверхкритическими УВ.

В зависимости от взаимного расположения нормали УВ и вектора магнитного поля ОВВП ударные волны называются параллельными ($\theta_{Вн}=0^\circ$), перпендикулярными ($\theta_{Вн}=90^\circ$) и косыми ($\theta_{Вн} \neq 0^\circ, 90^\circ$). Косые (наклонные) УВ-ы можно в свою очередь разделить на быстрые, медленные и промежуточные моды. Однако, обычно рассматривают либо квазиперпендикулярную (КПЕУВ: $\theta_{Вн} \geq 45^\circ$) либо квазипараллельную (КПАУВ: $\theta_{Вн} \leq 45^\circ$) ударные волны. При этом термин "косая" ("наклонная") УВ-а употребляется в ситуации когда рассматриваемые углы ударной нормали попадают в области как КПАУВ так и КПЕУВ (например, $40^\circ \leq \theta_{Вн} \leq 60^\circ$) или в случае $\theta_{Вн}=45^\circ$. Основные сведения о бесстолкновительных ударных волнах можно найти в обзорных работах [42-47].

МГД разрывы. Гидродинамическим и МГД УВ (а также другим разрывам) посвящена обширная литература (см., например, [37, 45, 48,49]). Эти разрывы представлены в таблице 1, в которой символ " $\neq 0$ " обозначает наличие скачка, а знак "0" непрерывность соответствующей магнитогидродинамической величины при переходе через поверхность разрыва. Для величины скачка величины A принято стандартное обозначение $[A]=A_2-A_1$.

Таблица 1.

Разрыв	[p]	[ρ]	[s]	[V_x]	[V_{\perp}]	[B_{\perp}]
Гидродинамика						
УВ	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	0	--
TD	0	0	0	0	$\neq 0$	--
CD	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	--
МГД						
УВ	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
RD	0	0	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
CD	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	0
($B_x=0$)	0	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
TD						

В магнитогидродинамике в общем случае (когда $B \neq 0$) существуют следующие типы разрывов [37]:

- ударные волны (УВ), для которых отличны от нуля скачки всех магнитогидродинамических величин;
- альфвеновские (вращательные: RD Rotational Discontinuity) разрывы, на которых испытывают скачки тангенциальные компоненты скорости и магнитного поля;
- контактные разрывы (CD), на которых испытывают скачки плотности и энтропии.

В случае когда магнитное поле лежит в плоскости разрыва ($B_x=0$) скачок испытывают тангенциальные компоненты скорости и магнитного поля. Такой разрыв по аналогии с газодинамикой называется тангенциальным разрывом (ТД).

Условия скачка на поверхности разрыва. При переходе через поверхность разрыва сохраняются потоки массы, импульса и энергии, что приводит к известным соотношениям Ренкина-Гюгонно (Р-Г), которые можно записать в следующем виде [50]:

$$[\rho V_x]=0, \quad (11a)$$

$$[\rho V_x^2 + p + B_{\perp}^2/8\pi]=0, \quad (11b)$$

$$[\rho V_x V_{\perp} - B_x B_{\perp}/4\pi]=0, \quad (11c)$$

$$[\rho V_x (V^2/2 + w) + (1/4\pi)(V_x B^2 - B_x(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}))]=0, \quad (11d)$$

$$[B_x]=0, \quad (11e)$$

$$-[\mathbf{E}_{\perp}] = [(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_{\perp}] = [B_x V_{\perp} - V_x B_{\perp}] = 0. \quad (11f)$$

Здесь $(1/4\pi)(V_x B^2 - B_x(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})) = (c/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x$, где $\mathbf{E} = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B})/c$; $V^2 = V_x^2 + V_{\perp}^2$; $w = (\gamma/\gamma - 1)p/\rho$ - энтальпия (идеального) газа $w = \varepsilon + p/\rho$, ε - внутренняя энергия. Соотношения (11e) и (11f) следуют из условия непрерывности на поверхности разрыва нормальной составляющей магнитного поля (11e) и тангенциальной составляющей электрического поля \mathbf{E}_{\perp} (11f). Следует отметить, что в соотношении (11b) уже использовано условие (11e). В литературе уравнение сохранения импульса на разрыве (11b), как правило, вводится до наложения условия непрерывности B_x (11e). При этом в формуле $[B_{\perp}^2]$ заменяется на $[B_{\perp}^2 - B_x^2]$, что с учетом (11e) эквивалентно записи в (11b).

Нераспространяющиеся разрывы. Этот тип разрывов характеризуется тем, что движение вещества происходит только параллельно поверхности разрыва ($\rho V_x = 0$). Поскольку $\rho \neq 0$, то отсюда следует, что $V_{x2} = V_{x1} = 0$ и соотношения Р-Г значительно упрощаются

$$[p + B_{\perp}^2/8\pi] = 0, \quad (12b)$$

$$B_x [B_{\perp}] = 0, \quad (12c)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} \times [\mathbf{B}_{\perp}] = 0, \quad (12d)$$

$$B_x [\mathbf{V}_{\perp}] = 0. \quad (12f)$$

Соотношение (12d) выполняется тривиально. Уравнения (12) описывают энтропийные разрывы. При $B_x \neq 0$, из (12) следует, что непрерывными должны быть магнитное поле, скорость и давление. Разрыв испытывают плотность, энтропия и температура. Такой разрыв называется контактным и представляет собой границу раздела между двумя неподвижными средами, имеющими разную плотность при одинаковом давлении.

Когда магнитное поле лежит в плоскости разрыва ($B_x = 0$), уравнения (12c, f) удовлетворяются тождественно. Скачок испытывают плотность и тангенциальные

компоненты скорости и магнитного поля. Этот тип разрыва по аналогии с гидродинамикой называется тангенциальным.

Система координат Гоффмана–Теллера [51].

Условия Р-Г (11) записаны в системе покоя разрыва, т.е. рассматриваемая система координат фиксируется лишь своей скоростью вдоль нормали к поверхности разрыва. При этом к вектору V_{\perp} может быть добавлен произвольный постоянный вектор. При $V_x \neq 0$ существует система отсчета, в которой векторы V и B параллельны по обе стороны разрыва. Такая система отсчета введена в работе [51] и в литературе для нее часто используется название “система координат Гоффмана-Теллера” (Г-Т). Переход из системы покоя разрыва в систему отсчета Г-Т проведем согласно работе [52]. Введем три единичных вектора \hat{v} , \hat{n} , и \hat{b} . \hat{v} направлен в ОВВП вдоль скорости набегающего потока V ($V = -V\hat{v}$). \hat{n} направлен вдоль ударной нормали, а \hat{b} вдоль магнитного поля в ОВВП B_{\perp} . Скорость набегающего потока представляется в виде суммы двух векторов [51]: $V_{||} = -V_{||}\hat{b}$ и V_{HT} , параллельного плоскости разрыва, $V = -V_{||}\hat{b} + V_{HT}$. Используя скалярное произведение этого представления на \hat{n} и соотношения $V_{HT} \cdot \hat{n} = 0$, $\hat{v} \cdot \hat{n} = \cos\theta_{v_n}$, можно получить $V_{||} = V \cos\theta_{v_n} / \cos\theta_{B_n}$. После этого находится вектор скорости Г-Т

$$V_{HT} = V(-\hat{v} + \hat{b}(\cos\theta_{v_n}/\cos\theta_{B_n})) = \hat{n} \times (V \times B) / (B \cdot \hat{n}).$$

Система отсчета Гоффмана-Теллера (Г-Т) обладает следующими свойствами [52]:

1. В этой системе исчезает динамическое электрическое поле $-(V \times B)/c$.
2. Разрыв находится в покое.
3. Из свойства 1 следует, что $\partial B / \partial t = 0$, так что индуцированное электрическое поле отсутствует.
4. Из свойств 1-3 следует, что при добавлении на самом разрыве любого потенциала сохраняется энергия.
5. Скорость V_{HT} одна и та же в ОВВП и в ОВНП, поскольку из условий скачка для уравнений Максвелла следует непрерывность нормальной компоненты B ($B \cdot \hat{n}$) (11e) и тангенциальной компоненты E ($\hat{n} \times (-V \times B)/c$) (11f).
6. Векторы \hat{v} , \hat{n} , и $V_{||}$ копланарны как в ОВВП, так и в ОВНП. Причем плоскость копланарности одна и та же для обеих областей. За счет этого устраняется третье измерение при решении задач.
7. Система отсчета Г-Т существует только если θ_{B_n} не слишком близок к 90° [53].

Из свойства 1 следует, что в системе отсчета Г-Т условие (11d) сильно упрощается

$$V^2/2 + w = 0. \tag{13}$$

Вращательные разрывы. Рассмотрим сначала случай когда поток вещества через поверхность разрыва отличен от нуля ($\rho V_x \neq 0$), но скачок плотности отсутствует [$\rho = 0$, т.е. $\rho_2 = \rho_1 = \rho$]. Тогда из (11a) следует, что и $V_{x2} = V_{x1} = V_x$. Скорость распространения таких разрывов находится из условий (11c) и (11d). При $V_x \neq 0$ скорость распространения разрыва равна альфвеновской (нормальной) скорости $V_x = -B_x / (4\pi\rho)^{1/2}$ [37]. Поэтому разрывы такого типа называются альфвеновскими. После подстановки V_x в (11c) получается, что скачок тангенциальной компоненты скорости потока равен альфвеновской скорости

$([V_{\perp}] = -\text{sign}(B_x)[B_{\perp}] / (4\pi\rho)^{1/2})$, соответствующей скачку тангенциальной компоненты магнитного поля. Из соотношения (11b), которое приобретает вид

$$[p+B_{\perp}^2/8\pi]=0, \quad (14)$$

следует, что полное давление не изменяется. Используя значение V_x , можно показать, что (11d) преобразуется к виду $[w+B_{\perp}^2/8\pi\rho]=0$. Отсюда, при учете (14) и термодинамического тождества $w=\varepsilon+p/\rho$, следует, что $[\varepsilon]=0$. Так как любые две термодинамические величины можно выбрать в качестве независимых переменных [54] то соотношения $[\rho]=0$ и $[\varepsilon]=0$ означают, что и $[p]=0$ [37]. Тогда из (14) находим $[B_{\perp}^2]=0$, а из (13) $[V_{\perp}^2]=0$. Таким образом, в альфвеновском разрыве поперечные компоненты магнитного поля и скорости не изменяются по величине. При переходе через разрыв изменяется только направление этих компонент без изменения других свойств потока. Поэтому альфвеновский разрыв часто называется “вращательным разрывом”.

Ударные волны. В системе отсчета Г-Т векторы \mathbf{V} и \mathbf{B} параллельны по обе стороны разрыва, т.е.

$$\mathbf{V}_{\perp}=(V_x/B_x)\mathbf{B}_{\perp} \quad (15)$$

При этом, второе соотношение в (11f) обращается в тождество, а условие (11b) можно представить в виде

$$(1/\rho_1 - V_x^2/(4\pi j^2)) \mathbf{B}_{\perp 1}=(1/\rho_2 - V_x^2/(4\pi j^2)) \mathbf{B}_{\perp 2}, \quad (16)$$

где $j=\rho V_x$. В ударной волне $\rho_1 \neq \rho_2$, и отсюда следует, что векторы $\mathbf{B}_{\perp 1}$ и $\mathbf{B}_{\perp 2}$ параллельны. А это означает, что векторы $\mathbf{B}_{\perp 1}$, $\mathbf{B}_{\perp 2}$ и ударная нормаль лежат в одной плоскости. Иными словами, УВ плоскополяризованы. Учитывая равенств-во (16), можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы ударная нормаль совпала с осью x и по обе стороны УВ выполнялись соотношения $V_z=0$, $B_z=0$.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести обозначения для характерных скоростей в магнитоактивной плазме, а именно, C_S - скорость звука; C_F , $C_A \equiv V_A$, $C \equiv V_A \cos(\theta)$, C_{SL} - соответственно, быстрая, альфвеновская, промежуточная и медленная скорости. В этом разделе $\theta = \theta_{Bn}$. Как видно из определения, C_1 соответствует нормальной альфвеновской скорости. $C_S^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = \{k_B(T_e + T_i) / M$ - “изотермический звук”; $\gamma p / \rho$ - “адиабатический звук”. Быстрая и медленные магнитозвуковые скорости определяются следующим соотношением $(C^{\pm})^2 = (C_A^2 + C_S^2 \pm ((C_A^2 + C_S^2)^2 - 4C_S^2 C_A^2)^{1/2}) / 2$. Тогда $C_F \equiv C^+$, $C_{SL} \equiv C^-$. Характерные скорости подчиняются следующим неравенствам: $C_F \geq C_A \geq C_1 \geq C_{SL}$. При $\theta = 0^\circ$: $C_F = C_A = C_1 > C_{SL} = C_S$, а при $\theta = 90^\circ$ $C_F > C_A > C_1 = C_{SL} = 0$.

В распространяющихся разрывах ($\rho V_x \neq 0$) $V_{x1} \neq 0$. В работе [50] для копланарных разрывов (в частности, для УВ) используются нормализованные переменные:

$$r = V_{x2} / V_{x1}, \quad b = B_{y2} / B_{y1}, \quad \sin(\theta_1) = B_{y1} / B_1,$$

а также соответственно альфвеновское, промежуточное и звуковое числа Маха:

$$M_{A1}^2 = V_{x1}^2 / C_{A1}^2, \quad M_{I1}^2 = V_{x1}^2 / C_{I1}^2, \quad M_{S1}^2 = V_{x1}^2 / C_{S1}^2 = \rho_1 V_{x1}^2 / (\gamma p_1).$$

В этих обозначениях из условий (11 a-d) получается соотношение [50], которое на плоскости (r,b) определяет кривую, в каждой точке которой параметры течения связаны с исходным состоянием в ОВВП законами сохранения, т.е. течение характеризуется теми же значениями потоков массы, импульса и энергии:

$$F(r,b) = Ar^2 + Br + C = 0, \quad (17)$$

$$A = (\gamma + 1) / 2(\gamma - 1),$$

$$B = 1 / (\gamma - 1) M_{S1}^2 + (\gamma / (\gamma - 1)) (1 - (b^2 - \sin^2 \theta_1) / 2 M_{A1}^2),$$

$$C = -1/2 - 1/(\gamma - 1)M_{S1}^2 + ((1 - (b^2 - \sin^2\theta_1) - Y(1 - (b - \sin\theta_1)^2)/2M_{A1}^2),$$

$$Y = 1 - 1/M_{I1}^2.$$

Уравнение гиперболы (последнее равенство в (11f)), имеющее в безразмерных переменных вид

$$Z(r, b) = bX - Y \sin\theta_1 = 0, \quad X = r - 1/M_{I1}^2, \quad (18)$$

выражает условие равенства нулю электрического поля в системе покоя среды, которое должно иметь место в равновесных состояниях по обе стороны разрыва ("гипербола нулевого поля"). Одна из ветвей гиперболы отвечает сверхальфвеновскому течению ($M_I > 1$), а другая - доальфвеновскому ($M_I < 1$).

Копланарные соотношения Ренкина-Гюгонно свелись к одновременному решению алгебраических уравнений $F(r, b) = 0$ и $Z(r, b) = 0$, которые могут быть представлены графически на плоскости (r, b) . Искомыми решениями будут являться точки пересечения этих кривых. Алгебраическими преобразованиями уравнений (17), (18) можно получить уравнение четвертой степени относительно r . Это уравнение имеет по крайней мере одно решение $r = 1$. Следовательно, имеется либо два либо четыре действительных решения, т.е. два или четыре пересечения двух кривых (17) и (18).

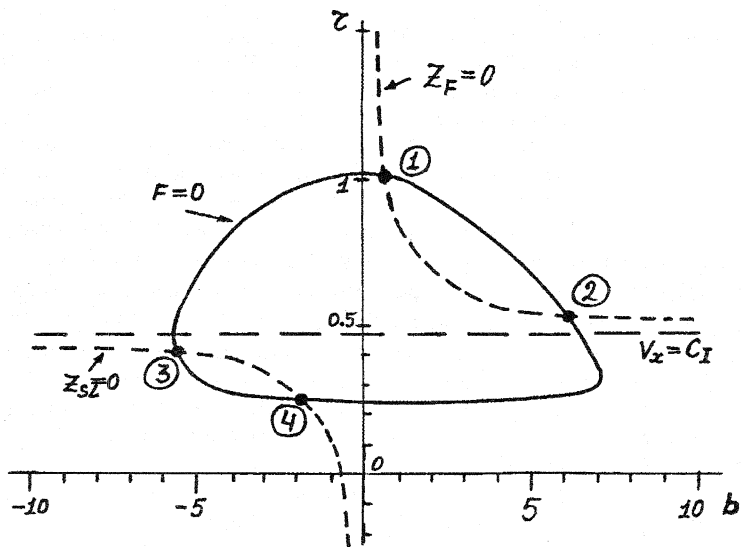


Рис.1. Схематическое изображение графического решения копланарных соотношений Ренкина-Гюгонно

На рис.1 схематически показано поведение кривых (17) (сплошная линия) и (18) (штриховая линия) для случая, когда все четыре корня существуют и различны. Точки пересечения кривых (17) и (18) пронумерованы в порядке убывания их скоростей: $1 = r(1) \geq r(2) \geq r(3) \geq r(4)$. Такая нумерация точек пересечения приведена в монографии [48] и является общепринятой.

Штриховая горизонтальная линия является одной из асимптот гиперболы (18): $X=0$, $\Gamma=1/M_{\Gamma 1}^2$, V_x равняется локальной промежуточной скорости. Отсюда следует, что на верхней ветви ($Z_F=0$) $V_x(1)>C_I(1)$ и $V_x(2)>C_I(2)$, а на нижней ветви ($Z_{SL}=0$) $V_x(3)<C_I(3)$ и $V_x(4)<C_I(4)$. Иными словами точки 1 и 2 - сверхальфеновские, а точки 3 и 4 - доальфеновские. Точка 1 соответствует тривиальному решению ($\Gamma=1$, $b=\sin\theta_1$). Эта точка всегда является сверхзвуковой ($M_S(1)>1$), в то время как точка (4) - дозвуковой ($M_S(4)<1$); точки 2 и 3 могут быть как сверх-, так и дозвуковыми [45].

Решения могут характеризоваться соотношения между скоростями в точках (k) $V_x(1), \dots, V_x(4)$ и характерными скоростями среды

$$\begin{aligned} V_x(1) &\geq C_F(1) \geq C_I(1) \geq C_{SL}(1), \\ C_F(2) &\geq V_x(2) \geq C_I(2) \geq C_{SL}(2), \\ C_F(3) &\geq C_I(3) \geq V_x(3) \geq C_{SL}(3), \\ C_F(4) &\geq C_I(4) \geq C_{SL}(4) \geq V_x(4). \end{aligned} \quad (19)$$

Строгое доказательство этих неравенств приведено в монографии [48]. В принципе, законы сохранения допускают все 12 разрывных переходов между парами состояний 1,2,3,4. Однако, с учетом того, что энтропия возрастает только в случае УВ сжатия, остается только 6 возможных ударных переходов, которые перечислены в таблице 2. Во второй графе этой таблицы указаны номера состояний, при переходе между которыми реализуется данная УВ.

Таблица 2: МГД классификация ударных волн

Область вверх по потоку (ОВВП). V_x	Ударная волна	Область вниз по потоку (ОВНП). V_x
Супербыстрая	Быстрая (1) \longrightarrow (2)	Суббыстрая Доальфеновская
Супербыстрая	Промежуточная (1) \longrightarrow (3)	Доальфеновская Супермедленная
Супербыстрая	Промежуточная (1) \longrightarrow (4)	Доальфеновская Субмедленная
Сверхальфеновская	Промежуточная (2) \longrightarrow (3)	Доальфеновская Супермедленная
Сверхальфеновская	Промежуточная (2) \longrightarrow (4)	Доальфеновская Субмедленная
Супермедленная	Медленная (3) \longrightarrow (4)	Субмедленная

В возникающих разрывах течение должно переходит из “сверхзвукового” в “дозвуковой” режим по отношению к одной из характеристических скоростей среды. В ударных переходах 1→2 и 3→4 эти условия реализуются по отношению к C_F и C_{SL} . Соответствующие им МГД ударные волны называются быстрыми и медленными. Интенсивность медленных ударных волн (МУВ) ограничена, так как их скорость заведомо не превышает альфеновской (C_I); напротив скорость быстрых УВ может быть сколь угодно велика. В УВ обоих типов происходит сжатие и нагрев плазмы. Изменения магнитного поля в быстрых и медленных УВ противоположны: в быстрых УВ B_{\perp} увеличивается, в медленных уменьшается.

В ударных переходах 1→3, 1→4, 2→3, 2→4 происходит преобразование сверхальфеновского течения ($V_x > C_I$) в доальфеновское ($V_x < C_I$). Ударные волны,

соответствующие этим переходам, получили название “промежуточные ударные волны” (IS - Intermediate Shock). Имеется два возможных состояния для IS в ОБВП: скорость потока может быть супербыстрой ($V_{x1} > C_{F1}$) либо суббыстрой ($V_{x1} < C_{F1}$) - в обоих случаях - сверхальфеновской. В ОВНП также имеется два возможных состояния: скорость потока может быть супермедленной ($V_{x2} > C_{SL2}$) либо субмедленной ($V_{x2} < C_{SL2}$) - в обоих случаях - доальфеновской. Комбинации двух состояний в ОБВП и двух состояний в ОВНП дают четыре типа IS. Промежуточные УВ (IS), у которых в ОВНП скорость меньше (больше) скорости МУВ, называются сильными (слабыми) промежуточными ударными волнами. В отличие от быстрой и медленной УВ, в IS скорость потока может совершать скачок более чем через одну характеристическую скорость (1→3, 1→4, 2→4). Переходы 1→3 и 1→4 происходят только при квази-параллельном распространении [55].

Знаки равенств в (19) соответствуют особым случаям, которые нельзя проиллюстрировать с помощью рис.1. В случаях, когда скорость потока равна быстрой скорости (точки 1 и 2 совпадают) или медленной скорости (точки 3 и 4 совпадают) имеется соответственно быстрая ($V_x = C_F$) или медленная ($V_x = C_{SL}$) УВ бесконечно малой интенсивности.

В другом особом случае $V_x = C_I$ в точках 2 и 3. При этом гипербола $Z(r, b) = 0$ вырождается в пару прямых $b = 0$ и $r = 1/M_{I1}^2$. Точки пересечения последней прямой с $F(r, b) = 0$ в этом вырожденном случае совпадают (2)≡(3). Точки 1 и 4 являются точками пересечения $b = 0$ с $F = 0$ и соответствуют продольному распространению УВ (строго параллельная УВ: $\theta = 0$, $M_I = M_A$, $V_{\perp} = V_{\perp} = 0$). Ударный переход 1→2≡3 является предельным случаем быстрой УВ и называется УВ-включения, поскольку, отсутствующие в ОБВП, тангенциальные компоненты магнитного поля и скорости потока появляются (“включаются”) в ОВНП. “Обратный переход” 2≡3→4, при котором V_{\perp} и V_{\parallel} существуют в ОБВП и исчезают (“выключаются”) в ОВНП, является пределом МУВ и называется УВ-выключения.

В работе [50] рассматривался также случай некопланарных соотношений Ренкина-Гюгонио. При этом кривые, определяемые уравнениями (17) и (18) переходят в поверхности трехмерного пространства (r, \mathbf{b}_{\perp}) ; соответственно в $F(r, \mathbf{b}_{\perp}) = 0$ и $Z(r, \mathbf{b}_{\perp}) = 0$, где $\mathbf{b}_{\perp} = \mathbf{V}_{\perp}/V_{\perp}$. Здесь рассмотрим только ситуацию, соответствующую последнему из особых случаев копланарных соотношений Р-Г, когда точки пересечения 2 и 3 совпадают. Изложение этого материала проводится на основе работы [50].

В случае когда в ОБВП $b_{\perp 1} = 0$, в этом же состоянии потока $M_{I1}^2 = M_A^2$, поскольку $\cos^2 \theta = 1$. Уравнения поверхностей существенно упрощаются и становятся инвариантны относительно направления распространения. Например,

$$Z(r, \mathbf{b}_{\perp}) = b_{\perp 1} (r - 1/M_{I1}^2) \equiv b_{\perp 1} X = 0. \quad (20)$$

Поверхность $F(r, \mathbf{b}_{\perp})$ становится конфигурацией, разрешимой относительно r в трехмерном пространстве (r, \mathbf{b}_{\perp}) . Уравнение (20) удовлетворяется только на линии $b_{\perp 1} = 0$ (ось r) и на плоскости $r = 1/M_{I1}^2$, на которой $V_x = C_I$. Решением некопланарных соотношений Р-Г являются точки пересечения поверхности $F(r, \mathbf{b}_{\perp}) = 0$ с осью r (две изолированных точки типа 1 и 4) и с плоскостью $r = 1/M_{I1}^2$ (альфеновская окружность [50] (АО) - окружность радиуса $b_{\perp 1}^2$, состоящая из точек типа (2)≡(3)). УВ-включения реализуются при переходе из точки типа 1 в любую точку АО (переход 1→2≡3). При этом, условия Р-Г фиксируют только величину, но не ориентацию векторов \mathbf{b}_{\perp} и \mathbf{V}_{\perp} в ОВНП. Переход между любыми точками АО является вращательным разрывом (RD). Заметим, что промежуточные УВ (IS) сжатия не существуют при $\theta_1 = 0$ в стандартной

системе нормального падения. В специальном случае, когда переход происходит между двумя диаметрально противоположными точками АО, возникает "фантом" IS (типа 2→3) - несжимаемый RD на 180°. IS (типа 1→2) идентична УВ-включения, а IS (типа 3→4) идентична УВ-выключения. IS (типа 1→4) является гидродинамическим разрывом. Условиями существования УВ-включения являются: $\theta_1=0$ и $C_{A1} < V_{x1} < C_{c1}$, где $(V_{c1})^2 = (\gamma+1)C_{H1}^2 / (\gamma-1) - 2C_{S1}^2 / (\gamma-1)$. УВ-выключения является переходом между точками типа 3 на АО и точкой типа 4 с $v_{1L}=0$. Условием для этого является просто $V_{x1} = C_{H1}$ [50].

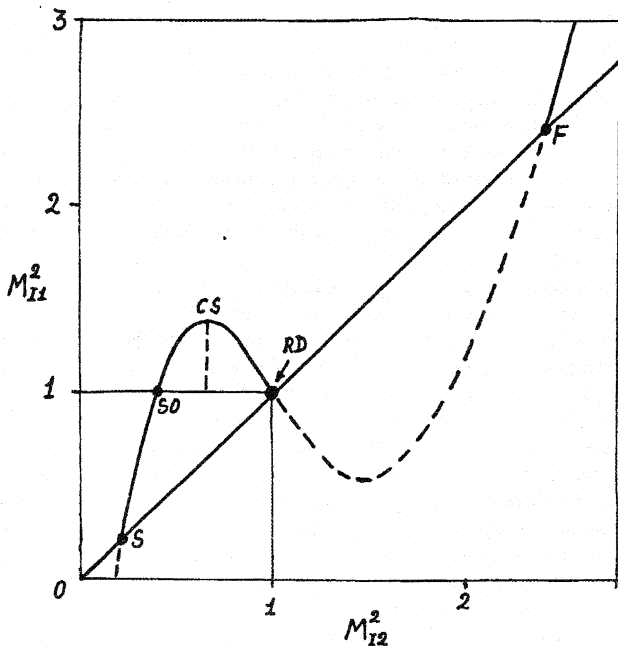


Рис. 2. Схематическое изображение "ударной кривой".

Полезным методом наглядного представления различных решений соотношений Р-Г является построение "ударной кривой" (УК; shock curve [56]) - график квадратов величин промежуточных чисел Маха: значение M_{I1}^2 (в ОБВП) как функция M_{I2}^2 (значения этой же величины в ОВНП). Схематически ударная кривая (УК) представлена на рис.2 (см., например, [56]). На графике биссектриса прямого угла в точке 0 представляет собой линию тривиального решения (ЛТР), т.е. прямую линию, на которой $\gamma=1$ ($M_{I1}^2 = M_{I2}^2$). Вдоль этой прямой параметры плазмы не изменяются при переходе через разрыв. Часть УК, расположенная ниже ЛТР соответствует таким решениям, у которых скорость потока возрастает (а, следовательно, уменьшается энтропия) при прохождении через УВ. Таким образом, эти решения лишены физического смысла и соответствующая им часть УК изображена на рис.2 штриховой линией. ЛТР всегда пересекает УК в трех точках, которые обозначены на рис.2 символами S, RD и F. Отрезок УК между точками S и SO

($M_{II} < 1$) соответствует медленным УВ. При продвижении вверх по этому отрезку тангенциальная компонента магнитного поля в ОБВП становится все меньше и меньше до тех пор пока она полностью не исчезнет в точке SO (Switch-Off). Точка SO ($M_{II} = 1$) соответствует УВ-выключения, которая является верхним пределом МУВ. Решения выше этой точки, лежащие на отрезке УК (SO, RD), обозначаются как промежуточные ударные волны (IS), для которых $M_{II} > 1$ и $M_{II} < 1$. IS поворачивают (вращают) тангенциальные компоненты магнитного поля на 180° (\mathbf{B}_{L2} антипараллельна \mathbf{B}_{L1}). Заметим, что для $M_{II} < 1$ имеется только одно решение P-Г, в то время как для $M_{II} \geq 1$ существует два решения для тех же самых условий в ОБВП. Максимальное значение M_{II} для IS достигается в точке CS ("Critical Slow"; $V_{x2} = C_{SL2}$), слева от которой скорость потока меньше медленной скорости $V_{x2} < C_{SL2}$ (сильные IS), а справа $V_{x2} > C_{SL2}$ (слабые IS). Скачки в магнитогидродинамических параметрах оказываются меньшими по величине для слабых IS по сравнению с сильными IS. МУВ-выключения является пределом с одной стороны МУВ, а с другой стороны сильных IS. Пределом слабых IS является вращательный разрыв (RD), которому на УК соответствует точка, обозначена символом RD. В точке RD $M_{II} = M_{I2}$, а наклон УК всегда равен -1. Наконец, часть УК, соответствующая быстрым УВ начинается в точке F (УВ-включения) и располагается выше ЛТР.

Условие эволюционности ударных волн. Условия существования и устойчивости МГД разрывов определяются спектром линейных волн, которые могут существовать в среде при наличии диссипации и других физических явлений, влияющих на формирование и структуру фронта разрыва (см., например, [37, 45, 48]). Когда ширина фронта мала по сравнению с характерными масштабами рассматриваемой системы, то в первом приближении структуру разрыва можно считать стационарной. В этом случае достаточно ограничиться рассмотрением спектра волн в низкочастотном пределе $\omega \rightarrow 0$. При этом спектр состоит из двух групп волн: 1) незатухающих волн, которые характеризуют бездиссипативную среду; 2) существующие только при наличии диссипации, диссипативные волны, затухание которых происходит на длине порядка ширины фронта. Первые волны ответственны за устойчивость фронта, т.е. за его способность адекватно реагировать на внешние возмущения. Вторая группа волн ответственна за формирование его структуры.

Установить характер спектра из общих соображений удается только в достаточно специальных случаях. Поэтому, на практике используются, как правило, более простые и легко проверяемые необходимые условия устойчивости. Наиболее удобным и физически ясным критерием такого рода является условие эволюционности разрыва [37,45,48], которое фактически является условием существования и единственности решения задачи о взаимодействии разрыва с малыми возмущениями в виде достаточно длинных волн, приходящих на этот разрыв из $\pm\infty$, т.е. решения системы уравнений относительно амплитуд расходящихся волн. Если решение системы линейных уравнений относительно амплитуд волн не единственно, то существуют нетривиальные (ненулевые) решения и при нулевой амплитуде падающих волн, т.е. фронт разрыва может спонтанно излучать волны, что и означает его неустойчивость. С другой стороны, если решения этой системы не существует, то это означает, что отклик системы на малое возмущение не является адекватным (т.е. малым). Такое поведение системы может происходить когда разрыв неустойчив относительно самопроизвольного распада на несколько разрывов меньшей амплитуды.

Условие эволюционности разрыва для строго гиперболических систем формулируется следующим образом [57]: число характеристик, покидающих разрыв, должно быть на единицу меньше числа независимых переменных. Иными словами,

число независимых граничных условий R на разрыве должно равняться числу расходящихся волн по обе стороны от поверхности разрыва S_N ($R=S_1+S_2$) (см., например, [37, 45, 48]). Следует заметить, что в МГД теории для всех разрывов, за исключением ударных волн, условие эволюционности выполняется всегда. В МГД теории описания течения среды используется семь переменных: плотность ρ ; энтропия S ; три компоненты скорости V ; две тангенциальные компоненты магнитного поля V_{\perp} . Для этих переменных имеется 7 основных соотношений на разрыве (условия Ренкина-Гюгонио (11 a-f)). Число же независимых переменных оказывается на единицу меньше $R=6$, поскольку соответствующая система линейных уравнений содержит возмущение скорости УВ. Таким образом, число расходящихся волн для эволюционной УВ должно равняться $S_1+S_2=6$. Так как в однородном потоке, соответствующим МГД особой точке типа k , имеет место соотношение $k=1+$ {число волн, скорость которых превышает скорость течения, т.е. расположенных слева от $V_x(k)$ в неравенствах (19)} [45], то для ударного перехода $k_1 \rightarrow k_2$ число расходящихся от фронта УВ волн равно $S_1+S_2=k_1-1+k_2=7+k_1-k_2$. Таким образом, условию эволюционности удовлетворяют только ударные переходы $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$. Однако, на самом деле переход $2 \rightarrow 3$ не является эволюционным. В этом случае уравнения, служащие для определения амплитуд расходящихся волн, и соотношения на разрыве (11) распадаются на несколько независимых групп. При этом условии эволюционности должно выполняться не только для всей совокупности переменных, но и для каждой изолированной группы в отдельности [59] (см. [37, 45, 48]). Линеаризация граничных условий непрерывности z -компонент (11c,f) приводит к двум уравнениям [59]:

$$[\rho V_x \delta V_z - B_x \delta B_z / 4\pi] = 0, [B_x \delta V_z - V_x \delta B_z] = 0.$$

Эти уравнения содержат возмущения только двух величин δV_z и δB_z . Линеаризация оставшихся граничных условий (11), т.е. (11b,d) и y -компонент соотношений (11c,f) дает еще четыре линейных уравнения, которые содержат возмущения δV_x , δV_y , δB_y , δB_x , $\delta \rho$, δs . Возмущения, зависящие от времени как $\exp(-\omega t)$, распространяются в обе стороны от разрыва в виде магнито-гидродинамических волн трех видов (альфвеновские, быстрые и медленные магнитозвуковые) и в виде энтропийной волны; последняя представляет собой малое возмущение энтропии, которое (за счет адиабатичности) переносится самой средой с ее скоростью. Магнитозвуковые и энтропийные волны переносят возмущения δV_x , δV_y , δB_y , δB_x и δs , а альфвеновские волны - возмущения δV_z и δB_z . Поскольку уравнения для этих двух групп возмущений разделяются, то условие эволюционности должно быть выполнено для каждой группы в отдельности [59].

Существуют две области эволюционности относительно альфвеновских волн [58]:

- 1) $V_{x1} > C_{11}$, $V_{x2} > C_{12}$,
- 2) $V_{x1} < C_{11}$, $V_{x2} < C_{12}$.

Как видно из неравенств (19) в первой области параметров существует только быстрая УВ, а во второй - только медленная. Тем самым ударный переход $2 \rightarrow 3$ оказывается неэволюционным. Другими словами, в группе альфвеновских возмущений по обе стороны фронта эволюционной МГД УВ должны существовать две расходящиеся альфвеновские волны [45]. В промежуточных же УВ (IS) (в частности, соответствующим переходам $2 \rightarrow 3$) имеется только одна такая расходящаяся волна [48].

Таким образом из 12 ударных переходов, которые допускают законы сохранения, 6 из которых удовлетворяют принципу возрастания энтропии при

прохождении через разрыв, условие эволюционности выделяет только два типа реально существующих МГД ударных волн, а именно, быстрые и медленные ударные волны [45]. Однако, последняя часть этого утверждения строго справедлива только в рамках идеальной МГД теории.

7. Формирование разрывов в гибридном моделировании.

Важным элементом численного моделирования (в частности, гибридного) систем с разрывами различного типа является инициализация (начальное формирование) разрывов: ударных волн (УВ), тангенциального (ТД) и вращательного (РД) разрывов. В ряде случаев для исследования генерации волн вблизи разрыва (например, ТД) с помощью нестационарного самосогласованного моделирования необходимо задать стационарный во времени разрыв. Такое задание можно осуществить различными способами.

Во-первых, используется равновесный тангенциальный разрыв, полученный из простых балансных соотношений для давления. В работе [60] такой подход применяется для изучения структуры ТД с помощью одномерного гибридного моделирования.

Вторым методом является конструирование власовского равновесия (как это обсуждалось в [61]). Этим способом инициировалось двумерное гибридное моделирование для изучения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца вблизи разрыва ТД-типа с широким потоком частиц через границу [62].

В третьем методе разрыв задается динамически за счет взаимодействия двух потоков плазмы. К этому типу алгоритмов инициализации разрывов относится метод жесткого поршня [44,63,64] (другое название, встречающееся в литературе “метод твердой стенки”), который широко используется в гибридном моделировании бесстолкновительных УВ. Состояние плазмы создается начальным потоком вправо, а также непрерывной инъекцией плазмы с левой стороны. Плазма отражается от жесткой проводящей стенки, расположенной на правой стороне области расчета. Отраженная плазма совместно с набегающим потоком формирует УВ, которая распространяется влево, так что область форшока (т.е. область моделирования слева от УВ (в 1-D случае)) непрерывно сокращается в процессе моделирования. Такое сокращение форшока может вызвать некоторые трудности, например, при изучении ускорения частиц до больших энергий. Еще один недостаток метода заключается в необходимости больших затрат компьютерного времени для того, чтобы УВ отделилась от жесткой стенки.

Метод поршня имеет то преимущество, что разрыв формируется динамически и таким образом не вводятся никаких априорных предположений о разрыве (например, масштабы градиентов, внутренняя структура разрыва (УВ), вращение и т.д.), а разрыв эволюционирует самосогласованным образом из краевых условий. Такое свойство метода инициализации важно при изучении РД, которые могут оказаться не единственными [65], а также при исследовании сильных промежуточных ударных волн, в которых переход от набегающего состояния (ОВВП) к вытекающему состоянию (ОВНП) происходит не единственным образом ([56] модель резистивной холловской МГД; [66]).

8. Медленные ударные волны.

Согласно МГД теории медленные магнитозвуковые ударные волны являются результатом уменьшения магнитного поля в области набегающего потока (ОВВП) и возрастающего потока плазмы и тепловой энергии. Иными словами, УВ конвертирует

магнитную энергию в ОВВП в кинетическую энергию потока плазмы в ОВНП. В связи с этим свойством медленные УВ (МУВ) играют важную роль в стационарном процессе пересоединения магнитных силовых линий.

Гибридное моделирование медленных ударных волн проводилось в работах [17,65,67-79]. Аналитические исследования (двухжидкостная теория [80]) и ранние работы по гибриднему моделированию [67,68] показали, что в ОВНП МУВ-выключения ($M_1=1$) присутствует цепочка вращательных (альфвеновских) стоячих волн большой амплитуды (в дальнейшем, для краткости, "цепочка когерентных волн" или просто "цепочка волн"). При этом необходимая для формирования УВ диссипация обеспечивается за счет затухания этих стоячих волн. Однако, наблюдения в геомагнитном хвосте (с борта ракеты ISEE-3) не обнаружили присутствия подобных волн. Для устранения несоответствия предсказания теории с данными наблюдений были проведены многочисленные вычисления с использованием гибридных моделей [70-76]. В этих исследованиях были найдены решения типа УВ как с цепочкой волн, так и без такой цепочки. Согласно работам [70,73] существует критическое число Маха $M_c \approx 0.98$ такое, что для МУВ с $1 \geq M_1 > M_c$ в ОВНП присутствует цепочка когерентных волн, в то время как для МУВ с $M_1 < M_c$ вращательная волна в ОВНП затухает на расстоянии меньшем чем длина волны. (Для МУВ магнитного хвоста с $\theta_{\text{вн}}=75^\circ$, $\beta_1=0.1$ и $T_{e1}/T_{i1}=0$, критическое значение $M_c \approx 0.975$ [73].) В исследовании [75] отсутствие или наличие цепочек волн связывается с выбором граничных условий в ОВНП при моделировании. В работе [71] было показано, что структура МУВ в плазме с малым β зависит от числа Маха и отношения температур T_e/T_i (в ОВВП). Дозвуковое течение плазмы с большим значением T_e/T_i характеризуется наличием цепочки затухающих волн в структуре МУВ. При сверхзвуковом течении плазмы или в случае малых значений T_e/T_i такая цепочка волн не наблюдается.

Для объяснения отсутствия цепочки волн в ОВНП МУВ магнитного хвоста было предложено несколько механизмов демпфирования таких цепочек. В работах по гибриднему моделированию (в основном 1-D) были сделаны предположения, что затухание когерентных волн обусловлено:

- электромагнитной ион-ионной неустойчивостью, связанной с ионным пучком [72];
 - хаотическими орбитами ионов в МУВ [73,81];
 - тяжелыми ионами, присутствующими в магнитном хвосте [82] (рассматривались ионы с массой $m_h = 4$ (He^+), 8, 16 (O^+);
 - наличием конечного ведущего магнитного поля ($B_y \neq 0$) или неравенством плотностей плазмы двух долей магнитного хвоста (асимметричный случай магнитного пересоединения) [83];
 - влиянием эффектов двумерной геометрии [84] (вместо МУВ-выключения с $M_1=1$ 1-D моделирования [83] в 2-D моделировании [84] появляются МУВ с $M_1 < 1$).
- Одномерное гибридное моделирование слоя пересоединения магнитных силовых линий в магнитном хвосте [84] показало, что отсутствие цепочки когерентных волн связано с промежуточным числом Маха (M_1) МУВ. Когда ведущее магнитное поле (B_y) возрастает, то M_1 уменьшается от $M_1=1$ при $B_y/B_z=0$ до $M_1 < 1$ при $B_y/B_z \neq 0$. Цепочка когерентных волн исчезает когда M_1 становится меньше критического значения $M_c \approx 0.98$. Аналогично, в асимметричных случаях когерентные волны исчезают когда отношение плотностей плазмы в двух долях магнитного хвоста увеличивается, что соответствует уменьшению M_1 .

В зависимости от параметров плазмы ОВВП были найдены многочисленные структуры УВ [74]. Например, одна из найденных структур была связана с цепочкой

альфвеновских волн в ОВВП, похожими на те, что описываются двухжидкостной теорией. Помимо этого в области вверх по потоку наблюдались альфвеновские ионно-циклотронные (АИС - Alfvén Ion-Cyclotron) волны. Эти волны возбуждаются электромагнитной ион/ионной-циклотронной (ЕМПС - Electromagnetic Ion/Ion Cyclotron) неустойчивостью при взаимодействии ионов ОВВП с ионами обратного потока от УВ. Линейные и нелинейные свойства ЕМПС неустойчивости были исследованы в работе [72,76]. Другая структура УВ связана с АИС волнами как в ОВВП, так и в ОВНП. В этих УВ групповая скорость волн, генерируемых в ОВВП, оказалась меньше скорости потока. За счет этого волны конвективно сносятся назад в направлении ОВНП, что приводит к нестационарному поведению (реформации) УВ. Было показано, что процесс реформации предотвращает формирование цепочки стоячих альфвеновских волн.

В работах [72,76] максимум инкремента нарастания ЕМПС неустойчивости достигался при больших углах волновой нормали. То есть для квази-перпендикулярных медленных УВ максимальный рост происходит в направлении нормали УВ. Такое поведение системы означает, что использование одномерного моделирования является разумным первым приближением. Однако, в общем случае, нельзя ожидать, что АИС волны будут нарастать только в направлении ударной нормали. Исследование структуры медленных УВ с использованием двумерного гибридного кода проводилось в работах [65,79].

Взаимодействию АИС волн с МУВ посвящена работа [77], в которой показано, что МУВ могут возбуждать АИС волны, которые становятся группой стоячих волн внутри ударного переходного слоя. Эти волны за счет укручения могут переходить в тонкие структуры (~4δ). В таком случае переход через МУВ от ОВВП к ОВНП осуществляется через многие слои. Результирующий переход происходит на значительно большей длине (≥60δ) по сравнению с протяженностью типичной МУВ.

Обсуждение кинетической структуры медленных магнитозвуковых УВ, полученных с помощью 1-D и 2-D гибридного моделирования, проводится в работе [78], в которой суммируются результаты исследований медленных волн [70-72,74,76,79]. Отмечается, что при рассмотрении магнитной структуры УВ было найдено четыре типа решений (два при больших и два при малых значениях чисел Маха).

- 1) Вблизи предела УВ-выключения один класс УВ связан с цепочкой альфвеновских волн в ОВНП и с АИС-волнами в ОВВП. АИС-волны появляются (возбуждаются) за счет ЕМПС неустойчивости при взаимодействии плазмы ОВВП с ионами обратного потока. В этом классе УВ групповая скорость волн ОВВП больше чем скорость плазменного потока и УВ остается устойчивой.
- 2) В случаях когда последнее условие нарушается получен второй класс решений, в которых волны конвективно сносятся назад к УВ. В результате УВ становится неустойчивой и более не связана с цепочкой затухающих волн, а источником флуктуаций в ОВНП становится конвекция волн ОВВП.
- 3) Исследования МУВ с малыми числами Маха показали наличие ламинарной структуры с отсутствием волн как в ОВВП, так и в ОВНП. Волны в ОВВП не возбуждаются поскольку малы скорость набегающего потока и плотность ионов обратного потока. Отсутствие волн в ОВНП обусловлено затуханием Ландау ожидаемых стоячих волн на тяжелых ионах.
- 4) Четвертый класс решений соответствует УВ, которые являются более сильными, (но на немного) по сравнению с УВ предыдущего случая (класс 3). При этом ионы

обратного потока могут возбуждать АИС-волны в ОВВП. Однако, в ОВНП таких УВ не проявляется никакой волновой активности.

Результаты двумерного моделирования [65,78,79] показали, что некоторые УВ сохраняют свою одномерную структуру. Другие УВ, которые были устойчивы в 1-D, становятся неустойчивыми в 2-D. Однако, основные физические процессы, протекающие в 1-D, происходят так же и в случае рассмотрения более высоких пространственных размерностей.

9. Ударные волны выключения.

Гибридное моделирование УВ выключения (switch-off) проводилось в работах [71,74], в которых показано существование некоторых УВ выключения без цепочки волн. Двумерная структура медленных УВ-выключения исследовалась в работе [79]. Было показано, что основные физические процессы, протекающие в одномерных УВ, происходят также и в двумерных УВ. В частности, были найдены как устойчивые, так и неустойчивые (процесс реформации) ударные структуры. В первом случае УВ связана с цепочкой альфвеновских волн в ОВНП и с АИС волнами, возбуждаемыми ЕМПС неустойчивостью в ОВВП. Процесс реформации УВ происходит в том случае, когда АИС волны в ОВВП конвективно сносятся к УВ. Было показано [79], что хотя некоторые УВ, устойчивые в 1-D, остаются также устойчивыми при 2-D моделировании, другие УВ становятся нестабильными в случае двумерной геометрии. Таким образом, структура некоторых УВ может значительно измениться при переходе от 1-D к 2-D моделированию.

Основным приближением гибридной модели является представление электронов в виде безмассовой жидкости. Исследование справедливости такой аппроксимации проводилось в работе [85,86], в которой для моделирования МУВ применялось "полное кинетическое моделирование" (как для ионов, так и для электронов используется представление в виде набора частиц конечного размера) с учетом кинетических эффектов. Результаты "полного" моделирования сравнивались с результатами численного моделирования по гибридной модели с теми же самыми параметрами задачи. Использовался электромагнитный код метода частиц. Для моделирования плазмы на ионных временных масштабах без одновременного разрешения более быстрых электронных масштабов в работе [85,86] применялась неявная схема решения динамических уравнений (см., например, [3,4]), которая позволяет использовать большой шаг по времени. Свойства неявного алгоритма таковы, что допускают использование интересующего нас масштаба времени (в данном случае - ионного масштаба) без появления численных неустойчивостей. Эта техника аккуратно описывает взаимодействие между электронами и ионами на ионном масштабе времени даже в том случае когда предполагается разрешение только самого медленного из электронных масштабов.

В исследовании [85] МУВ-выключения формировалась за счет отражения набегающей плазмы от стационарного физического поршня ("метод жесткого поршня"). При этом было отмечено, что некоторые результаты решения МУВ-выключения зависят от граничных условий, наложенных на поршень. В работе [86] рассматривались решения с последующей (trailing) магнитной волной. Такие решения получаются в случае когда компонента магнитного поля, перпендикулярная ударной нормали, полагается равной нулю на поршне, что соответствует ожидаемому значению этой компоненты в ОВНП для УВ-выключения. Параметры состояния системы: $\beta_e = \beta_{i1} = 0.01$, $M/m = 25$, $\theta_{in} = 75^\circ$, $\Omega_i/\omega_{pe} = V_A/c = 0.01$. Параметры моделирования: $L = 100\delta_i$, $\Delta x = 0.5\delta_i$, $\Omega_i \Delta t = 0.1$. При этих параметрах $\omega_{pe} \Delta t = 50$ и $\lambda_D/\Delta x = 9 \times 10^4$. Таким

образом, в этом моделировании использовался временной шаг в 50, а пространственный в 1000 раз больший, чем шаги допускаемые при явных схемах вычисления метода частиц. Для представления ионов использовалось 64 частицы на каждую ячейку пространственной сетки, а для представления электронов - 256 частиц на ячейку. На основании результатов сравнительных вычислений [86] было указано, что в случае МУВ вклад электронов на ионном масштабе времени является значительным и проявляется в уменьшении роли ионов обратного потока в формировании структуры МУВ.

10. Промежуточные ударные волны.

В соответствии с соотношениями Ренкина-Гюгоннио существует шесть решений ударного типа (Табл.2). Наиболее известными являются быстрая и медленная ударные волны, а оставшиеся четыре решения являются промежуточными УВ (IS) [87]. В IS происходит переход от сверхальфеновского потока к доальфеновскому потоку. Одним из важных свойств IS, отличающим их от быстрой и медленной УВ, является вращение на угол 180° в плоскости УВ тангенциальной по отношению к УВ компоненты магнитного поля. Заметим, что вращательный разрыв (RD) также вращает магнитное поле и этот факт создает определенные трудности при идентификации IS в численном моделировании, а также при интерпретации результатов наблюдений. Однако, имеется важное различие между RD и слабыми IS. Как и все УВ, IS должны удовлетворять условию копланарности (т.е., допустимо вращение только на углы 0° и 180°), в то время как никаких ограничений не накладывает для RD. Другим отличительным свойством IS является то, что для тех же самых условий в области перед фронтом IS могут иметь два различных состояния в области за фронтом (см., Рис.2). Существует также второй класс IS, в которых вращение магнитного поля происходит на угол отличный от 180° . Обусловленные своей некопланарной природой они не могут быть стационарными и получили название “нестационарные промежуточные УВ” (TDIS - Time-Dependent Intermediate Shock).

Долгое время считалось, что IS не могут существовать по различным причинам. Одной из причин являлось то, что в теории идеальной МГД, как указывалось выше, IS не удовлетворяют условию эволюционности. В качестве еще одного аргумента приводился следующий: поскольку IS могут существовать только для угла вращения 180° , то они представляют собой сингулярное решение и любое их взаимодействие с некопланарной альфеновской волной должно приводить к быстрому распаду IS на RD и МУВ [56]. Однако, в рамках модели резистивной МГД [88-91] было продемонстрировано, что несмотря на некоторые “странные” свойства IS, они существуют и являются устойчивыми. Также было показано, что существует новый класс решений - TDIS, которые являются некопланарными и эволюционируют к RD. В резистивной МГД RD имеют бесконечно малую толщину и поэтому TDIS может только приближаться в пределе к RD после очень длительного времени. Рассмотрение структуры IS в контексте резистивной холловской МГД было проведено в работах [56,92,93]. Было найдено [93], что модель РХМГД дает для толщины IS значения большие ($\geq 20\delta$) чем наблюдаются в магнитопаузе. Однако, в этой же работе указано, что включение в модель РХМГД эффектов конечного ларморовского радиуса может снизить вычисленную толщину IS до приемлемых значений.

При самосогласованом решении задач бесстолкновительной плазмы механизмы, обеспечивающие диссипацию (например, сопротивление или вязкость), должны вноситься в модель как результат взаимодействия волна-частица. Поэтому, для ответа

на вопросы о существовании, структуре и устойчивости IS в плазме без учета столкновений необходимо использовать кинетическое описание. С помощью гибридного моделирования эти вопросы исследовались в работе [94], в которой было сделано заключение, что RD являются устойчивыми, в то время как IS неустойчивы и эволюционируют к RD. Противоположный вывод был сделан в работе [95,96]: только устойчивая IS может быть сформирована в процессе укручения волн, а RD - неустойчив и эволюционирует к слабой IS. Одной из причин существенного расхождения результатов этих исследований является использование совершенно разных методов инициализации (первоначального формирования) УВ, применяемых в этих работах. Таким образом, была показана необходимость использования надежного метода формирования ударных волн при численном моделировании (в частности при гибридном моделировании) систем, в которых появляются различные разрывы.

В работе [97] для инициализации разрыва использовался метод поршня, который проявил себя вполне надежной вычислительной процедурой при исследовании МУВ [74]. Основные результаты работы [97]:

- 1) Как RD, так и IS существуют и устойчивы. RD является пределом слабой IS и имеет характеристики (толщину, годограму и т.д.) очень похожие на характеристики близкой к нему IS;
- 2) Некопланарные слабые IS (слабые TDIS) являются нестационарными и разрушаются, переходя при этом в RD;
- 3) Некопланарные сильные IS (сильные TDIS) также нестационарны и эволюционируют к RD на более длительных промежутках времени по сравнению со случаем некопланарных слабых IS.

Численное гибридное моделирование промежуточных УВ проводилось в работах [66,94,97-101]. Расчеты, проведенные с целью распространения результатов работы [94] до режимов с большими плазменными β при использовании большей области расчета [66,99], подтвердили результаты исследования [97]. Включение в рассмотрение анизотропии не изменяет приведенных выше выводов [101].

В работах [66,98,99] для численного моделирования IS применялись две одномерные модели: 1) электромагнитный гибридный код; 2) двухжидкостной код (резистивная холловская МГД). Во-втором коде расчеты проводились по централизованной по времени схеме leapfrog: плотность, магнитное поле и давление вычислялись на целочисленных шагах по времени, а скорость - на полуцелых. Для инициализации УВ и RD использовался метод поршня. Исследовалась кинетическая структура и устойчивость IS и RD. Одной из целей этих работ было выяснение связи между IS и RD, а также выявление возможных наблюдаемых характерных величин для разграничения IS и RD. В работах проводилось прямое сравнение между результатами расчетов, полученных с использованием обеих моделей. На основании этого сравнения в работе [66] показано, что жидкостная (fluid) теория не применима для изучения IS в бесстолкновительной плазме.

Общей чертой IS является наличие ионов обратного потока, состоящих как из ионов отраженных от УВ, так и ионов, появившихся в ОБВП за счет просачивания (утечки) из ОБНП. Наибольшая плотность этих ионов составляет 10-20% от плотности ионов набегающего потока (т.е. ионов в дальней части ОБВП) для сильных IS и 2-6% для слабых IS [66]. Более высокая плотность ионов обратного потока возможна если ионное β больше единицы и/или имеет место изменение анизотропии на разрыве. Относительное течение между ионами обратного потока и набегающей плазмой может привести к возбуждению альфеновских циклотронных волн. В результате взаимодействия этих волн с УВ поведение последней становится нестабильным, а

именно, начинает протекать, так называемый, процесс *циклической реформации* УВ [102] - квазипериодическое разрушение фронта УВ и последующее его очередное формирование.

В кинетическом описании существуют различные пространственные масштабы, связанные с IS. Наименьший масштаб соответствует длине вращения (поворота) магнитного поля. В работе [66] найдено, что в противоположность результатам МГД вычислений, в гибридном моделировании получаются величины длины вращения, которые согласуются со значениями, наблюдаемыми в слое вращения магнитопаузы ($\leq 10\delta$).

11. Некоторые замечания о промежуточных ударных волнах (IS).

При обсуждении промежуточных УВ (IS) приводились некоторые из аргументов против их реального существования (неэволюционность IS, поворот магнитного поля только на угол 180°). Ниже перечисляются положения, взятые из работы [50], которые следует учитывать при рассмотрении вопроса о существовании IS.

- (i) Условие эволюционности формулируется на основе теории строго гиперболических систем (см., например, [57]).
- (ii) Существуют условия, при которых происходит укрупнение IS.
- (iii) Поскольку в теории идеальной МГД отсутствуют пространственные масштабы, то в ней допускаются бесконечно тонкие разрывы конечной амплитуды. Предполагается, что все пары состояний Ренкина-Гюгонио (Р-Г) всегда разделены разрывом в пределе малой диссипации. Однако, условия Р-Г только связывают состояния локального термодинамического равновесия и не могут гарантировать существование единственной устойчивой структуры, которая в пределе слабой диссипации сходится к разрыву.
- (iv) Анализ устойчивости [103], из которого следует заключение об устойчивости только эволюционных УВ, основывается на предположениях о гиперболичности системы уравнений МГД и о бесконечно тонкой ширине разрыва.
- (v) Аргумент: вращательным разрывом (RD) всегда можно заменить IS - может оказаться ошибочным, так как при учете диссипации RD имеет конечную ширину и становится неустойчивым.
- (vi) Подобно IS, быстрые УВ также не имеют в своей ближайшей окрестности устойчивых решений, соответствующих малому отклонению от копланарности. Но для быстрых УВ это никогда не служило аргументом против их существования.
- (vii) Тот факт, что интегрирование МГД уравнений Навье-Стокса приводит к результатам, значительно отличающимся от результатов идеальной МГД, дает основания предполагать, что вопросы об эволюционности и структуре IS не могут решаться раздельно.

С теоретической точки зрения существование IS и их связь с RD дебатировались на протяжении нескольких лет. Рассматривались два различных, но в чем то дополняющих одно другое, направления исследований. В одном направлении решались уравнения МГД для изучения IS и RD. При этом предполагалось, что использование наиболее простой формы уравнений (по сравнению с кинетическим описанием) может прояснить физику изучаемых явлений. Исследования в этом направлении [см., например, 56,88-93] выявили две главные проблемы применения МГД-теорий к RD и IS:

- 1) существование и/или структура решений может сильно зависеть от того, какие члены удерживаются в МГД уравнениях;

2) МГД теории не применимы к бесстолкновительной плазме с большими β .

Вторым направлением является кинетическое изучение IS и RD с использованием гибридных кодов (ионы - частицы; электроны - безмассовая жидкость) [66,94-101], рассмотренное в предыдущем разделе.

В заключение приведем схематическое соответствие промежуточных УВ (IS) и вращательных разрывов (RD) в рамках трех моделей (идеальной МГД (ИМГД), резистивной МГД (РМГД) и гибридной модели) [100]:

- в ИМГД IS не существуют;
- в РМГД моделировании RD заменяется на IS (типа 2→4) в случае когда $B_y=0$, и на TDIS при $B_y \neq 0$;
- в гибридном моделировании TDIS быстро эволюционирует к RD за счет кинетических эффектов частиц, учитываемых в рассмотрении.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 96-01-01171а.

Литература

1. Филиппчев Д.С. Гибридное моделирование плазмы космического пространства: Модели с представлением электронов в виде безмассовой жидкости. I. Бесстолкновительные ударные волны. //Прикладная математика и информатика N 1: Сб./Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева - М.: Диалог-МГУ, 1999, с. 20-50.
2. Darwin C.G. The dynamical motions of charged particles. //Phyl.Mag.1920. Vol.59, N 6. P.537-551.
3. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma physics via computer simulation'. - New York: McGraw-Hill. 1985. *Имеется перевод:* Бэдселл Ч., Лонгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. - М.: Энергоатомиздат, 1989. 452с.
4. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. - Новосибирск: Наука СО, 1980. 95с.
5. Березин Ю.А., Федорук М.П. Моделирование нестационарных плазменных процессов. - Новосибирск: Наука СО, 1993. 357с.
6. Boris J.P. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code. //Proceedings, Fourth conference on Numerical Simulation of Plasmas/Edited by J.P.Boris, R.Shanny - Washington, D.C.,USA: U.S.Government Printing Office,1970. P. 3-67.
7. Winske D. Hybrid simulation codes with application to shocks and upstream waves. //Space Sci. Rev. 1985. Vol. 42, N 1-2. P.53-66.
8. Chodura R. A hybrid fluid-particle model of ion heating in high-Mach-number shock waves. //Nucl.Fusion.1975. Vol. 15, N 1. P. 55-61.
9. Sgro A.G., Nielson C.W. Hybrid model studies of ion dynamics and magnetic field diffusion during pinch implosions. //Phys.Fluids.1976. Vol. 19, N 1. P. 126-133.
10. Hamasaki S., Krall N.A., Wagner C.E., Byrne R.N. Effect of turbulence on theta pinch modeling by hybrid numerical models. //Phys.Fluids.1977. Vol. 20, N 1. P. 65-71.
11. Leroy M.M., Goodrich C.C., Winske D., Wu C.S., Papadopoulos K. Simulation of a perpendicular bow shock. //Geophys.Res.Lett.1981. Vol.8, N 12. P.1269-1272.
12. Leroy M.M., Winske D., Goodrich C.C., Wu C.S., Papadopoulos K. The structure of perpendicular bow shocks//J.Geophys.Res. A. 1982. Vol.87, N A7. P.5081-5094.
13. Leroy M.M., Winske D. Backstreaming ions from oblique earth bow shocks. //Ann.Geophys.1983. Vol.1, N 6. P.527-536.
14. Winske D. Leroy M.M. Diffuse ions produced by electromagnetic ion beam instabilities. //J.Geophys.Res.A.1984. Vol.89, N A5. P.2673-2688.
15. Winske D., Wu C.S., Li Y.Y., Zhou G.C. Collective capture of released lithium ions in the solar wind. //J.Geophys.Res.1984. Vol.89, N A9. P.7327-7330.
16. Winske D. Wu C.S., Li Y.Y., Mou Z.Z., Guo S.Y. Coupling of newborn ions to the solar wind by electromagnetic instabilities and their interaction with the bow shock. //J.Geophys.Res.A.1985. Vol.90, N A3. P.2713-2726.
17. Hada T., Kennel C.F. Nonlinear evolution of slow waves in solar wind. //J.Geophys.Res.A.1985. Vol.90, N A1. P.531-535.

18. Hewett D.W. A global method of solving the electron-field equations in a zero-inertia-electron-hybrid plasma simulation code. // *J.Comput.Phys.* 1980. Vol.38, N 3. P.378-395.
19. Hewett D.W., Seyler C.E. Reconnection phenomena during the formation phase of field-reversal experiments. // *Phys.Rev.Lett.* 1981. Vol.46, N 23. P.1519-1522.
20. Hewett D.W. Spontaneous development of toroidal magnetic field during formation of field reversed theta pinch. // *Nucl.Fusion.* 1984. Vol.24, N 3. P.349-357.
21. Friedman A., Sudan R.N., Denavit J. A linearized 3D hybrid code for stability studies of field-reversed ion rings. // *J.Comput.Phys.* 1981. Vol. 40, N 1. P. 1-35.
22. Byers J.A., Cohen B.I., Condit W.C., Hanson J.D. Hybrid simulation of quasineutral phenomena in magnetized plasma. // *J.Comput.Phys.* 1978. Vol.27, N 3. P.363-396.
23. Tanaka M. Simulations of heavy ion heating by electromagnetic ion cyclotron waves induced by proton temperature anisotropies. // *J.Geophys.Res.A.* 1985. Vol.90, N A7. P.6459-6468.
24. Omura Y., Ashour-Abdalla M., Quest K., Gendrin R. Heating of thermal helium in the equatorial magnetosphere: a simulation study. // *J.Geophys.Res.A.* 1985. Vol.90, N A9. P.8281-8292.
25. Harned D.S. Quasineutral hybrid simulation of macroscopic plasma phenomena. // *J.Comput.Phys.* 1982. Vol.47, N 3. P.452-462.
26. Harned D.S. Rotational instabilities in the field reversed configuration: results of hybrid simulations // *Phys.Fluids.* 1983. Vol.26, N 5. P.1320-1326.
27. Winske D., Leroy M.M. Hybrid simulation techniques applied to the Earth's bow shock. // *Computer Simulation of Space Plasmas. - Selected Lectures from the Firth ISSS./Edited by H.Matsumoto, T.Sato. -Hingham,Mass.: Kluvier Academic, 1984. P. 255-278.*
28. Brecht S.H., Thomas V.A. Multidimensional simulations using hybrid particle codes. // *Comput.Phys.Commun.* 1988. Vol.48, N1. P.135-143.
29. Winske D., Omid N. Hybrid codes: Methods and applications // *Computer Space Plasma Physics Simulation techniques and software./Edited by H.Matsumoto, Y.Omura. -Tokyo: Terra Scientific, 1993. 103- .*
- Winske D., Omid N. Hybrid codes: Methods and applications. // *Tech.Rep. LA-UR 91-911, Los Alamos National Laboratory, 1991.*
30. Winske D., Omid N. A nonspecialist's guide to kinetic simulations of space plasmas. // *J.Geophys.Res.A.* 1996. Vol.101, N A8. P.17287-172303.
31. Stringer T.E. Low-frequency waves in an unbounded plasma. // *Plasma Phys.* 1963. Vol. 5, N 2. P.89-107.
32. Formisano V., Kennel C.F. Small amplitude waves in high β plasmas. // *J.Plasma Phys.* 1969. Vol. 3, Pt. 1. P.55-74.
33. Chew G.F., Goldberger M.L., Low F.E. The Boltzmann equation and one-fluid hydrodynamic equations in the absence of particle collisions. // *Proc.Roy.Soc.London.* 1956. Vol. A236, N1204. P.112-118. перевод: Чу Г., Гольдбергер М., Лоу Ф. Уравнение Больцмана и гидромагнитные уравнения для одной жидкости без столкновений. - *Проблемы Современной Физики. -М.:ИЛ, 1957. N 7. С. 139-145.*
34. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме. // *Вопросы теории плазмы. - М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183-272.*
- Braginskii S.I. Transport processes in a plasma. // *Reviews of Plasma Physics - New York: Consultants Bureau, Vol. 1. 1965. pp. 205-311.*
35. Macmahon A. Finite gyroradius corrections to the hydromagnetic equations for a Vlasov plasma. // *Plasma Phys.* 1965. Vol. 8, N 10. P.1840-1845.
36. Stix T.H. The Theory of Plasma Waves. - New York: McGraw-Hill, 1962. *Имеется перевод: Стикс Т. Теория плазменных волн. - М.: Атомиздат, 1965. 343 с.*
37. Электродинамика плазмы/Ахизер А.И., Ахизер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. /под ред. А.И. Ахизера. - М.: Наука, 1974. 720с.
38. Barnes A. Collisionless damping of hydromagnetic waves. // *Phys Fluids.* 1966. Vol. 9, N 8. P.1483-1495.
39. Foote E.A., Kulsrud R.M. Hydromagnetic waves in high β plasmas. // *Astrophys.J.* 1979. Vol. 233, N 1. Pt. 1. P.302-316.
40. Huba J.D. Hall magnetohydrodynamics in space and laboratory plasmas. // *Phys. Plasmas* 1995. Vol. 2, N 6. Pt. 2. P. 2504-2513.
41. Lottermoser R.-F., Scholer M. Undriven magnetic reconnection in magnetohydro-dynamics and Hall magnetohydrodynamics. // *J.Geophys.Res.A.* 1997. Vol. 102, N A3. P. 4875-4892.
42. Сагдыев Р.З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // *Вопросы теории плазмы. - М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20-80.*

43. Greenstadt E.W. Oblique, parallel, and quasi-parallel morphology of collisionless shocks. //Collisionless Shocks in the Heliosphere: Reviews of Current Research /*Geophys.Monogr.Ser. Vol.35 /Edited by B.T.Tsurutani, R.G.Stone. -Washington, D.C.: AGU, 1985. P.169-184.*
44. Quest K.B. Simulation of quasi-parallel collisionless shocks. //Collisionless Shocks in the Heliosphere: Reviews of Current Research/*Geophys.Monogr.Ser.Vol.35/Edited by B.T.Tsurutani, R.G.Stone. - Washington, D.C.: AGU, 1985. P.185-194.*
45. Великович А.Л., Либерман М.А. Физика ударных волн в газах и плазме. - М.:*Наука*, 1987. 295 с.
46. Kan J.R., Mandt M.E., Lyu L.H. Quasi-parallel collisionless shocks. //Space Sci. Rev. 1991. **Vol.57**, N3-4. P.201-236.
47. Sagdeev R.Z., Kennel C.F. Collisionless shock waves. //Scientific American 1991. **Vol.264**, N4. P. 106-113.
48. Anderson J.E. Magnetohydrodynamic Shock Waves. -Cambridge: Massachusetts Inst.Technology. 1963. 226р. *Имеется перевод: Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике.- М.: Атомиздат, 1968. 271 с.*
49. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.: *Наука*, 1966.
50. Kennel C.F., Blandford R.D., Coppi P. MHD intermediate shock discontinuities: Part 1. Rankine-Hugoniot conditions. //J.Plasma Phys. 1989. **Vol.42**, Pt. 2, P. 299-319.
51. De Hoffman F., Teller E. Magnitohydrodynamic shocks. //Phys.Rev. 1950. **Vol.80**, N 4, P.692-703.
52. Schwartz S.J., Thomsen M.F., Gosling J.T. Ions upstream of the Earth's bow shock: A theoretical comparison of source populations.//J.Geophys Res.A. 1983. **Vol.88**, N A3, P. 2039-2047.
53. Hudson P.D. Reflection of charged particles by plasma shocks. //Mon.Not.Roy. Astron.Soc. 1965. **Vol.131**, N 1, P. 23-49.
54. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика, Часть 1. - М.: *Наука*, 1995. (Т. V)
55. Kennel C. F., Blandford R.D., Wu C.C. Structure and evolution of small amplitude intermediate shock waves. //Phys Fluids.B. 1990. **Vol.B2**, N 2, P. 253-269.
56. Hau L.-N., Sonnerup B.U.O. On the structure of resistive MHD intermediate shocks. //J.Geophys.Res.A.1989. **Vol.94**, N A6. P.6539-6551.
57. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws.II. //Commun. Pure & Appl. Math. 1957. **Vol.10**, N 4, P. 537-566.
58. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: *Наука*, 1982. (Т. VIII)
59. Сыроватский С.И. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике.//ЖЭТФ 1958. **T. 35**. N 6 (12). С. 1466-1470.
60. Cargill P.J., Eastman T.E. The structure of tangential discontinuities. I.Results of hybrid simulations. //J.Geophys.Res.A.1991. **Vol.96**, NA8. P.13763-13780.
61. Lee L.C., Kan J.R. A unified model of tangential magnetopause structure. //J.Geophys.Res.1979. **Vol.84**, N11. P.6417-6426.
62. Thomas V.A., Winske D. Kinetic simulations of the Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause.//J.Geophys.Res.A.1993. **Vol.98**, N A7. P.11425-11438.
63. Quest K.B. Simulations of high Mach number perpendicular shocks with resistive electrons //J.Geophys.Res.A.1986. **Vol.91**, NA8. P.8805-8815.
64. Burgess D. Numerical simulation collisionless shocks. //Proc.Intern.Symposium of Collisionless Shocks /Edited by K. Szergo -Budapest; CRIP, 1987. P.89-111.
65. Krauss-Varban D. Waves association with quasi-parallel shocks: Generation, mode conversion and implications. //Adv. Space Rev. 1995. **Vol.15**, N8/9. P.271-284.
66. Karimabadi H., Krauss-Varban D., Omidi N. Kinetic structure of intermediate shocks: Implications for the magnetopause. //J.Geophys.Res.A.1995. **Vol.100**, NA7. P.11957-11979.
67. Swift D.W. On the structure of the magnetic slow switch-off shock. //J.Geophys.Res.A.1983. **Vol.88**, NA7. P.5685-5691.
68. Winske D., Stover E.K., Gary S.P. The structure and evolution of slow mode shocks. //Geophys.Res.Lett.1985. **Vol.12**, N5. P. 295-298.
69. Winske D. Numerical modeling of slow shock. //Proc.Sixth Int. Solar Wind Conference/Edited by V.J.Pizzo, T.E.Holzer, D.G.Sime. 1988. P.387
70. Lee L.C., Lin Y., Shi Y., Tsurutani B.T. Slow shock characteristics as a function of distance from the X-line in the magnetotail. //Geophys.Res.Lett.1989. **Vol.16**, N8. P.903-906.

71. Omidi N., Winske D. Structure of slow magnetosonic shocks in low beta plasmas //Geophys.Res.Lett.1989. Vol.16, N8. P.907-910.
72. Winske D., Omidi N. Electromagnetic ion/ion cyclotron instability at slow shocks. //J.Geophys.Res.Lett.1990. Vol.17, N13. P.2297-2300.
73. Lin Y., Lee L.C. Chaos and ion heating in a slow shock. //Geophys.Res.Lett.1991. Vol.18, N 8. P.1615-1618.
74. Omidi N., Winske D. Kinetic structure of slow shocks: Effects of the electromagnetic ion/ion cyclotron instability. //J.Geophys.Res.A.1992.Vol.97, NA10.P.14801-14821.
75. Vu H.X., Brackbill J.U., Winske D. Multiple slow switch-off shock solutions. //J.Geophys.Res.A.1992. Vol.97, N A9. P.13839-13852 .
76. Winske D., Omidi N. Electromagnetic ion/ion cyclotron instability: Theory and simulations. //J.Geophys.Res.A.1992. Vol.97, NA10. P.14779-14799.
77. Karimabadi H. Steepening of Alfvén waves and its effects on the structure of slow shocks //Geophys.Res.Lett.1995. Vol.22, N20. P.2693-2696.
78. Omidi N. Magnetic structure of slow shocks and the associated ion dissipation. //Adv. Space Res. 1995. Vol.15, N8/9. P.489-500.
79. Omidi N., Johnson M., Krauss-Varban D., Karimabadi H. Two-dimensional structure of slow shocks //Geophys.Res.Lett.1995. Vol.22, N3. P.299-302.
80. Coroniti F.V. Laminar wave-train structure of collisionless magnetic slow shocks. //Nucl.Fusion.1971.Vol.11, N 3. P.261-263.
81. Lin Y., Lee L.C. Structure of reconnection layers in the magnetopause. //Space Sci.Rev. 1994. Vol.65, N 1-2. P.59-179.
82. Fujimoto M., Nakamura M. Acceleration of heavy ions in the magnetail reconnection layer. //Geophys.Res.Lett.1994. Vol.21, N 25. P.2955-2958.
83. Lin Y., Lee L.C. A simulation study of the Riemann problem associated with the magnetotail reconnection. //J.Geophys.Res.A.1995. Vol.100, N A10. P.19227-19237.
84. Lin Y., Swift D.W. A two-dimensional hybrid simulation of the magnetotail reconnection layer. //J.Geophys.Res.A.1996. Vol.101, N A9. P.19859-19870.
85. Brackbill J.U., Vu H.X. Electron kinetic effects in switch-off slow shocks. //Geophys.Res.Lett.1993. Vol.20, N 19. P.2015-2018.
86. Vu H.X., Brackbill J.U. SELESTID: an implicit, fully kinetic model for low-frequency, electromagnetic plasma simulation. //Comput.Phys.Commun.1992. Vol.69, N 2-3. P. 253-276.
87. Shercliff J.A. One-dimensional magnetogasdynamics in oblique fields. //J.Fluid.Mech. 1960. Vol.9, Pt.4. P. 481-505.
88. Wu C.C. On MHD intermediate shocks. //Geophys.Res.Lett.1987. Vol.14, N 6. P.668-671.
89. Wu C.C. The MHD intermediate shock interaction with an intermediate wave: Are intermediate shocks physical? //J.Geophys.Res.A.1988. Vol.93, N A2. P.987-990.
90. Wu C.C. Effects of dissipation on rotational discontinuities. //J.Geophys.Res.A.1988. Vol.93, N A5. P.3969-3982.
91. Wu C.C. Formation, structure, and stability of MHD intermediate shocks. //J.Geophys.Res.A.1990. Vol.95, N A6. P.8149-8175.
92. Hau L.-N., Sonnerup B.U.O. The structure of resistive-dispersive intermediate shocks. //J.Geophys.Res.A.1990. Vol.95, N A11. P.18791-18808.
93. Hau L.-N., Sonnerup B.U.O. The thickness of resistive-dispersive shocks. //J.Geophys.Res.A. 1992. Vol.97, N A6. P.8269-8275.
94. Lee L.C., Huang L., Chao J.K. On the stability of rotational discontinuities and intermediate shocks. //J.Geophys.Res.A.1989. Vol.94, NA7. P.8813-8825.
95. Wu C.C., Hada T. On rotational discontinuities in both two-fluid and hybrid models. //J.Geophys.Res.A.1991. Vol.96, N A3. P.3755-3767.
96. Wu C.C., Hada T. Formation of intermediate shocks in both two-fluid and hybrid models. //J.Geophys.Res.A.1991. Vol.96, N A3. P.3769-3778.
97. Karimabadi H., Omidi N. Hybrid simulations of intermediate shocks: Coplanar and noncoplanar solutions. //Geophys.Res.Lett.1992. Vol.19, N17. P.1723-1726.
98. Karimabadi H. Physics of intermediate shocks: A review. //Adv. Space Res. 1995. Vol.15, N8/9. P.507-520.
99. Krauss-Varban D., Karimabadi H., Omidi N. Kinetic structure of rotational discontinuities: Implications for the magnetopause. //J.Geophys.Res.A.1995. Vol.100, NA7. P.11981-11999.

100. Lin Y., Lee L.C. Formation of the magnetopause boundary layer by magnetic reconnection. //Adv. Space. Res. 1995. Vol.15, N 8/9. P.531-535.
- 101.Lin Y., Lee L.C. Structure of the dayside reconnection layer in resistive MHD and hybrid models. //J.Geophys.Res.A.1993. Vol.98, N A3. P.3919-3934.
102. Burgess D. Cyclic behavior at quasi-parallel collisionless shocks. //Geophys.Res.Lett.1989.Vol.16, N5. P.345-348.
- 103.Ахисзер А.И., Любарский Г.Я., Половин Р.В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике.//ЖЭТФ 1958. Т. 35. N 3 (9). С. 731-737.