Д.С.Филиппычев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОВЕДЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА *

1. Введение

В работе [1] для получения асимптотического решения сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения плазма-слой с ядром Эммерта [2] использовался метод пограничных функций [3-5]. Это уравнение описывает распределение потенциала, как в слое, так и в основном объеме плазмы. В методе пограничных функций [3-5] решение представляется в виде регулярного и пограничного рядов по степеням малого параметра μ:

$$u(\xi,\mu) = Ru(\xi,\mu) + \Pi u(\zeta,\mu),$$

$$Ru(\xi,\mu) = R_0u(\xi) + \mu R_1u(\xi) + \ldots + \mu^n R_nu(\xi) + \ldots,$$

$$\Pi u(\zeta,\mu) = \Pi_0u(\zeta) + \mu\Pi_1u(\zeta) + \ldots + \mu^n\Pi_nu(\zeta) + \ldots$$

После формальной подстановки разложения в рассматриваемое уравнение коэффициенты рядов $Ru(\xi,\mu)$ и $\Pi u(\zeta,\mu)$ определяются в результате приравнивания членов одного порядка по μ (раздельно для членов, зависящих от ξ и $\zeta \equiv (1-\xi)/\mu$ – растянутой переменной). За вырожденное решение этого метода выбиралось одно из аналитических решений плазменного уравнения работы [2].

Из общих соображений, в работе [1] было сделано утверждение, что однородное сингулярное интегральное уравнение первого рода, описывающее поведение поправки первого порядка регулярного ряда, имеет только тривиальное решение. В данной работе дается обоснование этого утверждения об отсутствии нетривиального решения. Кроме того, в работе [1] было получено дифференциальное уравнение второго порядка для пограничной функции нулевого порядка. В данной работе приводится численный алгоритм решения этого уравнения, пригодный, как для решения краевой задачи (в частности, одно условие на бесконечности), так и для корректного решения задачи Коши.

---

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 02-01-00299.

2. Уравнение плазма-слой Эммерта [2]

Для тепловых ионов уравнение плазма-слой было получено в работе [2]. В безразмерных переменных (ξ – пространственная переменная; $u(\xi)$ – потенциал) оно выглядит следующим образом:

$$\mu^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} = -e^{-u} + be^{\chi u}\left\{J^1 - J^{\xi}(u)\right\} \equiv f(u,\xi) \qquad (1)$$

$$J^1 = \int_0^1 h(\xi')K^1(u')d\xi', \; J^{\xi}(u,\xi) = \int_0^{\xi} h(\xi')K^{\xi}(u,u')d\xi',$$

$$K^1(u') = e^{-\chi u'}, \; K^{\xi}(u,u') = e^{-\chi u'} erf(\sqrt{\chi(u-u')})$$

Здесь были использованы обозначения: $h(\xi)$ – функция формы источника ионов, $u = u(\xi), u' = u(\xi')$, $\mathrm{erf}(x)$ – функция ошибок (интеграл вероятностей). χ, Z, b, μ – параметры задачи, имеющие постоянные значения.

В работе [2] уравнение (1) дополнялось краевыми условиями: $u(0) = 0$ в медианной плоскости и условие на стенке $u(1) = u_w$. В газоразрядной плазме выполняется неравенство $\mu \ll 1$, поэтому в уравнении (1) перед старшей производной стоит малый параметр μ^2 . Положив формально $\mu = 0$, получим *плазменное приближение* ($0 = f(u,\xi)$), которое справедливо только в области вне пристеночного слоя:

$$e^{-u} = be^{\chi u}\left\{J^1 - J^{\xi}(u)\right\}. \qquad (2)$$

Для уравнения (2) имеется только одно краевое условие $u(0) = 0$.
Поскольку частная производная $f(u,\xi)$ по ξ равна нулю

$$f_{\xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} = -be^{\chi u}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(J^{\xi}(u)\right) = -bh(\xi)\mathrm{erf}(\sqrt{\chi(u-u')})\big|_{u'=u} = 0,$$

то дифференцирование по ξ сводится к дифференцированию по u $df/d\xi = f_u\, du/d\xi + f_{\xi} = f_u\, du/d\xi$. Используя (2), получаем:

$$f_u(u,\xi) = (1+\chi)e^{-u_0} - b\sqrt{\frac{\chi}{\pi}}\int_0^{\xi}\frac{h(\xi')d\xi'}{\sqrt{u(\xi)-u(\xi')}} = 0. \qquad (3)$$

Замена переменной интегрирования $d\xi' \to (d\xi'/du')du'$ приводит к интегральному уравнению [2]

$$e^{-u(\xi)} = B\int_0^{u(\xi)}\frac{d\xi'}{du'}h(u')\frac{du'}{\sqrt{u-u'}}, \qquad (4)$$

решение, которого было получено в неявном виде для произвольной функции источника $h(\xi)$ [2] с использованием преобразования Шлемильха [6]:

$$\pi Bh(u)\sqrt{u}\frac{d\xi}{du}=1-2\sqrt{u}D(\sqrt{u}). \qquad (5)$$

В данной работе используется $h(\xi)$, соответствующая одной из форм функции источника работы [2]:

$$h(\xi)=\begin{cases}2, & 0<\xi<1/2=\xi_S,\\ 0, & 1/2<\xi.\end{cases} \qquad (6)$$

При этом решение плазменного приближения дается выражением

$$\begin{cases}\pi B\xi = D(\sqrt{u_0(\xi)}), & 0\le\xi<1/2,\\ \pi B = 2D(\sqrt{u_0(\xi)}), & \xi\ge 1/2.\end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $D(x)\equiv \exp(-x^2)\int_0^x \exp(t^2)dt$ – функция Доусона, $\mathrm{B}\equiv \mathrm{b}\sqrt{\dfrac{\chi}{\pi}\dfrac{1}{1+\chi}}$.

После интегрирования по всей области с учетом нормировки работы [2] $\int_0^1 h(\xi')d\xi'=1$ получается соотношение $\pi B=2D(\sqrt{u_1})$, в котором величина u_1 соответствует значению решения уравнения (2) на входе в слой $\xi=1$. В работе [2] для нахождения u_1 было получено трансцендентное уравнение, решение которого можно получить только численными методами. После нахождения u_1 вычисляется параметр B и, следовательно, b.

Физические параметры задачи, использованные в расчетах, также соответствовали параметрам работы [2]: $Z=1, \chi=1$. Значения $u_0(\xi)$ получаются в результате численного решения уравнения (7) методом деления отрезка пополам. При значениях $\xi\ge 1/2$ решением является $u_0(\xi)=const=u_0(1)=u_1=0.40445$.

В результате применения метода пограничных функций [3-5] к уравнению плазма слой была получена система уравнений для определения неизвестных функций $RF_k(u(\xi),\xi;\mu)$ и $\Pi F_k(u(\zeta),\zeta;\mu)$ [1]:

$$0=R_0F(u,\xi)=f(u(\xi),\xi), \qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_0 u(\zeta)=\Pi_0 F(u,\zeta), \qquad (8)$$

$$0 = R_1 F(u,\xi), \qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_1 u(\zeta) = \Pi_1 F(u,\zeta), \tag{9}$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}R_{k-2}u(\xi) = R_k F(u,\xi), \qquad \frac{d^2}{d\zeta^2}\Pi_k u(\zeta) = \Pi_k F(u,\zeta).$$

Первое соотношение (8) представляет собой вырожденное $(\mu = 0)$ уравнение плазма-слой и является уравнением плазменного приближения (2). Нетрудно показать, что на плазменном решении вторая производная правой части уравнения (1) имеет неинтегрируемую особенность (подробнее см. [1]). Поэтому, реально можно рассматривать только уравнения для нулевого (8) и первого (9) приближений.

3. Коэффициент первого приближения регулярного ряда $R_1 u(\xi)$

Коэффициент при первой степени μ регулярной части разложения решения $R_1 u(\xi)$ определяется из первого соотношения (9) $R_1 F(u,\xi) = 0$. Для сокращения записи обозначим $Y(\xi) \equiv R_1 u(\xi)$. $R_1 F(u,\xi)$ представляет собой сумму двух слагаемых (подробнее, см. [1]). Первое слагаемое получается в результате дифференцирования $f(u(\xi;\mu),\xi)$ по μ $(d/d\mu = f_u\, du/d\mu)$ на плазменном решении $u(\xi) = u_0(\xi)$ при $\mu = 0$ и, следовательно, вклад этого слагаемого равен нулю. Поскольку $f_u(u_0,\xi) = 0$ (3), то $f_u\big|_{u=u_0} Y(\xi) = 0$. Второе слагаемое получается в результате разложения в ряд ядер интегралов (при первой степени по μ) и рассмотрения членов относящихся к переменной интегрирования $u' = u(\xi')$. Таким образом, для $R_1 u(\xi)$ получается однородное сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$\chi\, e^{\chi u_0} \int_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'} Y(\xi')d\xi' - \int_0^{\xi^*} K_x(x) Y(\xi')d\xi' = 0, \tag{10}$$

где $\quad \xi^* = \begin{cases} \xi^* = \xi, \xi \le 1/2 = \xi_S \\ \xi^* = 1/2, 1/2 < \xi \le 1 \end{cases}, \qquad K_x(x) = \left\{ \chi e^{\chi x}[\mathrm{erf}(\sqrt{\chi x})] + \sqrt{\frac{\chi}{\pi x}} \right\},$

$x \equiv u(\xi) - u(\xi')$. При получении (10) была использована функция источника (6). На функцию $Y(\xi)$ накладывается краевое условие в начале координат $Y(\xi = 0) = 0$.

Поскольку первый интеграл в левой части не зависит от переменной ξ и, следовательно, равен постоянной величине, то введем обозначение $C_{un} \equiv \chi \int\limits_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'} \Upsilon(\xi')d\xi'$. Следует отметить, что C_{un} является функционалом от искомого решения $Y(\xi)$, т.е. $C_{un} = C_{un}[Y]$. Целесообразно представить интеграл в левой части (10), как суперпозицию двух интегралов:

$$\int\limits_0^{\xi^*} K_x(x)Y(\xi')d\xi' = \chi \,\mathrm{I}^{(1)}(\xi) + \sqrt{\chi/\pi}\,\mathrm{I}^{(2)}(\xi),$$

$$\mathrm{I}^{(1)}(\xi) = \int\limits_0^{\xi^*} \mathrm{e}^{\chi(u_0(\xi)-u_0(\xi'))}\mathrm{erf}\left(\sqrt{\chi(u_0(\xi)-u_0(\xi'))}\right)Y(\xi')d\xi' \ ,$$

$$\mathrm{I}^{(2)}(\xi) = \int\limits_0^{\xi^*} \frac{Y(\xi')}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}}d\xi' \ .$$

В результате уравнение (10) приводится к следующему виду:

$$C_{un} \equiv \chi \int\limits_0^{\xi_S} e^{-\chi u_0'} \Upsilon(\xi')d\xi' = \mathrm{e}^{-\chi u_0} \int\limits_0^{\xi^*} K_x(x)Y(\xi')d\xi' =$$

$$= \mathrm{e}^{-\chi u_0}\left\{\chi \,\mathrm{I}^{(1)}(\xi) + \sqrt{\chi/\pi}\,\mathrm{I}^{(2)}(\xi)\right\} \equiv \mathrm{Inv}(\xi). \qquad (11)$$

Из приведенных выше выражений следует, что в области вне источника $(1/2 = \xi_S \le \xi \le L = 1)$ искомая поправка имеет постоянное значение $Y(\xi) = R_1 u(\xi) = const = Y(\xi_S)$, поскольку в этой области $u_0(\xi) = const = u_0(\xi = \xi_S = 1/2) = u_0(\xi = 1)$. Таким образом, уравнение (11) достаточно решить только в области источника $(0 \le \xi \le \xi_S = 1/2)$.

Рассматриваемое однородное сингулярное интегральное уравнение (10) (или (11)) всегда имеет тривиальное решение $Y(\xi) = 0$. Помимо этого оно может иметь бесконечно много нетривиальных решений.

Соотношение (11) должно выполняться для любого ξ из диапазона $0 \le \xi \le \xi_S = 1/2$ и, следовательно, при $\xi = 0$: $C_{un} = \sqrt{\chi/\pi}\,\mathrm{I}^{(2)}(\xi = 0)$. Сделаем в интеграле $\mathrm{I}^{(2)}(\xi)$ замену переменной интегрирования $\xi' \to u'$. После использования формулы (5) получим

$$\mathrm{I}^{(2)}(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \frac{Y(\xi')d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi)-u_0(\xi')}} = \int\limits_0^{u_0} \frac{Y(\xi')}{\sqrt{u_0 - u_0'}}\frac{d\xi'}{du_0'}du_0' =$$

$$= \frac{1}{2\pi B}\int\limits_0^{u_0} \frac{Y(u_0')}{\sqrt{u_0 - u_0'}} \frac{\left(1 - 2\sqrt{u_0'}D(\sqrt{u_0'})\right)}{\sqrt{u_0'}}du_0' .$$

Рассмотрим малую окрестность начала координат $0 \le \xi \le \varepsilon$, в которой $Y(\xi)$ можно аппроксимировать с большой точностью линейной зависимостью $Y(\xi)=\alpha u_0$. Тогда получим

$$\mathrm{I}^{(2)}(\varepsilon)=\frac{\alpha}{2\pi B}\int\limits_0^{u_0(\varepsilon)}\frac{u_0'}{\sqrt{u_0(\varepsilon)-u_0'}}\frac{\left(1-2\sqrt{u_0'}D(\sqrt{u_0'})\right)}{\sqrt{u_0'}}du_0'.$$

После замены переменной интегрирования $u_0'=t^2u_0$ $\left(u_0'=u_0 2tdt\right)$ и простых преобразований получаем равенство

$$\mathrm{I}^{(2)}(\varepsilon)=\frac{\alpha u_0(\varepsilon)}{\pi B}\left\{\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int\limits_0^1\sqrt{1-t^2}\left[1-2t\sqrt{u_0(\varepsilon)}D(t\sqrt{u_0(\varepsilon)})\right]dt-\right.$$

$$\left.-2\sqrt{u_0(\varepsilon)}\int\limits_0^1\frac{D(t\sqrt{u_0(\varepsilon)})}{\sqrt{1-t^2}}tdt\right\}.$$

Первый интеграл правой части является табличным и равняется $\arcsin(t)\big|_0^1=\pi/2$, второй интеграл не имеет особенностей, а третий равняется $\frac{\pi}{4}\sqrt{u_0(\varepsilon)}-u_0(\varepsilon)\int\limits_0^1 D(t\sqrt{u_0(\varepsilon)})\sqrt{1-t^2}\,2tdt$, т.е. также не имеет особенностей. При $\varepsilon\to 0$ $u_0(\varepsilon)\to 0$ и правая часть равенства обращается в нуль $\mathrm{I}^{(2)}(\varepsilon=0)=0$. Следовательно, $C_{un}=0$ и $\int\limits_0^{\xi_S}e^{-\chi u_0'}Y(\xi')d\xi'=0$. Из последнего равенства вытекает $Y(\xi)=0$. Таким образом, однородное линейное сингулярное интегральное уравнение (11) имеет только тривиальное решение.

4. Численное решение уравнения погранфункции нулевого порядка

Поведение погранфункции нулевого порядка $\Pi_0 u(\zeta)$ описывается вторым уравнением (8). Член нулевого порядка сингулярной части разложения правой части уравнения (1) определяется как $\Pi_0 F(u_0+\Pi_0 u(\zeta);\xi)-\Pi_0 F(u_0;\zeta)$ [3-5]. При переходе к интегрированию по "растянутой" координате $\zeta=(1-\xi)/\mu$ интегралы преобразуются к виду $\int[]\,\mathrm{d}\,\xi=-\mu\int[]d\zeta$. Поэтому вклад интегральных членов в сингулярную часть правой части уравнения начинается только с первого порядка по μ. Таким образом, в нулевом порядке сингулярная часть правой части уравнения (8) принимает вид:

$$\Pi_0 F(u,\zeta)=-\,\mathrm{e}^{-u}\Big|_{u=u_0(\xi)}^{u=u_0(\xi)+\Pi_0 u(V)}=c\left(1-\mathrm{e}^{-\Pi_0 u(\zeta)}\right),$$

где $c \equiv e^{-u_1}$. В итоге получается уравнение для нахождения погранфункции нулевого порядка:

$$\frac{d^2\Pi_0 u(\zeta)}{d\zeta^2} = c\left(1 - e^{-\Pi_0 u(\zeta)}\right) \tag{12}$$

с краевыми условиями: $\Pi_0 u(\zeta = 0) = C_W = u_W - u_1$; $\Pi_0 u(\zeta \to \infty) \to 0$. В дальнейшем для сокращения записи вместо $\Pi_0 u(\zeta)$ будем использовать обозначение $\Pi(\zeta)$ или просто Π.

В работе [1] для уравнения погранфункции нулевого порядка (12) рассматривалась задача Коши с граничными условиями:

$$\Pi(\zeta)\big|_{\zeta=0} = C_W,$$

$$\mathrm{d}\,\Pi(\zeta)/\mathrm{d}\,\zeta\big|_{\zeta=0} = -\mu Q, \text{ где } Q = \mathrm{d}u(\xi)/\mathrm{d}\xi\big|_{\xi=L}. \tag{13}$$

Величина Q в условии (13) вычислялась по результатам численного решения уравнения плазма - слой [7,8]. Результаты расчетов [1] привели к следующему поведению решения: с увеличением значения ζ величина $\Pi(\zeta)$ сначала, как и ожидалось, уменьшалась, а затем увеличивалась (вместо стремления к нулю).

В этой работе рассмотрим другой путь решения уравнения (12). Сделаем замену переменной $Z(\zeta) = \exp(-\Pi(\zeta))$. Тогда (12) перейдет в уравнение

$$Z\frac{d^2 Z}{d\zeta^2} - \left(\frac{dZ}{d\zeta}\right)^2 = -c(1 - Z)Z^2,$$

которое после перехода к новым неизвестным $p(Z) = dZ/d\zeta$ и $\eta(Z) = p^2$ принимает следующий вид:

$$Z\frac{d\eta}{dZ} - 2\eta = -2c(1 - Z)Z^2. \tag{14}$$

Уравнение (14) имеет точное аналитическое решение:

$$\eta(Z) = Z^2\{2c[Z - Ln(Z)] + C_1\}. \tag{15}$$

Используя второе условие на погранфункцию $\Pi(\zeta \to \infty) = 0$, получаем

$$Z(\zeta \to \infty) = 1;\ p = dZ/d\zeta = -Z\left(d\,\Pi/d\zeta\right)\big|_{\zeta\to\infty} = -\left(d\,\Pi/d\zeta\right)\big|_{\zeta\to\infty} = 0.$$

Последнее равенство учитывает экспоненциальное убывание погранфункции на бесконечности. С учетом этого условия находится постоянная $C_1 = -2c$. Таким образом, решением уравнения (14) с граничным усграничным условием $\Pi(\zeta \to \infty) = 0$ является функция:

$$\eta(Z) = 2cZ^2\{Z - Ln(Z) - 1\}.$$

Значение первой производной решения уравнения (12) вычисляется по формуле:

$$\frac{d\Pi}{d\zeta} = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\zeta} = -e^{\Pi(\zeta)}p = -e^{\Pi(\zeta)}\sqrt{\eta}. \qquad (16)$$

Численное решение уравнения (12) проводилось по следующей схеме, которую в дальнейшем будем называть схемой S:

S 1) $\Pi_1 = \Pi(0) = C_W$;

S 2) $Z_j = \exp(-\Pi_j)$, $\eta_j = 2cZ_j^2\left[Z_j - Ln(Z_j) - 1\right]$;

S 3) $p_j = \sqrt{\eta_j}$, $D_j \equiv \left(d\Pi/d\zeta\right)_j = -\exp(\Pi_j)p_j$;

S 4) $\Pi_{j+1} = \Pi_j + hD_j + h^2[1 - \exp(-\Pi_j)]c/2$, $h = \zeta_{j+1} - \zeta_j$.

Ниже будут использоваться следующие обозначения:

$\delta_j = 100 \times \left(1 - \Pi^S(\zeta_j)/\Pi_0(\zeta_j)\right)$ – относительная ошибка в j - ом узле сетки: $\Pi^S(\zeta_j)$ – решение, полученное в рассматриваемом расчете; $\Pi_0(\zeta_j)$ – “точное” решение задачи.

δ_R – относительная ошибка на правой границе области $(\zeta = 10)$.

В таблице относительная ошибка располагается в колонке, обозначенной через “%%”.

$\Delta_{1\%}$ и $\Delta_{10\%}$– области, в которых относительная ошибка меньше, соответственно, 1% и 10%%.

В таблице 1 представлено сравнение результатов расчетов по этой схеме с “точным” решением, за которое принималась разность $\Pi_0(\zeta) = u(\zeta) - u_1$. $u(\zeta)$– численное решение полного уравнения плазма слой [7, 8]. Наблюдается монотонное возрастание погрешности. Относительная ошибка меньше 10%% достигается в области вблизи левой границы $(0 \le \zeta < 0.516)$, а уровень 1% при $(0 < \zeta \le 0.0625)$. Максимальная ошибка $\delta_{\max} = \delta_R = 98.21\%$ достигается на правой границе области при $\zeta = 10$. Погрешность решения во второй точке сетки составляла $\delta_2 = 0.31\%$.

Таблица 1

j	ζ	$u(\zeta)-u_1$	$\Pi(\zeta)$	error %%
1	0.0000	2.56172	2.56172	0.00
2	0.0156	2.54648	2.53869	0.31
3	0.0313	2.53131	2.51580	0.61
4	0.0469	2.51621	2.49307	0.92
5	0.0625	2.50117	2.47048	1.23
9	0.1250	2.44167	2.38163	2.46
33	0.5000	2.10676	1.89741	9.94
34	0.5156	2.09362	1.87900	10.25
65	1.0000	1.71757	1.37448	19.98
129	2.0000	1.11951	0.68119	39.15
177	3.0000	0.72043	0.31963	55.63
209	4.0000	0.46588	0.14538	68.79
241	5.0000	0.30680	0.06510	78.78
257	6.0000	0.20759	0.02894	86.06
273	7.0000	0.14514	0.01282	91.16
289	8.0000	0.10522	0.00568	94.61
305	9.0000	0.07927	0.00251	96.83
321	1.0000	0.06215	0.00111	98.21

Оценивая полученные результаты надо иметь в виду, что была рассмотрена только погранфункция нулевого порядка. Большим значениям относительной ошибки соответствуют относительно небольшие значения абсолютной ошибки $\Delta=[u(\zeta)-u_1]-\Pi(\zeta)$. Например, $\Delta_{34}=0.215$ (уровень относительной ошибки 10%), $\Delta_R=\Delta_{321}=0.061$. Такое различие вполне может быть обусловлено погранфункцией первого порядка (т.е. решением второго уравнения (9)) поскольку $\mu=10^{-2}$.

В таблице 1 приведены результаты расчетов, проведенных на неравномерной сетке с минимальным шагом $h_0^{ir}=0.015625$, используемой в работах [1, 7, 8]. Использование равномерной сетки с шагами $h_0=h_0^{ir}, h_0^{ir}/2$ и $h_0=h_0^{ir}/4$ привело практически к тем же самым результатам. Отличия (на единицу) наблюдались только в 5-ом значащем знаке.

5. Численное решение уравнения при выборе постоянной C_1 для задачи Коши и краевой задачи

В общем случае в схеме S вычисление η_j осуществляется по формуле (15), которую с использованием соотношения $\mathrm{Ln}(Z(\zeta)) = -\Pi(\zeta)$ можно переписать, как $\eta_j = \{2c(Z_j + \Pi_j) + C_1\}Z_i^2$. Значение постоянной C_1 вычисляется в результате рассмотрения приведенного выражения в краевой точке $(K = 1, N)$:

$$C_1 = \eta_K / Z_K^2 - 2c(Z_K + \Pi_K) = (d\Pi/d\zeta)_K^2 - 2c(Z_K + \Pi_K). \qquad (17)$$

При постановке задачи Коши для уравнения (12) задается величина первой производной в начале координат $D_0 \equiv d\Pi(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=0}$. После подстановки в (17) выражения $\eta_0 = p_0^2 = Z_0^2 D_0^2 \quad (Z_0 = \mathrm{e}^{-C_W})$, вытекающего из (16), определяется значение постоянной C_1: $\quad C_1 = D_0^2 - 2c(Z_0 + C_W)$.

Расчеты по схеме S проводились для двух значений D_0:

I. $D_0 = -\mu Q = -0.9833$ (13);

II. $D_0 = -C_W\sqrt{A} = -1.2560$, $\quad A = c(1 - \exp(-C_W))/C_W$ – выражение, полученное в работе [9] на основании формализма дуального оператора [10,11].

Результаты расчетов показали, что в обоих случаях, полученные значения вблизи начала координат меньше “точного” решения (ошибка положительна). В дальнейшем, в точке $\zeta_\pm$ происходит смена знака ошибки, что означает более медленное убывание численного решения по сравнению с “точным”. После смена знака ошибка монотонно возрастает по абсолютной величине. Начиная с точки ζ_C, решение практически выходит на постоянное значение Π_C, с чем и связаны большие значения относительной ошибки. Максимальная ошибка $\delta_{\max}$ достигается на правой границе области расчета. Были получены следующие результаты:

\# для варианта I: $\delta_2 = 2\times10^{-3}$ %%; $\zeta_\pm = 0.0469$; $\zeta_C = 1.6720$; $\Pi_C = 1.739$; $\delta_{\max} = -2.7\times10^3$ %%; $\Delta_{1\%} = [0, 0.306]$; $\Delta_{10\%} = [0, 1.031]$.

\# для варианта II: $\delta_2 = 0.17$ %%; $\zeta_\pm = 1.8125$; $\zeta_C = 2.359$; $\Pi_C = 1.136$; $\delta_{\max} = -1.7\times10^3$ %%; $\Delta_{1\%} = [0, 0.109; 1.750, 1.859]$; $\Delta_{10\%} = [0, 2.156]$.

При постановке краевой задачи второе условие первого рода задавалось в точке правой границы $(j = N, \zeta_N = 10)$. В расчетах выбиралось значение, соответствующее “точному” решению [7,8]. При этом, задание значения погранфункции на правой границе области расчета

$\Pi(\zeta = L = 10) = \Pi_N$ приводит к необходимости вычисления краевого значения $\eta_N = p_N^2$, т.е. p_N. Для этого запишем разложение в ряд Тэйлора Z_{j-1} в точке ζ_j:

$$Z_{j-1} = Z_j - (dZ/d\zeta)_j h + (d^2 Z/d\zeta^2)_j h^2/2 + \ldots,$$

из которого получается

$$p_j = (Z_j - Z_{j-1})/h + (h/2Z_j)\{p^2 - Z^2 c(1-Z)\}_j. \tag{18}$$

Отбрасывая второй член правой части, получаем аппроксимацию производной низшего порядка. Выбирая $j = N$, по формуле (17) получаем значение постоянной:

$$C_1 = (1 - Z_{N-1}/Z_N)^2/h^2 - 2c(Z_N + \Pi_N). \tag{19}$$

Использование аппроксимации более высокого порядка (18) приводит к квадратному уравнению относительно $p = p_N$:

$$h^2 p^2 - 2hZ_N p + 2Z_N(Z_N - Z_{N-1}) - h^2 Z_N^2 c(1 - Z_N) = 0,$$

имеющим решение

$$p_N = Z_N\left\{1 - \sqrt{2Z_N/Z_{N-1} - 1 + h^2 c(1 - Z_N)}\right\}/h. \tag{20}$$

Применение схемы S с выбором постоянной C_1 по формуле (19) привело к следующим результатам $\delta_2 = 0.3057\,\%$; $\delta_{\max} = 74.7\,\%$ достигается в точке $\zeta_{\max} = \zeta_{246} = 5.3125$, $\Delta_{1\%} = [0, 0.0625]$; $\Delta_{10\%} = [0, 0.5156; 9.688, 10]$; $\delta_R = \delta_{321} = 4.01\,\%$. Результаты вычислений с использованием формулы (20) для получения постоянной C_1 незначительно отличаются от результатов, приведенных выше $\Delta_{10\%} = [0, 0.5156; 9.625, 10]$; $\delta_R = \delta_{321} = 3.30\,\%$.

Литература

1. Филиппычев Д.С. Метод пограничных функций для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 19: Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2004 , С. 21-40.
2. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma. //Phys.Fluids.1980. **Vol. 23**, *N* 4. P. 803-812.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: *Наука*, 1973. 272 с.

4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. - М.: *Изд-во Моск.Ун-та*, 1978. 106с.
5. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: *Высшая Школа*, 1990. 208 с.
6. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. - Cambridge: *Univ.Press*, 1927, 4-th ed. (1962, 4-th ed. reprint). *имеется перевод*: Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н. Курс современного анализа. - М.: *Физматгиз*, 1963. **Т. 1**.
7. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой с использованием сгущающейся сетки. // Прикладная математика и информатика *N* 14: Сб. /*Под ред*. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: *МАКС Пресс*, 2003, С 35-54.
8. Филиппычев Д.С.Численное моделирование уравнения плазма-слой //Вестн. Моск.ун-та. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика. 2004. № 4. С. 32-39.
9. Филиппычев Д.С. Применение формализма дуального оператора для получения пограничной функции нулевого порядка уравнения плазма-слой. // Прикладная математика и информатика № 22: Сб. /Под ред. Д.П. Костомарова, В.И.Дмитриева - М: МАКС Пресс, 2005 , С. 76- 90.
10. Cacuci D.G., Perez R.B., Protopopescu V. Duals and propagators: A canonical formalism for nonlinear equations. //J.Math.Phys. 1988. **Vol. 29**. N 2. P. 335-361.
11. Cacuci D.G., Karakashian O.A. Benchmarking the propagator method for nonlinear systems: A Burgers-Korteweg-de Vries equation. //J.Comput.Phys. 1990. **Vol. 89**. N 1. P. 63-79.