

МЕТОД ПОГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЛАЗМА-СЛОЙ*

1. Введение

В приборах и аппаратах, используемых в лабораторных экспериментах и плазменной технологии, плазма всегда ограничена стенками соответствующих устройств. При отсутствии магнитного поля в плазме имеется два характерных масштаба: L_F – длина свободного пробега и λ_D – дебаевская длина (в одномерном случае). В газоразрядной плазме как правило выполняется соотношение $L_F \gg \lambda_D$. На расстояниях от стенки больших нескольких L_F справедливо гидро- (газо-) динамическое описание плазмы. Вблизи ограничивающей стенки ($z \sim L_F$ – кнудсеновский слой) функции распределения частиц становятся неравновесными и для адекватного описания динамики заряженных частиц необходимо использовать математические модели, учитывающие полную кинетику частиц (в частности, кинетические уравнения). На расстояниях порядка дебаевской длины движение частиц становится бесстолкновительным (балластный режим). Во многих приложениях узкий пристеночный (слой порядка дебаевской длины) называется “ленгмюровским слоем”. Формирование пристеночного слоя приобретает особую важность при рассмотрении задач плазменной технологии и в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу.

Поток электронов сквозь любое сечение в плазме настолько превышает ионный, что условие примерно одинакового ухода ионов и электронов из объема плазмы приводит к тому, что потенциал плазмы должен быть положителен относительно стенок. В этом случае все ионы, достигающие ограничивающей стенки, ускоряются из плазмы вовне. Поскольку ионы должны достигать границы плазмы (т.е. границы объема, в котором $n_i \approx n_e$) со средней энергией, превышающей $kT_e/2$, можно ожидать, что потенциал в плазме изменится на величину, равную примерно kT_e/e . Здесь T_e – температура электронов; k – постоянная Больцмана; e – величина заряда электрона. Существование электронов с максвелловским распределением вплоть до самой границы плазмы означает, что плазма должна находиться под достаточно высоким потенциалом относительно

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 02-01-00299.

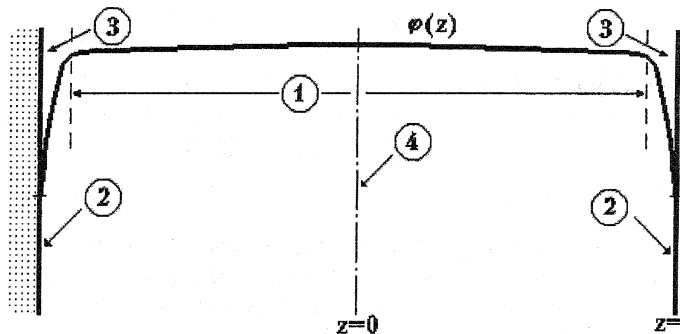


Рис.1. Распределение потенциала в плазме между плоскими параллельными стенками: 1 - область плазмы, 2 - стенка, 3.- ленгмюровский слой, 4 - медианная плоскость.

границы для того, чтобы от границы отражалось бы большинство (практически все) электроны. На рис.1 показано ожидаемое распределение потенциала в плазме между двумя плоскими параллельными стенками под одним и тем же потенциалом, находящимися на расстоянии $2L$ одна от другой. Потенциал очень слабо спадает в области плазмы (где плотности ионов и электронов примерно равны, т.е. выполнено условие квазинейтральности) и резко уменьшается вблизи границы, где имеется слой толщиной порядка дебаевской длины, в котором преобладают ионы.

При аналитическом исследовании поведения плазмы вблизи ограничивающей стенки с учетом полной кинетики ионов рассмотрение проводится во всем объеме (как в области плазмы, так и в узком пристеночном (ленгмюровском) слое). При этом применяется гибридная модель: для ионов используется полное кинетическое описание; а для электронов предполагается распределение Максвелла-Больцмана, т.е. плотность электронов подчиняется закону Больцмана $n(z) = n_0 \exp(-e\varphi(z)/kT_e)$, $n_0 = n_i(0) = n_e(0)$. Интегро-дифференциальное уравнение, описывающее поведение потенциала $\varphi(z)$ во всей области, было названо *уравнением плазма-слой*. Это уравнение является сингулярно возмущенным, поскольку перед старшей (второй) производной стоит малый параметр α^2 ($\alpha \equiv \lambda_D/L$). В пределе $\alpha \rightarrow 0$ интегро-дифференциальное уравнение переходит в интегральное уравнение, которое описывает поведение потенциала только в основном объеме плазмы (вне ленгмюровского слоя) и носит название *плазменное уравнение*.

Кинетический анализ формирования потенциала вблизи стенки был проведен Тонксом и Ленгмюром [1]. Рассматривался случай холодных ионов и горячих (максвелловских) электронов и было получено интегро-дифференциальное уравнение (“уравнение плазма-слой”), описывающее распределение потенциала $\varphi(z)$, как в слое, так и в основном объеме плазмы.

Вне слоя плазма считалась квазинейтральной. При этом дифференциальная часть уравнения плазма-слой может быть опущена в нижнем порядке по отношению α . В итоге вне слоя потенциал описывается интегральным уравнением (“плазменным уравнением”). В работе [1] решение плазменного уравнения находилось в виде рядов для различных геометрических конфигураций стенок (плоских, цилиндрических, сферических) и для различных зависимостей генерации ионов от плотности электронов. Аналитическое решение плазменного уравнения для бесстолкновительного случая в плоской геометрии было получено Харрисом и Томпсоном [2]. В этой работе плазменное уравнение приводилось к виду, допускающему использование интегрального преобразования Шлемилха [3]. В результате было получено решение $\xi(\eta)$ в конечном виде. Здесь были использованы безразмерные переменные: $\xi = z/L; \eta = e\varphi(z)/kT_e$.

Модель Харрисона и Томпсона [2] относится к бесстолкновительной плазме и в ней предполагается наличие “холодного” источника ионов. Уравнение плазма-слой для источника ионов конечной температуры (функция источника $S_i(\xi, \eta) \sim \eta \exp(-\eta)$) было получено в работе [4]. В этой работе были получены аналитические выражения решения плазменного уравнения для различных функций формы источника ионов. Для получения решения полного уравнения плазма-слой использовались численные методы. Решая плазменное уравнение для случая максвелловского источника частиц $S_i(\xi, \eta) \sim \exp(-\eta)$ в работах [5,6] было показано, что выбор функции источника существенным образом влияет на конечный результат.

Как было указано выше, интегро-дифференциальное уравнение плазма-слой является сингулярно возмущенным уравнением. Поэтому вполне логично попытаться применить к этому уравнению асимптотическую теорию сингулярно-возмущенных уравнений. Такая попытка делается в настоящей работе. Для получения асимптотического решения уравнения плазма-слой с ядром Эммерта [4] используется метод пограничных функций [7-9]. В качестве вырожденного решения этого метода выбирается одно из аналитических решений плазменного уравнения работы [4].

2. Уравнение плазма-слой Эммерта [4]

В работе [4] было выведено интегро-дифференциальное уравнение (уравнение плазма-слой), описывающее поведение потенциала, как в основном объеме плазмы, так и в области пристеночного слоя. В безразмерных переменных (ξ - пространственная переменная; $u(\xi)$ - потенциал) уравнение плазма-слой выглядит следующим образом:

$$\mu^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} = -e^{-u} + be^{zu} \{J^1 - J^\xi(u)\} \equiv f(u, \xi) \quad (1)$$

$$J^1 = \int_0^1 h(\xi') K^1(u') d\xi', \quad J^\xi(u, \xi) = \int_0^\xi h(\xi') K^\xi(u, u') d\xi',$$

$$K^1(u') = e^{-zu'}, \quad K^\xi(u, u') = e^{-zu'} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(u-u')}).$$

Здесь $\mu \equiv L_D/L_F$ - отношение дебаевской длины L_D к длине свободного пробега L_F , $h(\xi)$ - функция формы источника ионов, $u = u(\xi)$, $u' = u(\xi')$, $\operatorname{erf}(x)$ - функция ошибок (интеграл вероятностей), $\chi \equiv Z\tau$, $\tau = T_e/T_i$, $Z = q/e$ (q - заряд иона), а точное выражение параметра b для целей данной работы не имеет существенного значения. В работе [4] уравнение (1) дополнялось краевыми условиями: $u(0) = 0$ в медианной плоскости и условие на стенке $u(1) = u_w$.

В газоразрядной плазме, как правило, выполняется неравенство $L_D \ll L_F$, поэтому в уравнении (1) перед старшей производной стоит малый параметр μ^2 ($\mu \ll 1$). Таким образом, (1) является сингулярно возмущенным интегро-дифференциальным уравнением. Если положить формально $\mu = 0$, то получается, так называемое, *плазменное приближение*, которое справедливо только в области вне пристеночного слоя:

$$0 = f(u, \xi) = -e^{-u} + be^{zu} \left\{ \int_0^1 e^{-zu'} h(\xi') d\xi' - \int_0^\xi e^{-zu'} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(u-u')} h(\xi') d\xi' \right\}. \quad (2)$$

Для этого уравнения ставится только одно краевое условие $u(0) = 0$. Дифференцирование (2) по ξ и замена переменной интегрирования $d\xi' \rightarrow (d\xi'/du') du'$ приводит к интегральному уравнению [4]

$$e^{-u(\xi)} = B \int_0^{u(\xi)} \frac{d\xi'}{du'} h(u') \frac{du'}{\sqrt{u-u'}}, \quad B \equiv b \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \frac{1}{1+\chi}, \quad (3)$$

которое сводится к интегральному уравнению Шлемильха. Решение последнего было получено в [4] с использованием преобразования Шлемильха [3]:

$$\pi B h(u) \sqrt{u} \frac{d\xi}{du} = 1 - 2\sqrt{u} D(\sqrt{u}). \quad (4)$$

Здесь $D(x) \equiv \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$ – функция Дюсона, а $B = b \exp(-u_0)$.

Рассматривая $h(u(\xi)) = h(\xi)$ как явную функцию координаты ξ , уравнение (4) было проинтегрировано [4] для произвольной функции формы источника $h(\xi)$ и в результате было получено решение плазменного уравнения (2):

$$\pi B \int_0^\xi h(\xi') d\xi' = 2D(\sqrt{u}). \quad (5)$$

С учетом нормировки $h(\xi)$ работы [4] $\int_0^1 h(\xi) d\xi = 1$, соотношение (5) переходит в $\pi B = 2D(\sqrt{u_1})$ (u_1 соответствует значению координаты на входе в слой $\xi = 1$).

Для первых двух производных по ξ получаются формулы:

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \pi B h(\xi) \sqrt{u} / (1 - 2\sqrt{u} D(\sqrt{u})), \quad (6)$$

$$\frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} = \pi B \frac{dh(\xi)}{d\xi} \frac{\sqrt{u}}{(1 - 2\sqrt{u} D(\sqrt{u}))} + \frac{[\pi B h(\xi)]^2}{2} \frac{[1 + 2u(1 - 2\sqrt{u} D(\sqrt{u}))]}{(1 - 2\sqrt{u} D(\sqrt{u}))^3}.$$

При выводе второй формулы было использовано соотношение:

$$\frac{dD(x)}{dx} = 1 - 2xD(x). \quad (7)$$

Формулы (6) показывают, что в начале координат ($\xi = 0, u(0) = 0$) $du/d\xi|_{\xi=0} = 0, d^2 u/d\xi^2|_{\xi=0} = [\pi B h(\xi)]^2 / 2$. В дальнейшем для решения (5) будем использовать обозначение $u_0(\xi)$.

3. Производные правой части уравнения плазменного приближения

Рассматривая правую часть уравнения (1) на решении плазменного приближения, можно получить выражение

$$b e^{\chi u_0} \left\{ \int_0^1 e^{-\chi u_0'} h(\xi') d\xi' - \int_0^\xi e^{-\chi u_0'} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(u_0 - u_0')} h(\xi') d\xi') \right\} = e^{-u_0}, \quad (8)$$

из которого с учетом краевого условия $u(0) = 0$ следует

$$J^1 = \int_0^1 e^{-\chi \xi} h(\xi') d\xi' = \frac{1}{b}.$$

Производные правой части по ξ на решении вырожденного уравнения $u_0(\xi)$ в силу выполнения равенства $f(u, \xi) = 0$ обращаются в нуль. Заметим, что частная производная $f(u, \xi)$ по ξ равна

$$f_{\xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} = -be^{\chi u} \frac{\partial}{\partial \xi} (J^{\xi}(u)) = -bh(\xi) \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(u-u')})|_{u=u_0} = 0.$$

Таким образом $df/d\xi = f_u du/d\xi + f_{\xi} = f_u du/d\xi$.

Производные правой части по u . Выражение для первой производной

$$f_u(u, \xi) = e^{-u} + b\chi e^{\chi u} \{J^1 - J^{\xi}(u)\} - b\sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{h(\xi') d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} \quad (9)$$

на плазменном решении $u_0(\xi)$ упрощается за счет соотношения (8)

$$f_u(u_0, \xi) = (1 + \chi)e^{-u_0} - b\sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \int_0^{\xi} \frac{h(\xi') d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}}. \quad (10)$$

После перехода к интегрированию по u' с использованием формулы (4) и замены переменной интегрирования $t = (u'/u)^{1/2}$ ($u'^{1/2} = tu^{1/2}$, $du' = 2tudt$) интеграл представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \frac{h(\xi') d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} &= \int_0^{u_0(\xi)} \frac{h(u')}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0'}} \frac{d\xi'}{du_0'} du_0' = \\ &= \frac{2}{\pi B} \left\{ \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} - 2\sqrt{u_0} \int_0^1 \frac{D(t\sqrt{u_0})}{\sqrt{1-t^2}} t dt \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $u_0 \equiv u_0(\xi)$; $u_0' \equiv u_0(\xi')$. Первый интеграл является табличным и равняется $\arcsin(t)|_0^1 = \pi/2$, а второй после интегрирования по частям принимает следующий вид:

$$\int_0^1 \frac{D(t\sqrt{u_0})}{\sqrt{1-t^2}} t dt = \frac{\pi}{4} \sqrt{u_0} - u_0 \int_0^1 \frac{D(t\sqrt{u_0})}{\sqrt{1-t^2}} 2t dt.$$

С учетом соотношения $b(\chi/\pi)^{1/2}/B = (1 + \chi)$, (10) принимает вид:

$$f_u(u_0(\xi), \xi) = (1 + \chi) \left\{ e^{-u_0(\xi)} - 1 + u_0 - \frac{4u_0\sqrt{u_0}}{\pi} \int_0^1 \frac{D(t\sqrt{u_0})}{\sqrt{1-t^2}} 2t dt \right\}. \quad (11)$$

Аналогичная техника применяется для второй производной

$$\begin{aligned} f_{uu}(u, \xi) &= -e^{-u_0} + \chi^2 b e^{u_0} \{J^1 - J^\xi(u_0)\} - \\ &- \chi b \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \int_0^\xi \frac{h(\xi') d\xi'}{\sqrt{u_0(\xi) - u_0(\xi')}} + \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \int_0^\xi \frac{h(\xi') d\xi'}{(u_0(\xi) - u_0(\xi'))^{3/2}} = \\ &= \chi f_u(u_0, \xi) - (1 + \chi) e^{-u_0} + \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\chi}{\pi}} \int_0^\xi \frac{h(\xi') d\xi'}{(u_0(\xi) - u_0(\xi'))^{3/2}}, \end{aligned}$$

которая преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} f_{uu}(u_0, \xi) &= \chi f_u(u_0, \xi) - (1 + \chi) e^{-u_0} + \\ &+ \frac{(1 + \chi)}{\pi u_0} \left\{ \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}} - 2\sqrt{u_0} \int_0^1 \frac{D(t\sqrt{u_0})}{(1-t^2)^{3/2}} t dt \right\} = \\ &= \chi f_u(u_0, \xi) - (1 + \chi) e^{-u_0} + \\ &+ (1 + \chi) \left\{ \left(\frac{t - 2\sqrt{u_0} D(t\sqrt{u_0})}{\pi u_0 \sqrt{1-t^2}} \right)_{t=1} + 1 - 2u_0 + \frac{4u_0 \sqrt{u_0}}{\pi} \int_0^1 D(t\sqrt{u_0}) \sqrt{1-t^2} 2t dt \right\}. \end{aligned}$$

Из приведенного выражения видно, что во второй производной появляется неинтегрируемая особенность.

4. Асимптотический метод пограничных функций

Аналитическое решение (5) плазменного уравнения (2) справедливо только в области плазмы и не описывает поведение потенциала в области ленгмюровского слоя. Однако, выражение (5) можно использовать как нулевое приближение для получения асимптотического разложения решения полного уравнения плазма-слой (1). Одним из эффективных асимптотических методов теории сингулярных возмущений является метод пограничных функций [7-9]. В этом методе решение $u(\xi, \mu)$ представляется в виде двух степенных по μ рядов – регулярного $Ru(\xi, \mu)$ и пограничного $\Pi u(\zeta, \mu)$:

$$u(\xi, \mu) = Ru(\xi, \mu) + \Pi u(\zeta, \mu), \quad \zeta \equiv (1 - \xi)/\mu, \quad (12)$$

$$Ru(\xi, \mu) = R_0 u(\xi) + \mu R_1 u(\xi) + \dots + \mu^n R_n u(\xi) + \dots, \quad (13)$$

$$\Pi u(\zeta, \mu) = \Pi_0 u(\zeta) + \mu \Pi_1 u(\zeta) + \dots + \mu^n \Pi_n u(\zeta) + \dots \quad (14)$$

Коэффициенты рядов (13), (14) определяются в результате формальной подстановки разложения (12) в уравнение (1) и приравнивания членов одного порядка по μ отдельно для членов, зависящих от ξ и ζ . Из общей теории асимптотических решений сингулярно-возмущенных уравнений [7-9] следует, что $\Pi u(\zeta, \mu)$ является поправкой к $Ru(\xi, \mu)$ в окрестности $\xi = 1$ ($\zeta = 0$) и экспоненциально стремится к нулю с ростом ζ . Коэффициенты $\Pi_i u(\zeta)$ ряда (14) называются *пограничными функциями*. При формулировке алгоритма построения ряда (14) накладывается условие $\Pi_i u(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Правая часть уравнения (1) также представляется в виде суммы регулярной $RF(u(\xi), \xi; \mu)$ и пограничной $\Pi F(u(\zeta), \zeta; \mu)$ частей. После подстановки (12) в правую часть (1) $f(u, \xi)$ становится функцией и от μ ($f(u(\xi), \xi) \rightarrow F(u(\xi, \mu), \xi; \mu)$).

$$F(u, \xi; \mu) \equiv f(u, \xi); F(u, \xi; \mu) = RF(u(\xi), \xi; \mu) + \Pi F(u(\zeta), \zeta; \mu). \quad (15)$$

Следует заметить, что параметр μ входит в $F(u(\xi, \mu), \xi; \mu)$ неявным образом – только через искомое решение $u(\xi, \mu)$ при его представлении в виде разложения (12).

Подставляя разложение (12) в (1) и учитывая соотношение

$$\frac{d}{d\xi} \Pi u(\zeta, \mu) = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d}{d\zeta} \Pi u(\zeta, \mu) = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\zeta} \Pi u(\zeta, \mu),$$

$$\mu^2 \frac{d^2}{d\xi^2} Ru(\xi, \mu) + \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi u(\zeta, \mu) = RF(u, \xi; \mu) + \Pi F(u, \zeta; \mu),$$

которое в более подробной записи выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d^2}{d\xi^2} R_0 u(\xi) + \dots + \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi_0 u(\zeta) + \mu \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi_1 u(\zeta) + \mu^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi_2 u(\zeta) + \dots = \\ = R_0 F(u, \xi) + \mu R_1 F(u, \xi) + \mu^2 R_2 F(u, \xi) + \dots \\ + \Pi_0 F(u, \zeta) + \mu \Pi_1 F(u, \zeta) + \mu^2 \Pi_2 F(u, \zeta) + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ (раздельно для функций, зависящих от ξ и ζ) получаем уравнения для определения неизвестных функций $RF_k(u(\xi), \xi; \mu)$ и $\Pi F_k(u(\zeta), \zeta; \mu)$:

$$0 = R_0 F(u, \xi) = f(u(\xi), \xi), \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi_0 u(\zeta) = \Pi_0 F(u, \zeta), \quad (17)$$

$$0 = R_1 F(u, \xi), \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi_1 u(\zeta) = \Pi_1 F(u, \zeta), \quad (18)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} R_{k-2}u(\xi) = R_k F(u, \xi), \quad \frac{d^2}{d\zeta^2} \Pi_k u(\zeta) = \Pi_k F(u, \zeta). \quad (19)$$

Первое соотношение (17) представляет собой вырожденное ($\mu = 0$) уравнение плазма-слой (1) и является уравнением плазменного приближения (2).

5. Представление правой части уравнения (1) в виде суммы регулярного и погранслоного рядов

Для применения метода пограничных функций к интегро-дифференциальному уравнению (1) в правую часть этого уравнения подставляется $u(\xi, \mu)$ в форме (12). При этом $f(u(\xi), \xi) \rightarrow F(u(\xi, \mu), \xi; \mu)$, а $F(u(\xi, \mu), \xi; \mu)$ также представляется в виде разложения типа (12):

$$\begin{aligned} F(u, \xi; \mu) &= F(Ru(\xi, \mu) + \Pi u(\zeta, \mu), \xi; \mu) = f(Ru(\xi, \mu), \xi) + \\ &+ [f(Ru(1 - \zeta\mu, \mu) + \Pi u(\zeta, \mu), 1 - \zeta\mu) - f(Ru(1 - \zeta\mu, \mu), 1 - \zeta\mu)] \equiv \\ &\equiv RF(u(\xi), \xi; \mu) + \Pi F(u(\zeta), \zeta; \mu). \end{aligned} \quad (20)$$

$RF(u(\xi), \xi; \mu)$ представляет собой разложение функции $f(u, \xi)$ в регулярный ряд типа (13), а $\Pi F(u(\zeta), \zeta; \mu)$ – разложение квадратной скобки выражения (20) в ряд типа (14).

Для получения представления правой части уравнения (1) в форме (20) используется разложение функции $F(u, \xi; \mu)$ в ряд Тэйлора по степеням μ : $F(u, \xi; \mu) = \sum_k (d^k F / d\mu^k)_{\mu=0} (\mu^k / k!)$. В общем случае (когда $u = u(\xi, \mu)$, $\xi = \xi(\mu)$) полные производные по μ содержат частные производные по другим аргументам:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\mu} &= F_u \frac{du}{d\mu} + F_\xi \frac{d\xi}{d\mu} + F_\mu = F_u \left(u_\mu + u_\xi \frac{d\xi}{d\mu} \right) + F_\xi \frac{d\xi}{d\mu} + F_\mu, \quad (21) \\ \frac{d^2 F}{d\mu^2} &= F_{uu} \left(u_{\mu\mu} + 2u_{\xi\mu} \frac{d\xi}{d\mu} + u_{\xi\xi} \left(\frac{d\xi}{d\mu} \right)^2 + u_\xi \frac{d^2 \xi}{d\mu^2} \right) + F_{uu} \left(u_\mu + u_\xi \frac{d\xi}{d\mu} \right)^2 + \\ &+ 2 \left(F_{u\xi} \frac{d\xi}{d\mu} + F_{u\mu} \right) \left(u_\mu + u_\xi \frac{d\xi}{d\mu} \right) + F_{\xi\xi} \frac{d^2 \xi}{d\mu^2} + F_{\xi\xi} \left(\frac{d\xi}{d\mu} \right)^2 + F_{\mu\mu}, \end{aligned}$$

и так далее. Заметим, что таким образом получается только “внешняя” часть разложения $F^{out}(u, \xi; \mu)$, не связанная с наличием $u(\xi')$ в ядрах ин-

тегралов J^1 и $J^\xi(u, \xi)$. Вклад от подынтегральных членов, зависящих от ξ' обозначим через $F^{in}(u, \xi; \mu)$. Таким образом

$$F(u, \xi; \mu) = F^{out}(u, \xi; \mu) + F^{in}(u, \xi; \mu).$$

Члены k -го порядка по μ разложения $F(u, \xi; \mu)$ содержат k -ые производные. Как отмечалось выше, уже $F_{uu}(u, \xi; \mu)$ содержит неинтегрируемую особенность. Вследствие этого разложение правой части по степеням μ можно строить только до первого порядка. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать разложение только до первого порядка (например $e^{xu(\xi)} = e^{xu_0(\xi)} + \mu \chi e^{xu_0(\xi)}$). При этом в системе уравнений для определения коэффициентов рядов (17)-(19) остаются только первые два уравнения (17), (18).

Регулярная часть разложения правой части. Заметим, что при вычислении регулярного ряда $Ru(\xi; \mu)$ $F(u, \xi; \mu)$ зависит от μ только неявным образом (через $u(\xi; \mu)$), а ξ не зависит от μ . В этом случае $d\xi/d\mu = F_\xi = F_\mu = 0$ и формула (21) существенно упрощается $dF/d\mu = F_u u_\mu$. При этом $u_\mu(\xi, \mu)|_{\mu=0} = R_1 u(\xi)$, а $R_1 F(\xi) = F_u R_1(\xi)$. Регулярный ряд правой части содержит два члена $RF = R_0 F + \mu R_1 F$, где $R_0 F = F(u_0(\xi), \xi; 0) = f(u_0(\xi), \xi) = 0$, $R_1 F = F_u(u_0(\xi), \xi; 0) + R_1 F^{in}$.

В общем случае выражения для $R_k F^{in}$ получаются путем разложения ядер интегралов по степеням μ . Для ядра интеграла J^1 получаем

$$K^1(u') = e^{-xu'_0} - \mu \chi e^{-xu'_0} R_1 u(\xi') = R_0 K^1(\xi') + \mu R_1 K^1(\xi'),$$

что приводит к разложению

$$\begin{aligned} e^{xu(\xi)} J^1 &= \left(e^{xu_0(\xi)} + \mu \chi e^{xu_0(\xi)} R_1 u(\xi) \right) \int_0^1 h(\xi') \left(e^{-xu_0(\xi')} - \mu \chi e^{-xu_0(\xi')} R_1 u(\xi') \right) d\xi' = \\ &= \left(e^{xu_0(\xi)} + \mu \chi e^{xu_0(\xi)} R_1 u(\xi) \right) \int_0^1 h(\xi') e^{-xu_0(\xi')} d\xi' - \\ &- \mu \chi e^{xu_0(\xi)} \int_0^1 h(\xi') e^{-xu_0(\xi')} R_1 u(\xi') d\xi' - \mu^2 (\dots) \end{aligned}$$

Первый член этого представления дает вклад в члены $R_0 F^{out}$ и $R_1 F^{out}$, в то время как второй - в $R_1 F^{in}$. Для интеграла $J^\xi(u, \xi)$ удобнее рассмотреть разложение "расширенного" ядра

$$K(x) = e^{xu(\xi)} K^\xi(u, u') = e^{xx} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi x}), \quad x \equiv u(\xi) - u(\xi')$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} K(x) \Big|_{\mu=0} &= \left\{ \chi e^{x\chi} [\operatorname{erf}(\sqrt{\chi x})] + \sqrt{\frac{\chi}{\pi x}} \right\} \frac{dx}{d\mu} \Big|_{\mu=0} =, \\ &= K_x(x) (R_1 u(\xi) - R_1 u(\xi')), \quad K_x(x) = \left\{ \chi e^{x\chi} [\operatorname{erf}(\sqrt{\chi x})] + \sqrt{\frac{\chi}{\pi x}} \right\}, \quad (22) \\ &e^{x u(\xi)} J^\xi(u) = e^{x u_0(\xi)} J^\xi(u_0) + \\ &+ \mu \left\{ R_1 u(\xi) \int_0^\xi h(\xi') K_x(x) d\xi' - \int_0^\xi h(\xi') K_x(x) R_1 u(\xi') d\xi' \right\}. \end{aligned}$$

Первый член в фигурных скобках входит в $R_1 F^{out}$, а второй в $R_1 F^{in}$.

Собирая все члены при μ получаем

$$\begin{aligned} R_1 F(u, \xi) &= F_u(u_0, \xi; 0) R_1 u(\xi) + b \left\{ \int_0^1 h(\xi') e^{x u_0} R_1 u(\xi') d\xi' - \right. \\ &\left. - \int_0^\xi h(\xi') K_x(x) R_1 u(\xi') d\xi' \right\} = f_u(u_0, \xi) R_1 u(\xi) + R_1 F^{in}(u, \xi). \quad (23) \end{aligned}$$

Погранслоиный ряд разложения правой части.

$$\begin{aligned} \text{Получение погранслоиного ряда } PF(u(\zeta), \zeta; \mu) &= \\ &= [f(Ru(1 - \mu\zeta), \mu) + \Pi u(\zeta, \mu), 1 - \mu\zeta) - f(Ru(1 - \mu\zeta), \mu), 1 - \mu\zeta] \end{aligned}$$

имеет некоторые особенности по сравнению с построением регулярного ряда. В отличие от предыдущего случая формула (21) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} dF/d\mu &= F_u(u_\mu + u_\xi d\xi/d\mu) = F_u(u_\mu - u_\xi \zeta), \\ dF/d\mu \Big|_{\mu=0} &= F_u \Big|_{\mu=0} (R_1 u(1) - (dR_0 u/d\xi) \zeta). \end{aligned}$$

Экспоненциальный член вне интегралов представляется в виде ряда следующим образом:

$$\begin{aligned} -e^{-(Ru + \Pi u)} + e^{-Ru} &= e^{-u_0(1)} (1 - e^{-\Pi_0 u(\zeta)}) + \\ &+ \mu [e^{-(u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta))} \Pi_1 u(\zeta) - e^{-u_0(1)} (1 - e^{-\Pi_0 u(\zeta)}) (R_1 u(1) - \zeta \dot{u}_0(1))]. \end{aligned}$$

Здесь точка над u_0 обозначает производную по аргументу функции (т.е. по $\xi = 1 - \mu\zeta$).

В интегральных членах производится замена переменной интегрирования $\xi' = 1 - \mu\zeta'$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{x u(\xi)} h(\xi') d\xi' &\equiv \int_0^1 e^{x(u(\xi) - u(\xi'))} h(\xi') d\xi' \rightarrow \mu \int_0^{1/\mu} e^{x u(1 - \mu\zeta')} h(1 - \mu\zeta') d\zeta', \\ &\int_0^\xi e^{x u(\xi)} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi x} [u(\xi)]) h(\xi') d\xi' \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \mu \int_{\xi}^{1/\mu} e^{\chi x[u(1-\mu\xi)]} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi x[u(1-\mu\xi)]}) h(1-\mu\xi') d\xi'.$$

(В выражении $x[u(\xi)] \equiv u(\xi) - u(\xi')$ квадратные скобки содержат функциональную зависимость.) Из приведенных выражений видно, что вклад интегральных членов начинается с первого порядка по μ .

Разложение в ряды подынтегральных выражений удобнее вести по переменной $x[u(1-\mu\xi)] \equiv u(1-\mu\xi) - u(1-\mu\xi')$ поскольку в этом случае

$$x[u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta)] = u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta) - u_0(1) - \Pi_0 u(\zeta') = \Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'),$$

$$x[u_0(1)] = 0, \quad dx/d\mu[u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta)] = \Pi_1 u(\zeta) - \Pi_1 u(\zeta'), \quad dx/d\mu[u_0(1)] = 0.$$

Два первых члена асимптотического разложения "расширенного" ядра K^1 интеграла J^1 имеют следующий вид:

$$e^{\chi[Ku + \Pi u]} - e^{\chi[Ku]} = \left\{ e^{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))} - 1 \right\} + \\ + \mu \left\{ \chi e^{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))} (\Pi_1 u(\zeta) - \Pi_1 u(\zeta')) \right\}.$$

Аналогичное разложение "расширенного" ядра $K(x)$ интеграла $J^{\xi}(u)$ выглядит следующим образом:

$$K(x[u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta)]) - K(x[u_0(1)]) = \\ = e^{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))}) \\ + \mu \left\{ K_x(x[u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta)])(\Pi_1 u(\zeta) - \Pi_1 u(\zeta')) - K_x(0) \frac{dx}{d\mu} \Big|_{x=x[u_0(1)]} \right\}.$$

Последний член этого разложения имеет особенность $K_x(x) \sim x^{-1/2}$ при $x = x[u_0(1)] = 0$ (см. (22)).

Собирая все члены при одинаковых степенях μ , получаем выражения первых двух коэффициентов погранслойной части ряда:

$$\Pi_0 F(\zeta) = e^{-u_0(1)} (1 - e^{-\Pi_0 u(\zeta)}),$$

$$\Pi_1 F(\zeta) = e^{-(u_0(1) + \Pi_0 u(\zeta))} \Pi_1 u(\zeta) + \Pi_1(\zeta),$$

$$\Pi_1(\zeta) = -e^{-u_0(1)} (1 - e^{-\Pi_0 u(\zeta)}) (R_1 u(1) - \zeta \dot{u}_0(1)) +$$

$$\begin{aligned}
& + b \left\{ \int_0^{1/\mu} h(1 - \mu \zeta') \left[e^{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))} - 1 \right] d\zeta' - \right. \\
& \left. - \int_{\zeta}^{1/\mu} h(1 - \mu \zeta') e^{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\chi(\Pi_0 u(\zeta) - \Pi_0 u(\zeta'))} \right) d\zeta' \right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

6. Решение уравнения плазменного приближения

Для дальнейшего исследования задачи необходимо конкретизировать функцию формы источника $h(\xi)$. Как и в работе [10], для $h(\xi)$ выбиралось одно из представлений работы [4]:

$$h(\xi) = \begin{cases} 2, & 0 < \xi < 1/2 = L_s, \\ 0, & 1/2 < \xi. \end{cases} \quad (25)$$

Для нахождения значения параметра $b = B \exp(-u_w)$ перепишем плазменное уравнение (2) в виде:

$$e^{-u} = b \left\{ \int_0^{u_1} e^{\chi(u-u')} h(u') \frac{d\xi'}{du'} du' - \int_0^{\xi} e^{\chi(u-u')} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(u-u')} h(u')) \frac{d\xi'}{du'} du' \right\}.$$

Здесь $u_1 \equiv u_0(1)$. После подстановки вместо $\frac{d\xi'}{du'} du'$ его значения по формуле (4) получаем уравнение для нахождения u_1 :

$$\begin{aligned}
e^{-u} &= \frac{(1 + \chi)}{\sqrt{\pi\chi}} \left\{ \int_0^{u_1} e^{\chi(u-u')} \frac{(1 - 2\sqrt{u'} D(\sqrt{u'}))}{\sqrt{u'}} du' - \right. \\
&\left. - \int_0^u e^{\chi(u-u')} \operatorname{erf}(\sqrt{\chi(u-u')} \frac{(1 - 2\sqrt{u'} D(\sqrt{u'}))}{\sqrt{u'}}) du' \right\}.
\end{aligned}$$

В этом выражении u_1 можно рассматривать как собственное значение. Поскольку последнее соотношение должно выполняться для любого u из диапазона $0 \div u_1$, то величину u_1 проще всего получить, выбирая $u = 0$. При этом получается трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{(1 + \chi)}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^{u_1} e^{-\chi u'} \left(\frac{1}{\sqrt{u'}} - 2D(\sqrt{u'}) \right) du' = \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi\chi}} e^{-\chi u_1} D(\sqrt{u_1}) + \operatorname{erf}(\sqrt{\chi u_1}), \quad (26)
\end{aligned}$$

решение которого может быть получено только численными методами. После нахождения u_1 вычисляется, как параметр $B = 2D(\sqrt{u_1})/\pi$, так и скачок потенциала u_w по формуле работы [4]:

$$u_w^a = \ln \left[\left(\frac{M Z \pi}{m 4} \right)^{1/2} \frac{\tau}{1 + \chi} \frac{1}{2D(\sqrt{u_1})} \right]. \quad (27)$$

Здесь M и m - массы, соответственно, иона и электрона. Следует заметить, что обычно используемая простая оценка (полученная в результате использования полумаксвелловского распределения ионов для вычисления их потока в слой)

$$u_w^* = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{M T_e}{m T_i} Z \right)^{1/2} \quad (28)$$

дает значительно большее значение по сравнению с u_w^a .

Вычисление $u_0(\xi)$. Рассматриваемая функция формы источника (25), приводит к следующему виду решения плазменного приближения:

$$\pi B \xi = D(\sqrt{u_0(\xi)}), \quad 0 \leq \xi < 1/2, \quad (29)$$

$$\pi B = 2D(\sqrt{u_0(\xi)}), \quad \xi \geq 1/2.$$

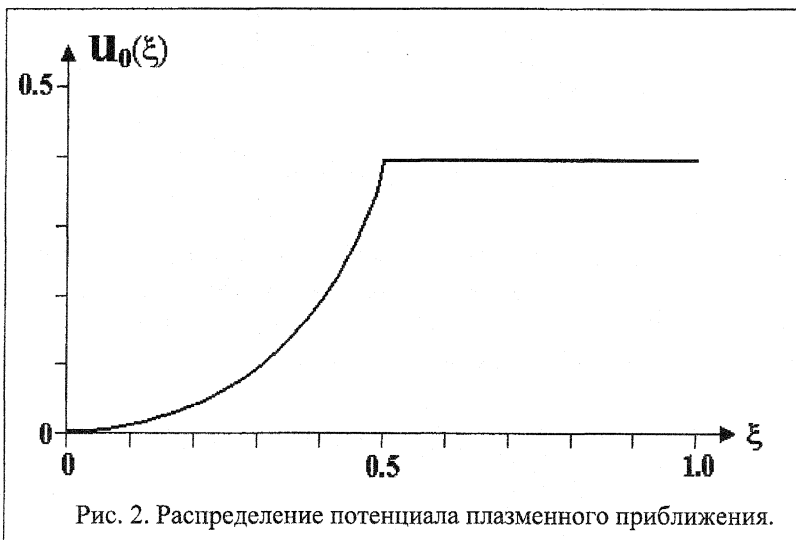


Рис. 2. Распределение потенциала плазменного приближения.

Из этого представления видно, что при $\xi \geq 1/2$ решение равняется постоянной $u_0(\xi) = const = u_0(1) = u_1$. Схема последовательности вычислений для получения решения плазменного приближения представим в следующем виде:

- 1) в результате численного решения трансцендентного уравнения (26) получается значение u_1 ;
- 2) по значению u_1 определяется параметр $B = 2D(\sqrt{u_1})/\pi$;
- 3) для $\xi \geq 1/2$ решением является $u_0(\xi) = u_1 = const$;
- 4) решение $u_0(\xi)$ в области $0 < \xi < 1/2$ получается в результате численного решения уравнения (29), например, методом деления отрезка пополам.

В работе использованы основные физические параметры задачи, соответствующие параметрам работы [4]: $Z = 1, \tau = 1$, и следовательно $\chi = 1$; $M/m = 1836$ (водородная плазма). На рис. 2 показано распределение потенциала $u_0(\xi)$, полученное в результате численных расчетов, проведенных по приведенной схеме [10]. Были получены следующие значения потенциалов на правом краю расчетной области: $u_1 = 0.40445$; $u_w^a = 2.96539$ (по формуле (27)). Простая оценка по формуле (28) дает значение $u_w^* = 3.75767 > u_w^a$. Для решения полного уравнения плазма-слой для $\mu = 10^{-2}$ было получено "точное" значение потенциала стенки $u_w = 2.9661$, которое близко к оценке u_w^a .

7. Коэффициент первого приближения регулярного ряда $R_1 u(\xi)$

Коэффициент $R_1 u(\xi)$ регулярной части разложения определяется из первого соотношения (18) $R_1 F(u, \xi) = 0$, в котором $R_1 F(u, \xi)$ задается выражением (23). Таким образом, для $R_1 u(\xi)$ необходимо решить интегральное уравнение второго рода:

$$A(\xi; u(\xi))R_1 u(\xi) + 2b \left\{ e^{\chi u_0(\xi)} \int_0^{1/2} e^{-\chi u} R_1 u(\xi') d\xi' - \int_0^{\xi} K_x(x) R_1 u(\xi') d\xi' \right\} = 0, \quad (30)$$

где $A(\xi; u(\xi)) \equiv F_u(u_0, \xi; 0) = f_u(u_0, \xi; 0)$, $K_x(x) = \left\{ \chi e^{\chi x} [\operatorname{erf}(\sqrt{\chi x})] + \sqrt{\frac{\chi}{\pi x}} \right\}$,

$x \equiv u(\xi) - u(\xi')$, а $f_u(u_0, \xi)$ определяется выражением (10) или (11). Уравнение (30) записано с учетом выбранной формы источника (25). При этом, верхний предел интегрирования вычисляется по формуле:

$$\xi^* = \begin{cases} \xi^* = \xi, \xi \leq 1/2 \\ \xi^* = 1/2, 1/2 < \xi \leq 1 \end{cases}.$$

Поскольку линейное интегральное уравнение (30) является однородным, то оно имеет только тривиальное решение $R_1 u(\xi) \equiv 0$.

8. Уравнения для первых двух коэффициентов пограничной части асимптотического разложения

Решения уравнений для первых двух коэффициентов регулярной части асимптотического разложения (первые уравнения (17), (18)) были получены в предыдущем изложении: $R_0 u(\xi) = u_0(\xi)$ - решение уравнения плазменного приближения (5); $R_1 u(\xi) = 0$. Вторые уравнения (17), (18) являются уравнениями для определения коэффициентов погранслошной части решения:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \Pi_0 u(\zeta) = e^{-u_0(\zeta)} (1 - e^{-\Pi_0 u(\zeta)}) \equiv f_0(\zeta), \quad (31)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \Pi_1 u(\zeta) = e^{-(u_0(\zeta) + \Pi_0 u(\zeta))} \Pi_1 u(\zeta) + \Pi_1(\zeta) \equiv f_1(\zeta). \quad (32)$$

Уравнения (31), (32) являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Поэтому для их решения необходимо иметь два дополнительных условия. Первое из этих условий получается из краевого условия на стенке для уравнения плазма-слой (1) $u(\xi=1) = u_w$. А именно $\Pi_0 u(\zeta=0) = u_w - u_0(\xi=1) = u_w - u_1$; $\Pi_1 u(\zeta=0) = 0$. Учитывая небольшое отличие значения "точного" потенциала от значения, полученного по формуле (27) u_w^a , в полученном условии можно использовать оценку (27). При аналитическом решении вторым условием на пограничные функции является их убывание при $\zeta \rightarrow \infty$. В случае же численного решения уравнений (31), (32) для получения второго условия проинтегрируем уравнение (1) по ξ . С учетом условия $du/d\xi|_{\xi=0} = 0$ (условие квазинейтральности плазмы), получаем $du/d\xi|_{\xi=1} = \int_0^1 f(u, \xi) d\xi \equiv Q$. Отсюда, с учетом

$du/d\xi = -\mu du/d\xi$ и $du_0/d\xi|_{\xi=1} = 0$, получаются искомые условия

$$d\Pi_0 u(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=0} = -\mu Q; \quad d\Pi_1 u(\zeta)/d\zeta|_{\zeta=0} = 0.$$

Таблица 1

j	ξ	ζ	$\Delta\zeta$	$u - u_0$	$\Pi u_0(\zeta)$	%%
2	0.9998	0.01563	0.015625	2.54648	2.54636	0.005
3	0.9997	0.03125		2.53131	2.53114	0.007
4	0.9995	0.04688		2.51621	2.51608	0.005
7	0.9991	0.09375		2.47129	2.47179	-0.020
14	0.9980	0.20313		2.36879	2.37365	-0.205
20	0.9970	0.29688		2.28350	2.29529	-0.528
26	0.9961	0.39063		2.20056	2.22222	-0.982
39	0.9941	0.59378		2.02887	2.08176	-2.607
52	0.9920	0.79688		1.86795	1.96540	-5.217
65	0.9900	1.00000		1.71757	1.87273	-9.033
110	0.9830	1.70313		1.27385	1.73021	-35.825
111	0.9828	1.71875		1.26526	1.73014	-36.741
112	0.9827	1.73438		1.25673	1.73020	-37.696
129	0.9800	2.00000		1.11951	1.75184	-56.483
241	0.9500	5.00000	0.03125	0.30668	4.88257	-1491.44
257	0.9400	6.00000	0.06250	0.207585	7.21010	-3373.33
321	0.9000	10.00000		0.062147	23.1903	-37215.3

Численное решение задачи Коши для уравнений (31), (32) с указанными выше граничными условиями проводилось на преобразованной ($\xi \rightarrow \zeta$) одной из сеток работы [10]. В начале координат ($\xi = 0$) использовалась сетка пятикратного удвоения шагов. Начиная с точки $\xi = 0.6$, применялось уменьшение шага пополам на последовательных интервалах, уменьшающейся длины [10]. Такое деление шага проводилось в 5 точках. В данной работе для решения уравнений для пограничных функций (31), (32) использовалась перевернутая ($\zeta = (1 - \xi)/\mu$), укороченная сетка по ξ : $\xi \in [1, 0.9] \rightarrow \zeta \in [0, 10]$ (для $\mu = 10^{-2}$). При этом в расчетном интервале располагалось две точки удвоения шага, а полное число точек сетки равнялось 321.

Численное решение уравнения для функции $\Pi u_0(\zeta)$ (31) проводилось с использованием схемы бегущего счета ($y(\zeta) \equiv \Pi_0 u(\zeta)$):

$$y_1 = u_w - u_1; y_2 = u_1 - \mu Q \Delta \zeta_2;$$

$$y_{j+1} = 2y_j - y_{j-k} + f_0 \Delta \zeta_j^2; \Delta \zeta_j \equiv \zeta_j - \zeta_{j-1}.$$

Здесь $k = 1$ для регулярного узла сетки $\Delta \zeta_{j+1} = \Delta \zeta_j$ и $k = 2$ для узла удвоения $\Delta \zeta_{j+1} = 2\Delta \zeta_j$. Результаты численного решения представлены в таблице 1. В колонке $u - u_0$ приведена разница между “точным” решением полного уравнения $u(\xi)$, полученным в работе [10], и решением плазм-

менного приближения $u_0(\zeta)$. Колонка %% показывает величину относительной погрешности полученного решения (в %%). Видно, что функция $\Pi u_0(\zeta)$ имеет минимум при $\xi = 0.9828$ ($\zeta = 1.71875$). Такое неверное поведение пограничной функции связано с некорректностью задачи Коши для уравнения (30). В точности такие же результаты были получены в расчетах с постоянным шагом $\Delta\zeta_2$. В этом случае значения в узлах неравномерной сетки вычислялись с помощью линейной интерполяции.

9. Асимптотика уравнения для первой пограничной функции $\Pi u_0(\zeta)$

Введем обозначения $y(\zeta) \equiv \Pi u_0(\zeta)$, $V = u_w - u_{15} - y$ и перепишем уравнение (31) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} y(\zeta) = e^{-u_1} (1 - e^{-y}) = e^{-u_1} - e^{-u_w} e^y = -\frac{d^2}{d\zeta^2} V(\zeta). \quad (33)$$

После разложения в ряд Тэйлора экспоненты e^y в (33) ($\exp(x) = 1 - x + 1/2 x^2 - \dots$), т.е. экспоненты e^{-y} в ряд Маклорена, получается уравнение для приближенного решения уравнения (33):

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} V(\zeta) = aV - b \equiv W, \text{ где } a = e^{-u_w}, b = e^{-u_1} - e^{-u_w}.$$

Общее решение уравнения для $W(\zeta)$ ($W''(\zeta) = aW(\zeta)$) представляется в виде $W(\zeta) = C_1 e^{-\sqrt{a}\zeta} + C_2 e^{\sqrt{a}\zeta}$. Поскольку W является линейной функцией y ($W = a(u_w - u_1) - b - ay$), то возрастающая экспонента исключается из общего решения ($C_2 = 0$). Таким образом, получается решение $W(\zeta) = C_1 e^{-\sqrt{a}\zeta}$. Выражая y через W ($y = u_w - u_1 - b/a - W/a$) и учитывая краевое условие $y|_{\zeta=0} = u_w - u_1$, получаем асимптотическое решение уравнения (33) в низшем порядке:

$$W = -b e^{-\sqrt{a}\zeta}, \quad y = u_w - u_1 - \frac{b}{a} (1 - e^{-\sqrt{a}\zeta}). \quad (34)$$

Значения полученного приближенного решения представлены в таблице 2, в которой добавлена колонка для значений величины V . Из табл. 2 видно, что полученное решение хорошо совпадает с "точным" решением только при малых значениях ζ (погрешность $>10\%$ при

Таблица 2

j	ξ	ζ	$u - u_0$	V	$\Pi_0 u(\zeta)$	%%	$Ce^{-A\zeta}$	%%
2	0.9998	0.0156	2.5465	0.0153	2.5194	1.064	2.5527	-0.242
3	0.9997	0.0313	2.5313	0.0304	2.4772	2.137	2.5436	-0.486
4	0.9995	0.0469	2.5162	0.0455	2.4352	3.220	2.5346	-0.732
7	0.9991	0.0938	2.4713	0.0904	2.3100	6.527	2.5078	-1.477
10	0.9986	0.1046	2.4270	0.1348	2.1861	9.923	2.4813	-2.237
11	0.9984	0.1563	2.4123	0.1494	2.1451	11.076	2.4725	-2.494
14	0.9980	0.2031	2.3688	0.1929	2.0230	14.597	2.4463	-3.273
20	0.9970	0.2969	2.2835	0.2782	1.7826	21.935	2.3948	-4.875
26	0.9961	0.3906	2.2006	0.3612	1.5473	29.686	2.3444	-6.537
27	0.9959	0.4063	2.1870	0.3748	1.5086	31.020	2.3361	-6.820
37	0.9944	0.5625	2.0546	0.5071	1.1287	45.658	2.2547	-9.742
38	0.9942	0.5781	2.0417	0.5200	1.0914	46.543	2.2467	-10.044
39	0.9941	0.5938	2.0289	0.5329	1.0543	48.036	2.2388	-10.347
52	0.9920	0.7969	1.8680	0.6938	0.5835	68.763	2.1379	-14.454
65	0.9900	1.0000	1.7176	0.8442	0.1339	92.205	2.0416	-18.867
68	0.9895	1.0469	1.6843	0.8774	0.0330	98.038	2.0200	-19.930
69	0.9894	1.0625	1.6734	0.8883	-0.0003	100.020	2.0129	-20.288
94	0.9855	1.4531	1.4185	1.1432	-0.7974	156.215	1.8421	-29.863
95	0.9853	1.4688	1.4091	1.1527	-0.8279	158.752	1.8356	-30.272
129	0.9800	2.0000	1.1196	1.4422	-1.8010	260.876	1.6271	-45.342
241	0.9500	5.0000	0.3067	2.2549	-5.5516	190.949	0.8237	-168.466
321	0.9000	10.0000	0.0622	2.4996	-8.1602	1323.04	0.2640	-320.128

$\zeta \geq 0.15625 (V \geq 0.14940)$). При $\zeta \geq 0.40625 (V \geq 0.37475)$ погрешность превышает 30%%. При $\zeta > 1.06$ решение (33) становится отрицательным и стремится к отрицательной величине $y \xrightarrow{\zeta \rightarrow \infty} u_w - u_1 - b/a = -9.396$.

Такое поведение решения не соответствует требованиям, налагаемым на пограничную функцию. Выражение (34) является решением дифференциального уравнения $y'' = ay - a(u_w - u_1 - b/a)$. Отбрасывая в этом уравнении постоянный коэффициент в правой части, получаем уравнение $y'' = ay$, решение которого

$$y = (u_w - u_1)e^{-\sqrt{a}\zeta}, \quad (35)$$

удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на пограничную функцию. В колонке $Ce^{-A\zeta}$ табл.2 представлены значения y , вычисленные по формуле (35). Видно, что это решение значительно лучше соответствует "точному" решению $u - u_0$. При $\zeta < 0.5781 (V < 0.51)$ погрешность <10%%, а превышение уровня 30%% происходит при $\zeta \geq 1.468 (V \geq 1.15)$.

Литература

1. Tonks L., Langmuir I. A general theory of the plasma of an arc. //Phys.Rev.1929. Vol. 34, N 6. P. 876-922.
2. Harrison E.R., Thompson W.B. The low pressure plane symmetric discharge. //Proc.Phys.Soc.London 1959. Vol. 74, Pt.2, N 476. P. 145-152.
3. Whittaker E.T., Watson G.N. A course of modern analysis. - Cambridge: Univ.Press, 1927, 4-th ed. (1962, 4-th ed. reprint). *имеется перевод: Уиттекер Е.Е., Ватсон Г.Н. Курс Современного анализа. – М.: Физматгиз, 1963. Т. 2.*
4. Emmert G.A., Wieland R.M., Mense A.T., Davidson J.N. Electric sheath and presheath in a collisionless, finite ion temperature plasma. //Phys.Fluids.1980. Vol. 23, N 4. P. 803-812.
5. Bissell R.C., Johnson P.C. The solution of the plasma equations in a plane parallel geometry with a Maxwellian source. //Phys.Fluids. 1987. Vol. 30, N 3. P. 779-786.
6. Bissell R.C., Johnson P.C., Stangeby P.C. A review of models for collisionless one-dimensional plasma flow to a boundary. //Phys.Fluids. В 1989. Vol. В 1, N 5. P. 1133-1140.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. 272 с.
8. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. – М.: Изд-во Моск.Ун-та, 1978. 106 с.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы и теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая Школа, 1990. 208 с.
10. Филиппычев Д.С. Численное моделирование уравнения плазма-слой с использованием сгущающейся сетки.//Прикладная математика и информатика № 14: Сб.//Под ред. Д.П. Костомарова, В.И. Дмитриева –М.: МАКС Пресс, 2003, С. 35-54