

Д.С. Филиппычев

## АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА РАДИАЛЬНОЙ ЧАСТИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА СГУЩАЮЩИХСЯ СЕТКАХ\*

### 1. Введение

В математических моделях естествознания широко используется оператор Лапласа  $\Delta \equiv \Delta_r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . В качестве примеров можно указать на оператор Даламбера  $\square = \partial^2 / \partial t^2 - a^2 \Delta$ , оператор Шредингера  $i\partial / \partial t - b\Delta$ , “оператор” диффузии или теплопроводности с постоянным коэффициентом  $\chi \partial / \partial t - \chi \Delta$  и т.д. В цилиндрической системе координат радиальная часть оператора Лапласа  $\Delta_r$  имеет особенность на оси координат ( $r=0$ ). В моделировании другие особенности могут возникать на границах областей с различными свойствами. На таких границах решения в различных областях необходимо согласовывать одно с другим. Для этого требуется использовать условия сопряжения, которые в общем случае могут иметь разрывы 1-го и 2-го рода.

В работе рассмотрение проводится относительно задач электродинамики плазмы. При этом условия сопряжения ставятся на границе двух сред с различными диэлектрическими свойствами. В численном моделировании для корректного разрешения особенностей в их окрестности необходимо использовать достаточно мелкий шаг сетки. Переход от крупного шага в регулярной области к более мелкому шагу вблизи особенности осуществляется за счет сгущения сетки. В общем случае оператор Лапласа аппроксимируется на неравномерных сетках только с первым порядком  $O(h)$ . Для случая с монотонным увеличением или уменьшением шагов сетки в работе предлагается два варианта “сгущающейся” части сетки (сетка “Фибоначчи” и сетка “удвоения” шагов), для которых порядок аппроксимации радиальной (поперечной) части оператора Лапласа оказывается  $O(h^2)$  как и на равномерных сетках. Второй порядок аппроксимации достигается за счет использования для радиальной части оператора Лапласа четырехточечного шаблона с пропуском одного узла (вместо обычного трехточечного шаблона). При этом, последовательность увеличивающихся (уменьшающихся) шагов строится специальным образом. В результате часть разностных уравнений дискретной модели со-

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект № 96-01-01171а.

держит значения искомых величин в четырех точках. Поэтому для нахождения численного решения применяется пятиточечная прогонка вместо трехточечной прогонки, которая обычно используется для нахождения решений трехточечных разностных уравнений (при стандартной аппроксимации уравнения Лапласа).

## 2. Постановка задачи

В дальнейшем будет рассматриваться только радиальная (поперечная) часть оператора Лапласа  $\Delta_r$ , в обозначении которой нижний индекс "r" будет упущен  $\Delta \equiv \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$ . Рассмотрим полубесконечную цилиндрическую область радиуса R (рис. 1), на оси которой находится столб плазмы радиуса  $r_p$  (область I).

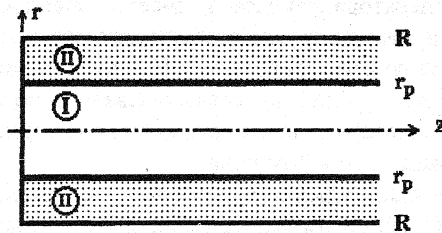


Рис.1. Конфигурация цилиндрической области с плазменно-диэлектрическим заполнением. I – плазма, II – диэлектрик.

Кольцевая область толщиной  $R - r_p$  (область II) заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ . В такой конфигурации изучалась структура электрического поля в усилителе на релятивистском электронном пучке в волноводе с плазменно-диэлектрическим заполнением [1]. Полевая часть задачи описывалась уравнениями типа Шредингера для нахождения поляризационных потенциалов  $\Psi$  в двух областях ( $\alpha = I, II$ ):

$$i\sigma \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial z} - (\eta_\alpha - b_\alpha \Delta) \Psi_\alpha = i\sigma f_\alpha, \quad (1)$$

с условием ограниченности решения в нуле  $r \frac{\partial \Psi_I}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$  и краевым условием  $\Psi_{II} \Big|_{r=R} = 0$ . В областях I и II параметры  $\eta_\alpha$  имели различные постоянные значения  $\eta_\alpha = \{\eta_I, \eta_{II}\} = \{1, \eta_0\}$ , а функция  $f_\alpha$  была отличной от 0 только в области I ( $f_I = f_p(r, z)$ ,  $f_{II} = 0$ ). На границе различных сред (плазма-диэлектрик) применялись обычные условия сопряжения:

- условие непрерывности продольной компоненты электрическо-

$$\text{го поля } \left(1 - i\sigma \frac{\partial}{\partial z}\right) \Psi_I \Big|_{r=r_p} = \left(\eta_0 - i\sigma \frac{\partial}{\partial z}\right) \Psi_{II} \Big|_{r=r_p};$$

- условие “скачка” нормальной компоненты поля

$$\frac{\partial \Psi_I}{\partial r} \Big|_{r=r_p} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_p}.$$

Заметим, что если разрыв нормальной производной имеет место всегда на границе раздела двух сред с различными диэлектрическими свойствами, то разрыв в условии непрерывности тангенциальных компонент электрического поля появился за счет использования поляризационных потенциалов  $\Psi_I$  и  $\Psi_{II}$ .

Основной целью данной работы является разработка численного алгоритма для решения задач с радиальным оператором Лапласа в областях, содержащих особенности на “границах”. В качестве модельного уравнения будем рассматривать уравнение Бесселя (для модифицированных функций). Постановку модельной задачи можно получить из уравнений полевой части работы [1], положив  $\sigma=0$ ,  $b_\alpha=1$  и используя неоднородное краевое условие 1-го рода на внешней границе ( $r=R$ ):

$$(\Delta - \eta_\alpha) \varphi_\alpha = 0, \quad (2)$$

$$\varphi_I \Big|_{r=r_p} = \eta_0 \varphi_{II} \Big|_{r=r_p}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \Big|_{r=r_p} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r} \Big|_{r=r_p}, \quad (4)$$

$$r \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \varphi_{II} \Big|_{r=R} = \Phi_R. \quad (5)$$

### 3. Аппроксимация оператора Лапласа с $O(h^2)$ на сгущающихся сетках

Численное решение задачи (2)-(5) осуществляется на дискретной сетке по  $r$  ( $r_i, i=1+\dots+nR; r_1=0, r_{nR}=R$ ). Для реализации разрыва 1-го рода в условии (3) точке разрыва  $r_p$  (поверхности раздела сред) сопоставляются два индекса узла дискретной сетки: “np” в области I и “nd” в области II. Эти индексы могут относиться к различным узлам сетки с последовательными номерами ( $nd=np+1$ ; рис. 2) или к одному узлу  $nd=np$  (в любом случае  $r_{np}=r_{nd}=r_p$ ). В дальнейшем используются обозначения:

$h_i^+ \equiv r_{i+1} - r_i$ ,  $h_i^- \equiv r_i - r_{i-1}$  — шаги неравномерной сетки соответственно справа и слева от узла с номером  $i$ ;  $r_i^+ \equiv r_i + 0.5h_i^+$ ,  $r_i^- \equiv r_i - 0.5h_i^-$ .

На равномерных (регулярных) сетках с постоянным шагом  $h$

$(h_i^+ = h_i^- = h)$  радиальная часть оператора Лапласа  $\Delta$  аппроксимируется со вторым порядком  $O(h^2)$  [2]: для  $i$ -го узла сетки используется трехточечный шаблон узлов с последовательными номерами  $(i-1, i, i+1)$ :

$$r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx \frac{1}{r_i} \Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{r_i} \left[ \frac{1}{h^2} (r_i^+ \varphi_{i+1} - 2r_i \varphi_i + r_i^- \varphi_{i-1}) \right]. \quad (6)$$

На нерегулярных сетках  $(h_i^- \neq h_i^+)$  порядок аппроксимации снижается до первого  $O(h)$ :

$$\Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{\tilde{h}_i} \left[ \frac{r_i^+}{h_i^+} \varphi_{i+1} - 2r_i \frac{\tilde{h}_i}{h_i^+ h_i^-} \varphi_i + \frac{r_i^-}{h_i^-} \varphi_{i-1} \right], \quad \tilde{h}_i \equiv (h_i^+ + h_i^-) / 2. \quad (7)$$

В работе рассматриваются сетки с монотонным увеличением или уменьшением шага. В дальнейшем такие сетки будем называть соответственно “разгоняющейся” и “сгущающейся”. Последнее название (“сгущающаяся” сетка) в ряде случаев будет применяться для обоих типов сеток. На “сгущающихся” сетках желательно иметь аппроксимацию  $\Delta \varphi$  со вторым порядком, так же как и на регулярных сетках. Аппроксимацию  $O(h^2)$  можно получить если для дискретного оператора  $\Lambda_i$  использовать несимметричный (относительно номера  $i$ ) шаблон, в котором используются три узла с одним пропуском в номерах  $(i-2, i, i+1)$  для “разгона” и  $i-1, i, i+2$  для “сгущения”; на рис.2 отмечены точки шаблонов операторов  $\Lambda_{nd+4}$  и  $\Lambda_{np-4}$ . Узлы такого шаблона должны удовлетворять условию: шаг с одной стороны  $i$ -го узла равен сумме двух ближайших шагов с другой (соответственно,  $h_i^+ = h_i^- + h_{i-1}^-$  и  $h_i^- = h_i^+ + h_{i+1}^+$ ). Тогда дискретный оператор  $\Lambda_i$  принимает следующий вид:

“разгоняющаяся” сетка ( $0 \leftarrow r, r_{nd} \leftarrow r; h_i^+ = h_i^- + h_{i-1}^-$ )

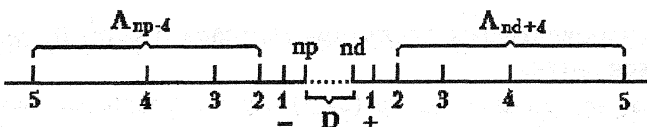


Рис.2. Схема сгущения сетки “Фибоначчи” на границе раздела сред.

$$\Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{(h_i^+)^2} (r_i^+ \varphi_{i+1} - 2r_i \varphi_i + \tilde{r}_{i-1} \varphi_{i-2}), \quad (8)$$

“сгущающаяся” сетка ( $r \rightarrow r_{np}; h_i^+ = h_{i+1}^+; h_i^- = h_i^+ + h_{i+1}^+$ )

$$\Lambda_i \varphi_i = \frac{1}{(h_i^-)^2} (\tilde{r}_{i+1} \varphi_{i+2} - 2r_i \varphi_i + r_i^- \varphi_{i-1}). \quad (9)$$

В формулах (8) и (9)  $\tilde{r}_{i-1} \equiv r_i - 0.5h_i^+ = r_i - 0.5(r_i - r_{i-2}) = 0.5(r_i + r_{i-2})$ ,  $\tilde{r}_{i+1} \equiv r_i + 0.5h_i^- = r_i + 0.5(r_{i+2} - r_i) = 0.5(r_i + r_{i+2})$ . Для сеток “удвоения” ( $h_i^- = h_{i-1}^-$  или  $h_i^+ = h_{i+1}^+$ ; см. ниже)  $\tilde{r}_{i-1} = r_{i-1}$  и  $\tilde{r}_{i+1} = r_{i+1}$ .

Квазитрехточечные аппроксимации (8), (9) содержат фактически четыре точки, что не позволяет применять обычную трехточечную прогонку для решения разностных уравнений, содержащих эти аппроксимации.

Условия применения аппроксимаций (8), (9) (например,  $h_i^+ = h_i^- + h_{i-1}^-$ ) можно реализовать двумя способами. При  $h_i^- \neq h_{i-1}^-$  условие применимости является определением рекуррентной последовательности (в частности, чисел Фибоначчи [3]). Другая возможность возникает при  $h_i^- = h_{i-1}^-$ . В этом случае происходит “удвоение” шага сетки  $h_i^+ = 2h_i^-$ . Ниже, основываясь на этих двух возможностях, рассматривается формирование “сгущающихся” сеток, которые в данной работе называются соответственно сетками “Фибоначчи” и “удвоения” шагов.

В дальнейшем используются следующие обозначения:  $L_I, L_{II}$  – длина областей I и II;

$N_{\text{рег}}, h_{\text{рег}}$  – число и длина шагов регулярной части сетки (при необходимости нижний индекс дополняется символами I и II для соответствующих областей);

*неравномерная часть сетки (сетка “сгущения”):*  $L_F$  или  $L_D$  – длина;  $N_g$  – число шагов;  $h_m$  – минимальный шаг сетки. В нижний индекс величин  $N_g, h_m, L_F$  или  $L_D$  могут добавляться символы, конкретизирующие положение особенности: при  $r=0$  “0”; в точке  $r=r_p$  слева (со стороны области I) “p”, справа (со стороны области II) “d”. Если не оговорено противное, нумерация узлов нерегулярной сетки начинается с точки особенности (т.е.  $r_1$  соответствует или  $r=0$  или  $r=r_p$ ). Число узлов (номер последнего узла) сетки “сгущения” равняется  $N_g + 1$ .

#### 4. Неравномерные сетки для аппроксимации оператора Лапласа с $O(h^2)$

Сетка “Фибоначчи”. На рис.2 показано двухстороннее сгущение сетки к точке раздела сред ( $r_{\text{пр}} = r_{\text{нд}} = r_p, D = np$  или  $nd$ ; на оси системы  $r=0, D=1$ ). Для последовательного увеличения (“разгона”) или уменьшения (“сгущения”) шагов сетки от (к) особенности используются числа Фибоначчи  $\Phi_i$  [3] ( $\Phi_1 = \Phi_2 = 1, \Phi_i = \Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}$ ). Величина  $i$ -го шага сетки вычисляется по рекуррентной формуле  $h_i^+ = h_{i-1}^+ + h_{i-2}^+$  и равна  $h_i^+ = \Phi_i h_m$ . Два первых шага имеют одинаковую длину ( $h_1^+ = h_2^+ = h_m$ ). Последний шаг нерегулярной части сетки является первым шагом регулярной части

$(h_{\text{Reg}} = h_{\text{Ng}}^+ = \Phi_{\text{Ng}} h_m)$ . Длина сетки “Фибоначчи” определяется выражением  $L_F = h_m \sum_{i=1}^{\text{Ng}} \Phi_i = h_m (\Phi_{\text{Ng}+2} - 1)$ . Следует заметить, что при  $\text{Ng}=1$  и  $\text{Ng}=2$  сетка является регулярной с постоянным шагом  $h$ :

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 1; L_F|_{\text{Ng}=1} = (\Phi_3 - 1) h_m = h_m = h, L_F|_{\text{Ng}=2} = (\Phi_4 - 1) h_m = 2h_m = \text{Ngh}.$$

При  $\text{Ng}=3$  происходит однократное удвоение шага сетки ( $h_1^+ = h_2^+ = h_m$ ;  $h_3^+ = 2h_m$ ). Структуру сетки “Фибоначчи” можно компактно представить в виде последовательности шагов

$$\{h\}_{\text{Ng}}^F = \{h, h, \Phi_3 h, \Phi_4 h, \dots, \Phi_{\text{Ng}} h\} = \{\Phi_i h, i=1, 2, \dots, \text{Ng}\}.$$

В области II имеется только одна особенность в точке  $r_p = r_{\text{nd}}$ , вблизи которой (слева) проводится сгущение сетки. Длину области II ( $L_{\text{II}}$ ) можно выразить через минимальный шаг  $h_{\text{md}}$ :

$$L_{\text{II}} = R - r_p = L_F + L_{\text{RegII}} - h_{\text{Ngd}}^+ = h_{\text{md}} [\Phi_{\text{Ngd}+2} - 1 + (N_{\text{RegII}} - 1) \Phi_{\text{Ngd}}].$$

Отсюда получается формула для вычисления  $h_{\text{md}}$ :

$$h_{\text{md}} = R - r_p / [\Phi_{\text{Ngd}+2} - 1 + (N_{\text{RegII}} - 1) \Phi_{\text{Ngd}}]. \quad (10)$$

В области I “сгущение” сетки необходимо проводить вблизи обеих точек границы ( $r=0$  и  $r=r_p=r_{\text{np}}$ ). Для длины области I получается выражение:

$$L_I = r_p = L_{F0} - h_{\text{Ng0}}^+ + L_{\text{RegI}} + L_{Fp} - h_{\text{Ngp}}^- = [\Phi_{\text{Ng0}+2} - 1 + (N_{\text{RegI}} - 2) \Phi_{\text{Ng0}}] h_{m0} + (\Phi_{\text{Ngp}+2} - 1) h_{\text{mp}}.$$

В общем случае “сгущение” сетки вблизи двух граничных точек области I осуществляется с различным числом шагов ( $\text{Ng}_0 \neq \text{Ng}_p$ ) и поэтому  $h_{m0} \neq h_{\text{mp}}$ . Последние шаги сеток “Фибоначчи” области I должны равняться шагу регулярной части сетки ( $h_{\text{Ng0}}^+ = h_{\text{Ngp}}^- = h_{\text{regI}}$ ). Это условие приводит к соотношению  $\Phi_{\text{Ng0}} h_{m0} = \Phi_{\text{Ngp}} h_{\text{mp}}$ , с помощью которого получается формула для выбора минимального шага (для конкретности  $h_{m0}$ ):

$$h_{m0} = r_p / [\Phi_{\text{Ng0}+2} - 1 + (N_{\text{RegI}} - 2) \Phi_{\text{Ng0}} + (\Phi_{\text{Ngp}+2} - 1) (\Phi_{\text{Ng0}} / \Phi_{\text{Ngp}})]. \quad (11)$$

Рассмотренный алгоритм построения дискретной сетки для области заданного размера имеет тот недостаток, что нельзя заранее задать ни величину шага регулярной части сетки  $h_{\text{reg}}$ , ни положение ее начала. Значения этих величин получаются в процессе формирования сетки с заданными  $\text{Ng}$  и  $N_{\text{reg}}$ . Поэтому, для создания сетки с желательными свойствами (например, с шагом близким к заданному  $h_{\text{reg}}$ ) необходимо тщательно подбирать значения параметров ( $N_g$ ,  $N_{\text{reg}}$ ) в ряде предварительных расчетов для каждой области (особенно для области I, где “сгущение” сетки происходит к обеим граничным точкам).

Рассмотрим возможность построения сетки “Фибоначчи” длиной  $L_F$ , расположенной на  $N_F^{Reg}$  шагах регулярной сетки  $h_{reg}$ . Из соотношений  $L_F = N_F^{Reg} h_{reg}$  и  $h_{reg} = \Phi_{N_g} h_m \equiv h_{reg}^F$  получается выражение

$$N_F^{Reg} = (\Phi_{N_g+2} - 1) / \Phi_{N_g} = 2 + (\Phi_{N_g-1} - 1) / \Phi_{N_g} = 3 - (\Phi_{N_g-2} + 1) / \Phi_{N_g}. \quad (12)$$

Первое равенство справедливо для любого  $N_g = 1, 2, \dots$ , второе для  $N_g \geq 2$ , третье для  $N_g \geq 3$ . Из последнего равенства (12) и соотношения  $h_{reg} = \Phi_{N_g} h_m \equiv h_{reg}^F$  следует, что при добавлении к  $L_F$  ( $N_g > 3$ ) отрезка длиной  $(\Phi_{N_g-2} + 1) h_m$   $N_F^{Reg} = (\Phi_{N_g+2} + \Phi_{N_g-2}) / \Phi_{N_g} = (2\Phi_{N_g} + \Phi_{N_g+1} - \Phi_{N_g-1}) / \Phi_{N_g} = (3\Phi_{N_g}) / \Phi_{N_g} = 3$  принимает целое значение, т.е. длина такой модифицированной сетки будет равна  $3h_{reg}$ .

Таблица 1

$N_g$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Phi_{N_g}$	1	1	2	3	5	8	13	21
$\Phi_{N_g+2-1}$	1	2	4	7	12	20	33	54
$D_{N_g}^F$	1	2	2	$3 - \frac{2}{3}$	$3 - \frac{3}{5}$	$3 - \frac{4}{8}$	$3 - \frac{6}{13}$	$3 - \frac{9}{21}$
$\Phi_{N_g} / \Phi_{N_g-1}$	-	1	2	1.5	1.6666.	1.6	1.625	1.6153.
$N_g$	9	10	11	12	13	14	15	16
$\Phi_{N_g}$	34	55	89	144	233	377	610	987
$\Phi_{N_g+2-1}$	88	143	232	376	609	986	1596	2583
$D_{N_g}^F$	$3 - \frac{14}{34}$	$3 - \frac{22}{55}$	$3 - \frac{35}{89}$	$3 - \frac{56}{144}$	$3 - \frac{90}{233}$	$3 - \frac{145}{377}$	$3 - \frac{234}{610}$	$3 - \frac{378}{987}$
$\Phi_{N_g} / \Phi_{N_g-1}$	1.6190.	1.6176.	1.6181.	1.6179.	1.6180.	1.6180.	1.6180.	1.6180.

В табл.1 приведены значения  $D_{N_g}^F \equiv (\Phi_{N_g+2} - 1) / \Phi_{N_g}$  для  $N_g \leq 16$ . Видно что,  $D_{N_g}^F$  (и следовательно  $N_F^{Reg}$ ) имеет целые значения только для  $N_g \leq 3$ . Напомним, что при  $N_g = 1$  и  $N_g = 2$  сетка является равномерной, а при  $N_g = 3$  происходит однократное удвоение шага. При  $N_g > 3$  значения  $D_{N_g}^F$  оказываются не целыми ( $2 < D_{N_g}^F < 3$ ), как это видно из последнего равенства (12), и в этом случае для сетки “Фибоначчи” без модификации нельзя одновременно зафиксировать границу  $L_F$  и шаг  $h_{reg}$ . Дело в том, что в оставшейся части области  $L_\alpha - L_F$  может не укладываться целое число шагов  $h_{reg}^F \neq h_{reg}$ .

Относительная ошибка (дефект) шага для сетки Фибоначчи равняется

$$\begin{aligned} \delta h_{\text{рег}}^F(Ng) &= \frac{(h_{\text{рег}}^F - h_{\text{рег}})}{h_{\text{рег}}} = \frac{(N_F^{\text{Reg}} \Phi_{Ng} - \Phi_{Ng+2} + 1)}{\Phi_{Ng+2} - 1} = \frac{((N_F^{\text{Reg}} - 2)\Phi_{Ng} - \Phi_{Ng-1} + 1)}{\Phi_{Ng+2} - 1} \\ &= \frac{((N_F^{\text{Reg}} - 3)\Phi_{Ng} + \Phi_{Ng-2} + 1)}{\Phi_{Ng+2} - 1}. \end{aligned}$$

Для значений  $Ng=1,2,3$  получаются выражения  $\delta h_{\text{рег}}^F(1)=N_F^{\text{Reg}} - 1$ ,  $\delta h_{\text{рег}}^F(2)=(N_F^{\text{Reg}} - 2)/2$ ,  $\delta h_{\text{рег}}^F(3)=(N_F^{\text{Reg}} - 2)/2$ , из которых следует обращение в нуль дефекта шага для равномерной сетки ( $Ng=1,2$ ;  $N_F^{\text{Reg}}=1,2$ ) и сетки однократного удвоения ( $Ng=3$ ;  $N_F^{\text{Reg}}=2$ ). В остальных случаях ( $Ng>3$ ) дефект положителен ( $h_{\text{рег}}^F > h_{\text{рег}}$ ) для  $N_F^{\text{Reg}} \geq 3$  и отрицательный ( $h_{\text{рег}}^F < h_{\text{рег}}$ ) для  $N_F^{\text{Reg}}=1,2$ . Положительный дефект увеличивается с ростом  $N_F^{\text{Reg}}$  ( $>3$ ), а отрицательный дефект при  $N_F^{\text{Reg}}=1$  больше чем при  $N_F^{\text{Reg}}=2$ . Для фиксированного значения  $N_F^{\text{Reg}}=3$  ошибка шага медленно уменьшается с ростом  $Ng$  ( $\delta \bullet 100=29, 18, 15.4$  % для  $Ng=4, 7, 10$ ), а при  $N_F^{\text{Reg}}=2$  медленно увеличивается (соответственно,  $|\delta| \bullet 100=14.2, 21.2, 23$  %). Поэтому в практических расчетах наиболее рационально выбрать значение  $N_F^{\text{Reg}}=3$ . При этом последний шаг сетки Фибоначчи  $h_{\text{рег}}^F > h_{\text{рег}}$  и на границе нерегулярной и регулярной частей сетки ( $i_b=Ng+1$ ;  $r_{ib}=3h_{\text{рег}}$ ) необходимо использовать аппроксимацию первого порядка  $O(h)$  (7). Снижение порядка аппроксимации в одной точке не должна существенно влиять на точность решения. Это утверждение подтверждается результатами тестовых расчетов, которые приводятся в данной работе.

Модифицированные сетки “Фибоначчи” получаются путем добавления ряда ячеек с общей длиной  $(\Phi_{Ng-2}+1)h_m$ . Вариантом такой сетки является сетка с добавлением  $\Phi_{Ng-2}+1$  ячеек минимальной длины  $h_m$ . На первый взгляд кажется, что помимо этой простейшей сетки при больших значениях  $Ng$  существует несколько вариантов формирования модифицированных сеток, использующих для этого различные представления числа Фибоначчи  $\Phi_{Ng-2}$  ( $\Phi_{Ng-2}=\Phi_{Ng-3}+\Phi_{Ng-4}=2\Phi_{Ng-4}+\Phi_{Ng-5}=\dots$ ). Однако, добавление шага длины  $\Phi_K h_m$  приводит к нарушению условия аппроксимации  $O(h^2)$

$$h_K^+ = h_K^- + h_{K-1}^-; \Phi_{K+1} h_m = (\Phi_K + \Phi_{K-1}) h_m \neq (\Phi_K + \Phi_K) h_m.$$

Последнее неравенство переходит в равенство только при выполнении условия  $\Phi_K = \Phi_{K-1}$ , из которого следует  $K=1$  или  $2$  ( $\Phi_2=\Phi_1=1$ ). При этом добавляются две ячейки размером  $h_m$ . Сетка с дополнительной ячейкой номера  $K=1$  является сеткой однократного удвоения шага ( $\Phi_{Ng-2}=\Phi_1 \rightarrow Ng=3$ ) и отсутствует необходимость ее “модификации” ( $N_F^{\text{Reg}}=2$ ). Та-



ким образом, единственной модифицированной сеткой этого типа оказывается сетка с добавлением ячейки номера  $K=2$  ( $\Phi_{Ng-2}=\Phi_2=1 \rightarrow Ng=4$ ), которая фактически является сеткой с добавлением  $\Phi_2+1=2$  ячеек размером  $h_m$ . Таким образом, модификация сетки “Фибоначчи” может быть реализована только одним способом, а именно добавлением  $\Phi_{Ng-2}+1$  ячеек минимальной длины  $h_m$ . Добавление новой ячейки в начало сетки “Фибоначчи” приводит к появлению нового узла, в котором  $\Lambda_{if}$  аппроксимируется по формуле (6) с равными шагами.

Множество узлов сетки, в которых шаги справа и слева равны ( $h_i^- = h_i^+ = h_i$ ), обозначим через  $\{R\}_{Ng}^F$ . В этих узлах используется “равномерная” (в смысле равенства шагов) аппроксимация (6). Для простой сетки Фибоначчи (“ $F_0$ ”)  $\{R\}_{Ng}^{F_0} = \{2\}$ , а для “модифицированной” (“ $F_1$ ”)  $\{R\}_{Ng}^{F_1} = \{2, 3, \dots, \Phi_{Ng-2}+3; Ng \geq 4\}$ . В оставшихся узлах сетки сгущения обозначим это множество через  $\{irR\}_{Ng}^F$ .  $\Delta\varphi$  аппроксимируется по формулу (8) для “разгоняющейся” сетки и по формуле (9) для “сгущающейся” сетки.  $\{irR\}_{Ng}^{F_0} = \{3, 4, \dots, Ng\}$ ,  $\{irR\}_{Ng}^{F_1} = \{\Phi_{Ng-2}+4, \Phi_{Ng-2}+5, \dots, \Phi_{Ng-2}+1+Ng\}$ . Для простых сеток  $F_0$  с  $Ng > 3$  в точке  $Ng+1$  используется аппроксимация первого порядка  $O(h)$  (7).

Формирование глобальной сетки для областей I или II с использованием модифицированных сеток “Фибоначчи” не вызывает затруднений. При заданном шаге регулярной части сетки  $h_{reg}^{def}$  нерегулярная часть сетки для каждой особенности размещается в  $N_F^{Reg}$  ячейках с шагом  $h_{reg}^{def}$  ( $N_F^{Reg}=3$  для  $Ng > 3$ ; для  $Ng=3$   $N_F^{Reg}=2$ )  $L_F = N_F^{Reg} h_{reg}^{def}$ , что позволяет определить минимальный шаг  $h_m = L_F / (\Phi_{Ng+2} - 1)$ .

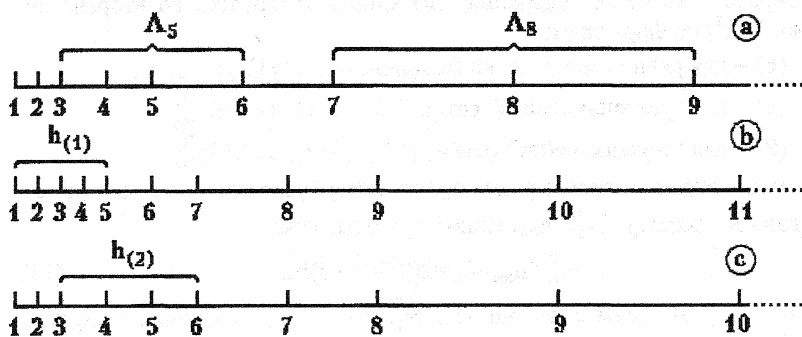


Рис.3. Схема сгущения сеток “удвоения” шагов. а – простая сетка  $D_0$ ; б и с – модифицированные сетки б – ( $D_1$ ) и с – ( $D_2$ ).

Сетка "удвоения" шагов (рис. 3а) состоит из  $N_D+1$  пар ячеек одинакового размера  $h_{(K)}=2^{K-1}h_m$ ,  $K=1 \div N_D+1$ ,  $N_D$  - заданное число удвоения шага. Полное число шагов  $N_g=2N_D+2$ . Структура сетки компактно записывается в виде  $\{h\}_{N_D}^{D_0}=\{2 \times h, 2 \times (2h), \dots, 2 \times (2^{N_D}h)\}=\{2 \times h_{(K)}, h_{(K)}=2^{K-1}h, K=1, 2, \dots, N_D+1\}$ . Сетка содержит узлы с номерами от 1 до  $N_g+1$ . Две последние ячейки с шагами  $h_{N_g-1}^+=h_{N_g}^+=h_{N_g}=h_{(N_D)}$  относятся к регулярной части сетки  $h_{reg}=h_{(N_D)}$ . Длина сетки "удвоения" вычисляется по формуле  $L_D=2 \sum_{K=1}^{N_D+1} h_{iD}=2h_m \sum_{K=1}^{N_D+1} 2^{K-1}=2(2^{N_D+1}-1)h_m$ . Для определения шага  $h_m$  используются формулы, аналогичные формулам (10), (11). Следует только учесть, что теперь в каждую область сгущения входит два шага регулярной части:

$$\text{(для области II)} \quad h_{md}=L_{II} / \left[ 2(2^{N_{Dd}+1}-1) + (N_{RegII}-2)2^{N_{Dd}} \right];$$

$$\text{(для области I; } h_{m0}2^{N_{D0}}=h_{mp}2^{N_{Dp}})$$

$$h_{m0}=L_I / \left[ 2(2^{N_{D0}+1}-1) + (N_{RegI}-4)2^{N_{D0}} + 2(2^{N_{Dp}+1}-1)2^{N_{D0}-N_{Dp}} \right].$$

На сетках "удвоения" шагов ("D<sub>0</sub>") в узлах с четными номерами выполняется равенство  $h_i^-=h_i^+=h_i$  и дискретный оператор  $\Lambda_i\phi$  задается по формуле (6) с равными шагами. Множество таких узлов обозначим через  $\{R\}_{N_D}^{D_0}=\{2K, K=1, 2, \dots, N_D+1\}$ . В узлах с нечетными номерами  $(i \in \{ir\}_{N_D}^{D_0}=\{i=2K-1, K=2, 3, \dots, N_D+1\})$

$$h_i^-=h_{i-1}^-=h_{(K-1)}=0.5h_K=0.5h_i^+ \quad (h_i^+ + h_{i-1}^-=h_i^+)$$

и для аппроксимации  $\Delta\phi$  с  $O(h^2)$  используются формулы (8) или (9). Таким образом, на сетке "удвоения"  $\Delta\phi$  аппроксимируется со вторым порядком  $O(h^2)$  по формулам:

- (6) - для равномерной сетки (шаблон:  $i-1, i, i+1$ )  $i \in \{R\}_{N_D}^{D_0}$ ;
- (8) - для "разгоняющейся" сетки  $(i-2, i, i+1)$ ,  $i \in \{ir\}_{N_D}^{D_0}$ ;
- (9) - для "сгущающейся" сетки.  $(i-1, i, i+2)$ ,  $i \in \{ir\}_{N_D}^{D_0}$ .

Рассмотрим вопрос о размещении сетки "удвоения" шагов в области заданного размера  $N_D^{Reg} h_{reg}$ . Используя равенства

$$N_D^{Reg} h_{reg}=L_D=2(2^{N_D+1}-1)h_m \quad (13)$$

и  $h_{reg}=2^{N_D}h_m$ , получим соотношение  $N_D^{Reg}=4 \cdot 2^{1-N_D}$ , из которого следует, что  $N_D^{Reg}$  - целое только при  $N_D=0$  (равномерная сетка) и  $N_D=1$  (однократное "удвоение";  $N_D^{Reg}=3$ ). При  $N_D>1$  дисбаланс составляет  $\delta N_{N_D}^D h_{reg}=2^{1-N_D} h_{reg}=2h_m$ . Относительная ошибка шага для сетки удвоения

равняется

$$\delta h_{\text{reg}}^D(N_D) = \frac{(h_{\text{reg}}^D - h_{\text{reg}})}{h_{\text{reg}}} = \frac{2^{N_D-1}(N_D^{\text{Reg}} - 4) + 1}{2^{N_D+1} - 1} = \frac{2^{N_D-1}(N_D^{\text{Reg}} - 3) - 2^{N_D-1} + 1}{2^{N_D+1} - 1}.$$

Из этой формулы получаются выражения  $\delta h_{\text{reg}}^D(0) = (N_D^{\text{Reg}} - 2)/2$  и  $\delta h_{\text{reg}}^D(1) = (N_D^{\text{Reg}} - 3)/3$ , которые обращаются в нуль соответственно для значений  $N_D^{\text{Reg}} = 2$  и  $N_D^{\text{Reg}} = 3$ . Дефект шага положителен ( $h_{\text{reg}}^D > h_{\text{reg}}$ ) для  $N_D^{\text{Reg}} \geq 4$  и отрицательный ( $h_{\text{reg}}^D < h_{\text{reg}}$ ) для  $N_D^{\text{Reg}} = 1, 2, 3$ . Величина ошибки возрастает с ростом  $N_D^{\text{Reg}} - 4$  (соответственно с уменьшением  $N_D^{\text{Reg}} - 3$  для  $N_D^{\text{Reg}} \leq 3$ ). При фиксированном значении  $N_D^{\text{Reg}} = 4$  ошибка шага  $\delta h_{\text{reg}}^D(N_D) = 1 / (2^{N_D+1} - 1)$  быстро уменьшается с ростом  $N_D$  ( $\delta \cdot 100 = 14.3, 1.6, 0.05$  % для  $N_g = 2, 5, 10$ ), а при  $N_D^{\text{Reg}} = 3$   $\delta h_{\text{reg}}^D(N_D) = -(2^{N_D-1} - 1) / (2^{N_D+1} - 1)$  медленно увеличивается по абсолютной величине (соответственно,  $|\delta| \cdot 100 = 14.3, 23.8, 24.96$  %). Аналогично случаю сетки Фибоначчи, при  $N_D^{\text{Reg}} = 4$   $h_{\text{reg}}^D > h_{\text{reg}}$  и на границе сетки “удвоения” ( $i = 2N_D + 2$ ) необходимо использовать аппроксимацию по формуле (7) с  $O(h)$ .

Добавление  $\delta N_{N_D}^D h_{\text{reg}}$  в правую часть (13) приводит к модифицированному соотношению:

$$N_D^{\text{Reg}} h_{\text{reg}} = L_D + \delta N_{N_D}^D h_{\text{reg}} = L_D + 2h_m = 2^{N_D+2} h_m = 4 h_{\text{reg}},$$

из которого следует  $N_D^{\text{Reg}} = 4$ . В области заданного размера для любого значения  $N_D$  можно сформировать сетку с “фиксированной” регулярной частью, используя для этого:

1. сетку “удвоения” при  $N_D = 1$  ( $\{h\}_{N_D}^{D_0} = \{2 \times (2^{K-1}h), K = 1, 2, \dots, N_D + 1\}$ ;  $L_D = 3h_{\text{reg}}$ );
2. модифицированные сетки “удвоения” длиной  $L_D = 4h_{\text{reg}}$  (при  $N_D > 1$ ), у которых по сравнению с сеткой  $\{h\}_{N_D}^{D_0}$  добавляется
  - а) или два минимальных шага  $h_m$  ( $\{h\}_{N_D}^{D_1} = \{4 \times h, 2 \times (2^{K-1}h), K = 2, 3, \dots, N_D + 1\}$  (рис.3б)),
  - б) или один шаг длиной  $2h_m$  ( $\{h\}_{N_D}^{D_2} = \{2 \times h, 3 \times (2h), 2 \times (2^{K-1}h), K = 3, 4, \dots, N_D + 1\}$  (рис.3с)).

Узлы равномерной аппроксимации  $\Delta\phi$  (6) для сеток “удвоения” составляют множества:

- для  $\{h\}_{N_D}^{D_0} - \{R\}_{N_D}^{D_0} = \{2K, K = 1, 2, \dots, N_D + 1\}$ , число шагов  $N_g = 2N_D + 2$ ;

- для  $\{h\}_{N_D}^{D_1} - \{R\}_{N_D}^{D_1} = \{2+4, 2K, K=3, 4, \dots, N_D+2\}, N_g = 2N_D+4;$
- для  $\{h\}_{N_D}^{D_2} - \{R\}_{N_D}^{D_2} = \{2, 4, 5, 2K+1, K=3, 4, \dots, N_D+1\}, N_g = 2N_D+3.$

Применение модифицированных сеток “удвоения” шагов позволяет создавать сетки, имеющие регулярную часть с заданным шагом  $h_{reg}$  и началом в определенном узле ( $i=Ng-1$ ). Коэффициент увеличения шага определим как  $\Gamma \equiv h_i/h_{i-1}$ . Если для сетки “Фибоначчи”  $\Gamma \equiv h_i/h_{i-1} = \Phi_i/\Phi_{i-1} \geq 1.5$  (табл.2), то в случае сетки “удвоения” (без модификации) можно считать, что удвоение шага происходит на двух ячейках и поэтому для этой сетки  $\Gamma = \sqrt{2} \approx 1.4142$ . Для модифицированных сеток “удвоения”  $\Gamma$  меньше этого значения на незначительную величину.

Структура сетки  $\{h\}_{N_D}^{D_2}$  приводит к идее создания сеток “удвоения” с использованием большего чем 2 числа повторений ячеек одинаковой длины ( $h_{(K)}$ ). Например, с тремя ( $\Gamma = \sqrt{3} \approx 1.2599$ ) или с увеличивающимся на единицу числом (т.е.  $K-1$ ) ячеек. Но такие конструкции требуют особого рассмотрения.

## 5. Конечно-разностная аппроксимация задачи

Конечно-разностное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению (2), записывается с помощью дискретного оператора  $\tilde{\Lambda}_1 \equiv \tilde{h}^2 \Lambda_1$  (где  $\tilde{h} = h, h_1^+$  или  $h_1^-$  для представления дискретного оператора  $\Lambda_1$  соответственно по формулам (6), (8), (9)):

$$\tilde{\Lambda}_1 \varphi_i - \eta_\alpha \tilde{h}^2 r_i \varphi_i = 0. (14)$$

На оси системы ( $r=0; i=1$ ) оператор  $\Lambda_1$ , действующий на равномерной сетке, записывается в виде  $\Lambda_1 \varphi_1 = \frac{1}{h^2} (r_1^+ \varphi_2 - (r_1^+ + r_1^-) \varphi_1 + r_1^- \varphi_{-2})$ ,  $r_1^+ = r_1^- = h/2$ , т.е. с учетом аксиальной симметрии ( $\varphi_{-2} = \varphi_2$ ) получаем  $\Lambda_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)/h$ . В результате аппроксимация уравнения (2) представляется в виде  $\varphi_2 - \varphi_1 = r_1 \varphi_1 = 0$ . Отсюда следует  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ , что согласуется с условием ограниченности решения при  $r=0$  (5).

Аппроксимация условий сопряжения (3), (4) не вызывает затруднений:

$$\varphi_{np} = \eta_0 \varphi_{nd}, (15)$$

$$\varphi_{np-1} - \varphi_{np} - \tilde{\varepsilon}_0 \varphi_{nd} + \tilde{\varepsilon}_0 \varphi_{nd+1} = 0, (16)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_0 \equiv \varepsilon_0 \frac{\Delta r_I}{\Delta r_{II}}$ ,  $\Delta r_I = r_{np} - r_{np-1}$ ,  $\Delta r_{II} = r_{nd+1} - r_{nd}$ . При получении (16) производные в условии (4) заменялись на конечные разности вперед (область II) и назад (область I).

В табл. 2 представлена последовательность различных аппроксима-

ций оператора  $\Delta$  и дополнительных условий в узлах сетки по  $r$  от  $i=1$  до  $i=nR$  в случае применения для "сгущения" модифицированной сетки "Фибоначчи" ( $N_g > 3$ ) без использования дополнительного узла сетки ( $nd=np$ ). Во второй колонке указан номер формулы аппроксимации, а в третьей показаны номера узлов сетки (шаблон), на которых осуществляется аппроксимация оператора  $\Delta$ , а также диапазоны номеров, для которых используется данная формула аппроксимации. В последней колонке дается характер сетки, используемой для данной аппроксимации:  $h=\text{const}$  – равномерная сетка;  $h_i^+ \neq h_i^-$  – нерегулярная сетка. Для сеток "удвоения" таблица аппроксимаций (табл. 2) изменяется незначительно. Во-первых, границы областей "сгущения" таблицы 2 ( $1 < i \leq N_{g0}$ ;  $np - N_{gp} + 1 \leq i \leq np - 1$ ;  $nd + 1 \leq i \leq nd + N_{gd} - 1$ ) заменяются на ( $1 < i \leq N_{g0} - 1$ ;  $np - N_{gp} + 2 \leq i \leq np - 1$ ;  $nd + 1 \leq i \leq nd + N_{gd} - 2$ ). Во-вторых, в этих областях формула (6) применяется в точках множества  $\{R\}$  для соответствующей сетки "сгущения" ( $D_0, D_1$  или  $D_2$ ), а в оставшихся точках используются формулы (8), (9).

Таблица 2

	Формула аппроксимации $\Delta\phi$	Номера узлов сетки	Сетка
Краевое условие при $r=0$	$\phi_2 = \phi_1$	1, 2	-
"Разгон" сетки от $r_1=0$	(6)	$i-1, i, i+1$	$h=\text{const}$
	(8)	$2 \leq i \leq \Phi_{N_{g0-2}+3}$ $i-2, i, i+1$ $\Phi_{N_{g0-2}+4} \leq i \leq N_{g0}$	$h_i^+ \neq h_i^-$
Равномерная сетка	(6)	$i-1, i, i+1$ $N_{g0}+1 \leq i \leq np - N_{gp}$	$h=\text{const}$
Сгущение сетки к $r_{np}=r_p$	(9)	$i-1, i, i+2$ $np+1 - N_{gp} \leq i \leq np - (\Phi_{N_{gp-2}+4})$	$h_i^+ \neq h_i^-$
	(6)	$i-1, i, i+1$ $np - (\Phi_{N_{gp-2}+3}) \leq i \leq np - 1$	$h=\text{const}$
Условие сопряжения	(18)	$np-1, np=nd, nd+1$	-
"Разгон" сетки от $r_{nd}=r_p$	(6)	$i-1, i, i+1$ $nd+1 \leq i \leq$ $nd + \Phi_{N_{gd-2}+3}$	$h=\text{const}$
	(8)	$i-2, i, i+1$ $nd + \Phi_{N_{gd-2}+4} \leq i \leq nd + N_{gd} - 1$	$h_i^+ \neq h_i^-$
Равномерная сетка	(6)	$i-1, i, i+1$ $nd + N_{gd} \leq i \leq nR - 1$	$h=\text{const}$
Краевое условие при $r=R$	$\phi_{nR} = \phi_R$	$nR$	-

На равномерной части сетки в шаблон оператора  $\Lambda_i$  входят 3 последовательных узла (б). Хотя на нерегулярной части сетки шаблон  $\Lambda_i$  также содержит 3 узла, однако в этом случае этот шаблон оказывается несимметричным ( $i-2, i, i+1$  или  $i-1, i, i+2$ ). Такая аппроксимация содержит фактически 4 узла сетки с пропуском одного номера. Таким образом, часть дискретных уравнений включает значения искомой функции  $\varphi_i$  в 4-х точках, что делает невозможным использование для нахождения  $\varphi$  трехточечной прогонки. Поэтому для решения задачи была использована пятиточечная прогонка (см., например, [4]).

Пятиточечная прогонка [4] применяется для решения разностных уравнений:

$$a_i Y_{i-2} - A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1} + e_i Y_{i+2} = f_i.$$

Здесь обозначения коэффициентов  $A_i, C_i, B_i$  являются "стандартными" для разностных уравнений, решения которых находятся с помощью трехточечной прогонки. Введем обозначения:  $g_i \equiv a_i \alpha_{i-1} - A_i$ ;  $D_i \equiv C_i - a_i \gamma_{i-1} + g_i \alpha_i$ ;  $i=2, 3, \dots, nR$ . Тогда коэффициенты прогонки ( $\alpha_i, \gamma_i, \beta_i$ ) вычисляются в прямом "проходе" по формулам:

$$\alpha_{i+1} = D_i^{-1} [B_i + g_i \gamma_i];$$

$$\gamma_{i+1} = D_i^{-1} e_i;$$

$$\beta_{i+1} = D_i^{-1} [f_i - a_i \beta_{i-1} - g_i \beta_i], i=2, 3, \dots, nR.$$

Искомое решение дискретного уравнения получается при "проходе" в обратном направлении

$$Y_i = \alpha_{i+1} Y_{i+1} - \gamma_{i+1} Y_{i+2} + \beta_{i+1}, i=nR, nR-1, \dots, 1.$$

Алгоритм пятиточечной прогонки был применен для решения разностного аналога уравнения (2) с соответствующими дополнительными условиями (табл. 2). В рассматриваемой однородной ( $f_i \equiv 0$ ) задаче на границе  $\Gamma_{nR}$  задается условие первого рода  $\varphi_{nR} = \Phi_R$ . Поэтому коэффициенты прогонки ( $\alpha_i, \gamma_i, \beta_i$ ) с номерами  $i=nR+1$  в расчете не используются. В узлах сетки равномерной аппроксимации  $a_i = e_i = 0$ , т.е. для дискретного уравнения применима фактически трехточечная прогонка, и следовательно  $\gamma_{i+1} = 0$ . В частности для первых двух шагов сетки  $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ .  $\gamma_1$  входит только в выражение для  $D_2$  и фактически не используется поскольку перед ним стоит множитель  $a_1 = 0$  (т.е. можно положить  $\gamma_1 = 0$ ). По той же причине можно положить  $\beta_1 = 0$  в формуле для  $\beta_3$ . Из краевого условия при  $\Gamma=0$  ( $\varphi_2 = \varphi_1$ ) следует  $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$ .

Условие устойчивости пятиточечной прогонки [4]

$$|C_i| \geq |a_i| + |A_i| + |B_i| + |e_i| \quad (17)$$

выполняется для дискретного аналога дифференциального уравнения (14) и краевых условий ( $C_1=B_1$ ;  $C_{nR}=1>0$ ). При численном решении задачи аппроксимацию условий сопряжения (4), (5) по формулам (15), (16) можно реализовать двумя способами. Во-первых можно ввести дополнительный узел сетки ( $nd=np+1$ ). Нижние индексы "np" и "nd" обозначают два различных значения  $\varphi$  ( $\varphi_{nd} \neq \varphi_{np}$ ) в точке  $r=r_p$ . В каждом из этих узлов можно записать одно из двух разностных соотношений (15), (16). Если (15) и (16) рассматривать как записанные соответственно в узлах "np" и "nd", то в т. "nd"  $C_{nd}=\tilde{\varepsilon}_0 \leq \sum_{nd}=2+\tilde{\varepsilon}_0$  условие устойчивости (17) не выполняется, а в т. "np"  $C_{np}=1 \geq \sum_{np}=B_{np}=\eta_0$  условие (17) выполняется только для  $\eta_0 \leq 1$ . В альтернативном варианте ((16)  $\rightarrow$  "np"; (15)  $\rightarrow$  "nd"):  $C_{np}=1 < 1+2\tilde{\varepsilon}_0 = \sum_{np}$ , а для т. "nd"  $C_{nd}=\eta_0 \geq 1 = \sum_{nd}=A_{nd}$  условие (17) выполняется только для  $\eta_0 \geq 1$ .

Во втором варианте условия (15), (16) реализуются без введения дополнительной точки ( $nd=np$ ). После подстановки  $\varphi_{np}$  или  $\varphi_{nd}$  из (15) в (16) получаются две различные формы записанной в одной точке дискретизации условий сопряжения. В первом случае ( $\varphi_{np} = \eta_0 \varphi_{nd}$ ) разностное уравнение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_{np-1} + (\eta_0 + \tilde{\varepsilon}_0) \varphi_{nd} - \tilde{\varepsilon}_0 \varphi_{nd+1} = 0, \quad (18) \\
 & -r_{np-1}^- \varphi_{np-2} + r_{np-1} (2 + h^2) \varphi_{np-1} - r_{np-1}^+ (\eta_0) \varphi_{nd} = 0, \quad h = h_{np-1}^+ = h_{np-1}^- \\
 & -r_{np-2}^- \varphi_{np-3} + r_{np-2} (2 + h^2) \varphi_{np-2} - r_{np-2}^+ (\eta_0) \varphi_{np=nd} = 0, \quad h = h_{np-2}^- .
 \end{aligned}$$

На границе области I  $\varphi(r_p) = \varphi_{np}$ . Поэтому возникает необходимость изменения разностных уравнений в ближайших к разрыву узлах сетки сгущения: коэффициенты перед  $\varphi_{nd}$  ( $B_{np-1}$  и  $\varepsilon_{np-2}$ ) умножаются на  $\eta_0$ , причем уравнение для  $\varphi_{np-2}$  (коэффициент  $\varepsilon_{np-2}$ ) модифицируется только в случае использования сеток  $F_0$ ,  $D_0$  и  $D_2$ . В случае модифицированных сеток  $F_1$  и  $D_1$  в "начало" сетки сгущения добавляется по крайней мере 2 шага минимальной длины и в точке "np-2" применяется равномерная аппроксимация (6). При этом  $\varepsilon_{np-2} \varphi_{nd}$  заменяется на  $\varphi_{np-2} = r_{np-2}^+ \varphi_{np-1}$ . Аналогичные изменения разностных схем требуются и во втором случае ( $\varphi_{nd} = (1/\eta_0) \varphi_{np}$ ):

$$\begin{aligned}
 & -\varphi_{np-1} + (1 + \tilde{\varepsilon}_0 / \eta_0) \varphi_{np} - \tilde{\varepsilon}_0 \varphi_{nd+1} = 0, \quad (19) \\
 & -(r_{nd+1}^- / \eta_0) \varphi_{np} + r_{nd+1} (2 + \eta_0 h^2) \varphi_{nd+1} - r_{nd+1}^+ \varphi_{nd+2} = 0, \quad h = h_{nd+1}^+ = h_{nd+1}^- . \\
 & -(r_{nd+2}^- / \eta_0) \varphi_{nd=np} + r_{nd+2} (2 + \eta_0 h^2) \varphi_{nd+2} - r_{nd+2}^+ \varphi_{nd+3} = 0, \quad h = h_{nd+2}^+ .
 \end{aligned}$$

Для сеток  $F_1$  и  $D_1$  член  $a_{nd+2} \varphi_{np}$  заменяется на  $A_{nd+2} \varphi_{nd+1}$ . После нахождения  $\varphi_{nd}$  при использовании (18) [или  $\varphi_{np}$  при использовании (19)],

“недостающее” значение  $\varphi$  (соответственно  $\varphi_{np}$  или  $\varphi_{nd}$ ) вычисляется по формуле (15).

Условие устойчивости (17) для (18)  $C_{nd}=\eta_0+\tilde{\epsilon}_0 \geq \sum_{nd}=A_{nd}+B_{nd}=1+\tilde{\epsilon}_0$  выполняется только при  $\eta_0 \geq 1$ , а для уравнения (19)  $C_{np}=1+\tilde{\epsilon}_0/\eta_0 \geq \sum_{np}=A_{np}+B_{np}=1+\tilde{\epsilon}_0$  при  $\eta_0 \leq 1$ . Таким образом, для аппроксимации условий сопряжения в случае при  $\eta_0 \geq 1$  следует использовать формулу (18), а при  $\eta_0 \leq 1$  формулу (19). В данной работе рассматривается случай  $\eta_0 > 1$  и поэтому в основном используется формула (18).

## 6. Численное решение уравнения Бесселя с одной особенностью на оси системы

Фундаментальная система решений уравнения Бесселя (2) состоит из двух модифицированных функций Бесселя 1-го ( $I_0(x)$ ) и 2-го рода ( $K_0(x)$ ), где  $x=\sqrt{\eta_0} r$  ( $x_I=r$ ,  $x_{II}=\sqrt{\eta_0} r$ ). В области I с учетом условия ограниченности на оси (5) решение может содержать только функции Бесселя 1-го рода (в данном случае  $I_0(r)$ ). В области II общее решение задачи представляется в виде  $\varphi(r)=C_1 I_0(r)$ , а в области II -  $\varphi(r)=C_2 I_0(x)+C_3 K_0(r)$ .

Алгоритм с использованием “сгущающихся” сеток был использован для изучения корректности разрешения особенности на оси системы при численном решении задачи в одной области, содержащей только одну эту особенность. Для этого в области I ( $0 \leq r \leq 1.0=R$ ) численно решалось уравнение (2) с краевыми условиями (5). Точное решение такой задачи выбиралось в виде  $\varphi(r)=I_0(r)$  (т.е.  $C_1=1$ ) с краевым условием  $\Phi_R=I_0(R=1.0)$ . Результаты расчетов представлены в таблице 3, в которой приведены максимальные значения относительной ошибки численного решения задачи  $\delta_{\max}=\max|(\varphi_i/\varphi_i^{\text{ex}}-1) \cdot 100| \%$ ,  $\varphi_i^{\text{ex}}=I_0(r_i)$  – точное решение. В графах  $N_g$  приводится число шагов неравномерной части сетки. Для сетки Фибоначчи значение  $N_g$  подбиралось из соображений близости числа “неравномерных” шагов (для моделей без модификации  $D_0$  имеется точное соотношение  $N_g^F=N_g^D-1=2N_D+1$ ). Максимальное значение погрешности решения соответствовало началу координат ( $r=0$ ;  $i=1$ ), за исключением модели  $D_0$  сетки Фибоначчи, в которой  $\delta_{\max}$  соответствовало точке сопряжения сетки “сгущения” с равномерной сеткой (т.е. в точке аппроксимации  $\Delta\varphi$  с  $O(h)$ ). Из таблицы 3 видно, что использование сгущающихся сеток с  $N_D > 5$  становится не эффективным: количество вычислений возрастает, в то время как погрешность решения остается практически той же самой. Все три модели сетки удвоения шагов дают примерно одинаковую точность с небольшим нарастанием погрешности от  $D_0$  к  $D_2$ . Наименьшая погрешность достигается на сетке удвоения без модификации ( $D_0$ ), что связано, по-видимому, с нарушением “монотонного” изменения



шага при использовании дополнительных шагов в модифицированных сетках  $D_1$  и  $D_2$ . При использовании сеток Фибоначчи погрешность решения получается примерно такая же, как и для сеток "удвоения".

Таблица 3

		Относительная погрешность решения $\delta_{\max} \%$										
Тип сетки		Сетка удвоения шагов						Сетка Фибоначчи				
Модель		$D_0$		$D_1$		$D_2$		$D_0$		$D_1$		
пр	$N_D$	$N_g$	%%	$N_g$	%%	$N_g$	%%	$N_g$	%%	$N_g$	$N_{g_0}$	%%
5	0	0	1.7816									
	1	4	0.6414					3				
	3	8	0.1098	10	0.1039	9	0.1107	7	0.0477	8	5	0.161
	5	12	0.0631	14	0.0641	13	0.0647	11	0.0326	13	7	0.078
	7	16	0.0605	18	0.0609	17	0.0609	15	0.0303	17	8	0.068
	10	22	0.0606	24	0.0606	23	0.0606	21	0.0300	23	9	0.063
10	0	0	0.5290									
	1	4	0.1895					3				
	3	8	0.0217	10	0.0311	9	0.0332	7	0.0336	8	5	0.047
	5	12	0.0169	14	0.0198	13	0.0200	11	0.0255	13	7	0.023
	7	16	0.0182	18	0.0189	17	0.0189	15	0.0242	17	8	0.020
	10	22	0.0188	24	0.0188	23	0.0188	21	0.0240	23	9	0.019
20	0	0	0.1536									
	1	4	0.0546					3				
	3	8	0.0036	10	0.0085	9	0.0091	7	0.0155	8	5	0.013
	5	12	0.0039	14	0.0053	13	0.0054	11	0.0123	13	7	0.006
	7	16	0.0047	18	0.0050	17	0.0050	15	0.0118	17	8	0.005
	10	22	0.0050	24	0.0050	23	0.0050	21	0.0117	23	9	0.005

## 7. Аналитическое решение уравнения Бесселя в двух областях

Корректное разрешение особенности на границе раздела двух сред (условия сопряжения (3) и(4)) изучалось при численном решении задачи (2)-(5) в двух областях. Аналитическое решение уравнения Бесселя (2) выбиралось в виде:

- в области I  $\varphi(r)=C_1 I_0(r)$ ;
- в области II  $\varphi(r)=C_2 I_0(x)+C_3 K_0(x)$ ,  $x=\sqrt{\eta_0} r$ .

Подстановка этих выражений в краевое условие (5) и условия сопряжения (3), (4) приводит к системе алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2, C_3$ :

$$C_2 I_0(x_R) + C_3 K_0(x_R) = \Phi_R; \quad (20)$$

$$C_1 I_0(r_p) = \eta_0 [C_2 I_0(x_p) + C_3 K_0(x_p)]; \quad (21)$$

$$C_1 I_1(r_p) = \varepsilon_0 \sqrt{\eta_0} [C_2 I_1(x_p) - C_3 K_1(x_p)]; \quad (22)$$

Хотя решение этой системы получается без затруднений, в целях сокращения используемых в дальнейшем формул, выразим  $C_2$  и  $C_3$  через  $C_1$  из условий сопряжения (21), (22):

$$C_2 = C_1 \frac{\varepsilon_0 I_0(r_p) K_1(x_p) + \sqrt{\eta_0} I_1(r_p) K_0(x_p)}{D}, \quad (23)$$

$$C_3 = C_1 \frac{\varepsilon_0 I_0(r_p) I_1(x_p) - \sqrt{\eta_0} I_1(r_p) I_0(x_p)}{D}. \quad (24)$$

где  $D = \varepsilon_0 \eta_0 [I_0(x_p) K_1(x_p) + I_1(x_p) K_0(x_p)]$ ,  $D_{(2)} = -\sqrt{\eta_0} D$  - детерминант системы (15), (16). После подстановки выражений  $C_2$  и  $C_3$  в краевое условие (20) получаем

$$C_1 = \frac{\Phi_R D}{d_1 + d_2}, \quad (25)$$

$$d_1 = \sqrt{\eta_0} I_1(r_p) [K_0(x_p) I_0(x_R) - I_0(x_p) K_0(x_R)],$$

$$d_2 = \varepsilon_0 I_0(r_p) [K_1(x_p) I_0(x_R) + I_1(x_p) K_0(x_R)].$$

Из (25) видно, что при  $\Phi_R = 0$  система (2)-(8) имеет только тривиальное решение  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ . Такой результат является естественным, поскольку в этом случае система (2)-(8) становится однородной.

В однородной (при  $\Phi_R = 0$ ) системе (20)-(22) имеется три уравнения и фактически два независимых коэффициента, которые при  $C_1 \neq 0$  можно представить в виде отношений  $C_2/C_1$  и  $C_3/C_1$ . Как известно, однородная система рассматриваемого типа имеет нетривиальное решение только при обращении ее детерминанта в нуль. Для системы (20)-(22) из этого условия ( $D_{(3)} = \sqrt{\eta_0} (d_1 + d_2)$ ) следует

$$d_1 + d_2 = 0 \quad (26)$$

( $d_1$  и  $d_2$  те же самые, что и в формуле (25)). Условие (26) означает наличие определенного соотношения между параметрами задачи  $\eta_0$  и  $\varepsilon_0$ . Одному из этих параметров можно задать произвольное значение, тогда второй параметр определяется из условия (26). Поскольку параметр  $\eta_0$  входит в каждое из уравнений системы (20)-(22) нелинейным образом ( $x = \sqrt{\eta_0} r$ ), то любое из этих трех уравнений оказывается трансцендентным относительно  $\eta_0$ . С практической точки зрения удобнее задавать значение  $\eta_0$ , а вели-

чину  $\epsilon_0$  определять из условия (26). Таким образом, в переопределенной системе (при  $\Phi_R=0$ ) для получения нетривиального решения “лишнее” условие используется для определения “свободного” параметра ( $\epsilon_0$ ).

Переопределенность однородной задачи (20)-(22) можно рассмотреть в несколько ином аспекте. Предположим существование нетривиального решения этой задачи (например,  $C_1 \neq 0$ ). Полученную из уравнения (20), величину  $C_3 = -C_2 I_0(x_R) / K_0(x_R)$  подставим в соотношения (23), (24). В результате получаются два выражения для отношения коэффициентов  $(C_2/C_1)_{(23)}$  и  $(C_2/C_1)_{(24)}$ , которые в общем случае оказываются различными. Для совместимости уравнений (23) и (24) необходимо совпадение значений этих отношений  $(C_2/C_1)_{(23)} = (C_2/C_1)_{(24)}$ , что приводит к выполнению условия (26):  $d_1 + d_2 = 0$ .

Для целей настоящей работы выбор конкретного значения  $\Phi_R$  не имеет особого значения. Поэтому можно выбрать  $\Phi_R$  “естественным” образом, положив  $\Phi_R = C_2 I_0(x_R) + C_3 K_0(x_R)$  при заданных  $C_2$  и  $C_3$ , которые определяются из условий сопряжения (21), (22) (т.е. по формулами (23), (24)). В этом случае остается только два условия для определения двух отношений  $C_2/C_1$  и  $C_3/C_1$ . Поэтому значение одного из трех коэффициентов можно выбирать произвольным образом. Удобно положить  $C_1 = 1$ . Тем более, что такое значение использовалось при рассмотрении задачи в одной области. В данной работе применяется именно такой вариант аналитического решения для проведения тестовых расчетов.

Использование в области II “укороченного” аналитического решения  $\Phi_{II}(r) = C_2 I_0(x)$  приводит к неустранимой переопределенности задачи. В самом деле в этом случае имеется три условия и всего лишь два коэффициента. Задание “естественного” решения не спасает положения поскольку остается два условия и одно отношение коэффициентов  $C_2/C_1$ . Кроме того, для “укороченного” решения однородное краевое условие ( $\Phi_R=0$ ) не выполняется ни при каких условиях. Условия сопряжения (3) и (4) в этом случае образуют систему уравнений:

$$C_1 I_0(r_p) = \eta_0 C_2 I_0(x_p), \quad C_2/C_1 = I_0(r_p) / \eta_0 I_0(x_p); \quad (27)$$

$$C_1 I_1(r_p) = \epsilon_0 \sqrt{\eta_0} C_2 I_1(x_p), \quad C_2/C_1 = I_1(r_p) / \epsilon_0 \sqrt{\eta_0} I_1(x_p). \quad (28)$$

Условие существования нетривиального решения этой системы  $D_{(2)} = \sqrt{\eta_0} [\epsilon_0 I_0(r_p) I_1(x_p) - \sqrt{\eta_0} I_1(r_p) I_0(x_p)] = 0$  приводит к формуле для определения  $\epsilon_0 = \sqrt{\eta_0} I_1(r_p) I_0(x_p) / I_0(r_p) I_1(x_p)$ . При задании “естественного” краевого условия  $C_1$  в формулах (27) и (28) можно выбирать произвольным образом ( $C_1 = 1$ ). В альтернативном варианте  $C_2$  определяется из краевого условия  $C_2 = \Phi_R / I_0(x_R)$  и по этому значению  $C_1$  находится из соотношения (27) или (28).

## 8. Численное решение уравнения Бесселя в двух областях

Применение сеток сгущения на обоих краях области накладывает ограничения снизу на число равномерных шагов в области I. Число шагов самой грубой из сеток, используемых при рассмотрении области с одной особенностью, равнялось пяти ( $nr=5$ ). В области I (с двумя особенностями) сетка с таким числом шагов позволяет успешно применять только сетки однократного удвоения ( $N_D=1$ ;  $Ng=3$ ). При этом регулярная часть сетки состоит из трех шагов. При использовании сеток "сгущения" с большим числом шагов на регулярную часть отстает только один шаг, который является максимальным шагом для каждой сетки "сгущения" (практически происходит сливание сеток сгущения к левой и правой границам). В работе такие сетки рассматриваться не будут, а число узлов самой грубой сетки выбирается равным  $nr_0=10$ .

Задача (2)-(5) численно решалась в двух областях ( $L_I=L_{II}=1$ ;  $0 \leq r \leq 2$ ) с границей раздела сред, расположенной в точке соединения областей ( $r=r_p=1$ ). Число шагов "начальной" равномерной сетки ( $nr$ ) было одинаковым в обеих областях ( $nr_I=nr_{II}=nr$ ). Сгущение сетки к точке раздела сред ( $r=r_p=1$ ) осуществлялось симметричным образом (сетки "сгущения" слева и справа имели одинаковые параметры). На основании результатов, представленных в табл.3, для разрешения особенности в нуле использовалась сетка удвоения  $D_0$  с  $N_D=5$  (за исключением случая "чисто" равномерной сетки:  $N_D=0$  или  $Ng \leq 2$ ). В расчетах использовалось "естественное" граничное условие ( $\varphi(r=2)=\Phi_R=C_2 I_0(x_R)+C_3 K_0(x_R)$ ,  $x_R=2\sqrt{\eta_0}$ ), в котором коэффициенты  $C_2$  и  $C_3$  вычислялись по формулам (23) и (24).

В таблице 4 представлены результаты расчетов при различных значениях параметров  $\epsilon_0$  и  $\eta_0$ . Для сгущения сетки к точке  $r=r_p$  применялась сетка удвоения  $D_0$ , а для аппроксимации условий сопряжения в одной точке использовалась формула (18). Следует заметить, что расчеты с использованием любого варианта аппроксимации условий сопряжения (без дополнительного узла сетки (18) или (19); с дополнительным узлом (15), (16) или (16), (15)) показали абсолютно идентичные результаты. Данные, представленные в табл.4, демонстрируют достаточно высокую эффективность применения сеток сгущения. Как и в случае рассмотрения области с одной особенностью, наибольшая эффективность достигается при  $N_D=5$ . При больших значениях  $N_D$  относительная погрешность ( $\delta_{\max}$ ) хотя и уменьшается, но это уменьшение становится заметно медленнее. В самом "плохом" случае ( $\epsilon_0=4, \eta_0=8$ ;  $nr=10$ ) для сетки сгущения  $D_0$  с  $N_D=5$  максимальная погрешность  $\delta_{\max} \approx 1\%$ .

Таблица 4

D <sub>0</sub> ; Условия сопряжения (18)		погрешность решения $\delta_{\max}$ %%						
		$\epsilon_0=2$			$\epsilon_0=4$			
nr	N <sub>D</sub>	$\eta_0=2$	$\eta_0=4$	$\eta_0=8$	$\eta_0=2$	$\eta_0=4$	$\eta_0=8$	
10	0	5.2987	7.8472	11.3099	5.5643	8.5866	12.9186	
	N <sub>D0</sub> =5	0	4.7228	7.2378	10.6580	5.0048	7.9985	12.2905
		1	2.3274	3.5738	5.3493	2.4718	3.9553	6.1538
		3	0.6804	1.0982	1.8494	0.7179	1.2004	2.0675
		5	0.2380	0.4574	0.9830	0.2468	0.4845	1.0449
		7	0.1352	0.3090	0.7838	0.1371	0.3185	0.8091
		10	0.1057	0.2666	0.7269	0.1057	0.2710	0.7418
20	0	2.3982	3.5087	4.8859	2.5396	3.8790	5.6598	
	N <sub>D0</sub> =5	0	2.2364	3.3408	4.7111	2.3815	3.7161	5.4908
		1	1.1108	1.6625	2.3703	1.1844	1.8506	2.7584
		3	0.3117	0.4830	0.7480	0.3311	0.5341	0.8550
		5	0.0955	0.1697	0.3286	0.1001	0.1830	0.3581
		7	0.0449	0.0966	0.2310	0.0460	0.1010	0.2422
		10	0.0304	0.0756	0.2030	0.0305	0.0775	0.2091
40	0	1.1330	1.6498	2.2562	1.2056	1.8350	2.6366	
	N <sub>D0</sub> =5	0	1.0876	1.6031	2.2082	1.1611	1.7896	2.5901
		1	0.5420	0.8000	1.1089	0.5791	0.8933	1.2995
		3	0.1485	0.2237	0.3260	0.1584	0.2490	0.3783
		5	0.0409	0.0677	0.1170	0.0433	0.0740	0.1308
		7	0.0157	0.0311	0.0681	0.0163	0.0330	0.0728
		10	0.0084	0.0206	0.0541	0.0085	0.0212	0.0562

Результаты численного решения задачи с использованием сеток сгущения различного типа представлены в таблице 5. В методических целях и для большей наглядности, используемые в этих расчетах значения параметров ( $\epsilon_0=4$  и  $\eta_0=6$ ), были выбраны большими по сравнению с реальными значениями этих параметров (например, в работе [1]  $\epsilon_0=\eta_0=2$ ).

Данные, приведенные в табл.5, продемонстрировали приблизительно-но одинаковую погрешность решения при применении различных моделей сгущения сетки. Максимальные погрешности решения в расчетах с использованием сеток удвоения были практически одинаковыми: погрешности “модифицированных” сеток  $D_1$  и  $D_2$  практически совпадали, а погрешность сетки  $D_0$  оказалась незначительно больше. В расчетах с применением сетки Фибоначчи  $F_0$  (без модификации) уменьшение  $\delta_{\max}$  составляло от 20 до 40 %% по сравнению с сеткой удвоения при малом числе шагов сетки  $N_g$ . Погрешность модифицированной сетки Фибонач-

чи ( $F_1$ ) для соответствующего числа шагов оказалась больше, что связано с увеличением значения минимального шага, как это уже отмечалось выше.

Таблица 5

$\eta_0=6,$ $\varepsilon_0=4$		Относительная погрешность решения $\delta_{\max} \%$										
Тип сетки		Сетка удвоения шагов						Сетка Фибоначчи				
Модель		D <sub>0</sub>		D <sub>1</sub>		D <sub>2</sub>		F <sub>0</sub>		F <sub>1</sub>		
nr	N <sub>D</sub>	N <sub>g</sub>	%%	N <sub>g</sub>	%%	N <sub>g</sub>	%%	N <sub>g</sub>	%%	N <sub>g</sub>	N <sub>g</sub>	%%
10	0	0	10.9164	регулярная сетка во всей области								
	0	0	10.3066	регулярная сетка; сгущение к т. r=0: сетка "удвоения" D <sub>0</sub> , N <sub>D</sub> =5								
	1	4	5.1238					3				
	3	8	1.6368	10	1.5656	9	1.5667	7	1.2127	8	5	2.2348
	5	12	0.7498	14	0.7465	13	0.7465	11	0.5439	13	7	1.1420
	7	16	0.5448	18	0.5448	17	0.5448	15	0.4502	17	8	0.8871
	10	22	0.4862	24	0.4862	23	0.4862	21	0.4351	23	9	0.7296
	20	0	0	4.8574	регулярная сетка во всей области							
0		0	4.6911	регулярная сетка; сгущение к т. r=0: сетка "удвоения" D <sub>0</sub> , N <sub>D</sub> =5								
1		4	2.3451					3				
3		8	0.7013	10	0.6709	9	0.6710	7	0.5023	8	5	0.9973
5		12	0.2679	14	0.2672	13	0.2672	11	0.1713	13	7	0.4631
7		16	0.1668	18	0.1670	17	0.1670	15	0.1246	17	8	0.3372
10		22	0.1378	24	0.1378	23	0.1378	21	0.1171	23	9	0.2591
40		0	0	2.2810	регулярная сетка во всей области							
	0	0	2.2350	регулярная сетка; сгущение к т. r=0: сетка "удвоения" D <sub>0</sub> , N <sub>D</sub> =5								
	1	4	1.1182					3				
	3	8	0.3184	10	0.3024	9	0.3024	7	0.2233	8	5	0.4637
	5	12	0.1024	14	0.1018	13	0.1018	11	0.0578	13	7	0.1994
	7	16	0.0518	18	0.0519	17	0.0519	15	0.0344	17	8	0.1367
	10	22	0.0373	24	0.0373	23	0.0373	21	0.0307	23	9	0.0979

Эффективность применения сеток сгущения на границе раздела сред ( $r=r_p=1$ ) иллюстрируется на рис. 4 и 5 на примере решения задачи (2)-(5) при значениях  $\varepsilon_0=4$ ,  $\eta_0=6$  и  $nr=20$ . Затупленные области на этих рисунках являются областями сгущения. В расчетах использовались "модифицированные" сетки удвоения шагов D<sub>1</sub>: N<sub>D</sub>=5 при r=0; при r=r<sub>p</sub>=1

$N_{Dp}=N_{Dd}=10$  (сплошная линия)  $N_{Dp}=N_{Dd}=0$  (точечная линия; “регулярная” сетка). На рис. 4 и 5 решение, представленное сплошной линией ( $N_{Dp}=N_{Dd}=10$ ), можно считать с графической точностью за точное решение ( $\delta_{\max} \approx 0.14\%$ ). На “регулярной” сетке ( $N_{Dp}=N_{Dd}=0$ ) основную ошибку в решение дает окрестность разрыва ( $r=r_p=1$ ). На рис. 4 представлено решение задачи с краевым условием второго рода при  $r=0$  ( $r \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$ ). В правой части области II решение является достаточно точным ( $\delta \leq 0.57\%$  при  $1.5 \leq r \leq 2$ ) поскольку на границе  $r=R=2$  используется краевое условие первого рода, а возмущение решения за счет разрыва в этой области мало. В области I относительная ошибка изменяется слабо ( $\delta_{\max} \approx 4.693\%$  при  $r=0$ ;  $\delta \approx 4.687\%$  на разрыве  $r=r_p=1$ ), а в области II достаточно быстро уменьшается до приемлемого уровня. При использовании краевого условия 1-го рода ( $\varphi_1 = \varphi(r=0) = I(0) = 1$ ) погрешность решения оказывается максимальной на границе раздела сред ( $\delta_{\max} \approx 4.517\%$ ; рис.5) и уменьшается с увеличением расстояния от разрыва в обе стороны.

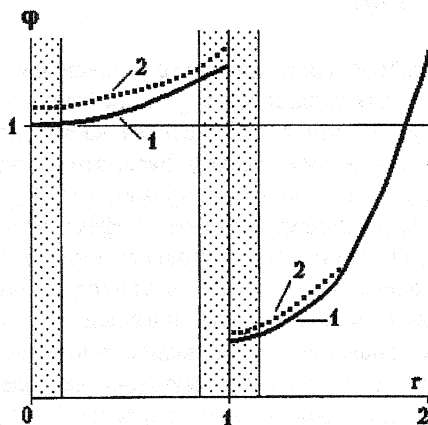


Рис. 4. Решение задачи с краевым условием второго рода.  
 $\varepsilon_0=4, \eta_0=6, n\tau=20. N_{D0}=5: 1 - N_{Dp}=N_{Dd}=10; 1 - N_{Dp}=N_{Dd}=0.$

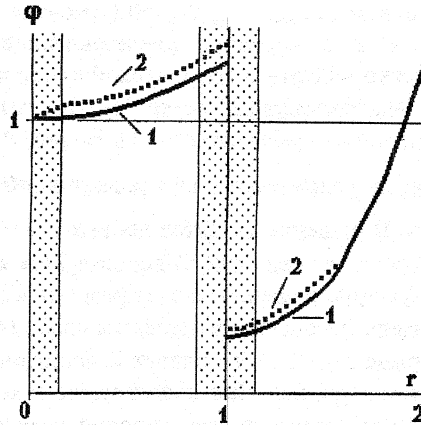


Рис. 5. Решение задачи с краевым условием первого рода.  
 $\varepsilon_0=4, \eta_0=6, nr=20, N_{D0}=5$ : 1 -  $N_{Dp}=N_{Dd}=10$ ; 2 -  $N_{Dp}=N_{Dd}=0$ .

## 9. Заключение

В данной работе для корректного разрешения особенностей задачи было предложено два типа сеток сгущения (сетки “Фибоначчи” и сетки удвоения шагов), на которых радиальная часть оператора Лапласа аппроксимируется со вторым порядком. Рассматривались как простые сетки сгущения ( $F_0, D_0$ ), так и “модифицированные” ( $F_1, D_1, D_2$ ). Результаты расчетов показали достаточно высокую эффективность всех рассмотренных типов сеток сгущения. При одинаковом числе шагов сетки для всех используемых моделей сеток сгущения точность решения оказалась примерно одинаковой. Максимальная погрешность численного решения ( $\delta_{\max}$ ) быстро уменьшается с увеличением числа шагов “сгущения” при небольшом числе шагов (соответствующим не более пятикратному удвоению шага при применении сетки удвоения  $N_D=5, N_g=2N_D+1=11$ ). На сетках сгущения с  $N_D>5$  погрешность решения уменьшается, но значительно медленнее. Поэтому эффективность применения сеток сгущения с  $N_D>5$  уменьшается. Расчеты, в которых использовались сетки удвоения с  $N_D=5$  (соответственно сетки “Фибоначчи” с  $N_g=11$ ), показали достаточно высокую точность решения. В наиболее “плохом” случае ( $\varepsilon_0=4, \eta_0=8; nr=10$ ) максимальная относительная погрешность была на уровне одного процента ( $\delta_{\max} \approx 1\%$ ).

В граничных точках “простых” сеток сгущения ( $F_0, D_0$ ), в которых происходит соединение этих сеток с регулярной частью глобальной сет-



ки, оператор Лапласа аппроксимируется только с первым порядком. Несмотря на потерю порядка аппроксимации в одной точке, погрешность численного решения, полученного в расчетах с использованием этих сеток, оказалась не больше (а в ряде случаев даже и меньше), чем в расчетах с применением “модифицированных” сеток  $(F_1, D_1, D_2)$ , в которых второй порядок аппроксимации сохраняется во всех точках. Это связано, по-видимому, с небольшим нарушением “монотонности нарастания” шагов модифицированных сеток.

Модифицированная сетка “Фибоначчи”  $(F_1)$  имеет тот недостаток, что при большом числе “первоначальных” (заданных) шагов  $N_g$  необходимо добавлять большое число минимальных шагов  $(\Phi_{N_g-2}+1)$ ; например, для  $N_g=10$ ,  $\Phi_{N_g-2}+1=22$ ), что увеличивает количество вычислений и резко снижает эффективность сеток сгущения.

## Литература

1. Красильников М.А., Кузелев М.В., Панин В.А., Филиппычев Д.С. Теория усилителя на релятивистском электронном пучке с диэлектрико-плазменным заполнением//Физ.Плазмы. 1993. т.19. №3. С. 1061-1068.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. 656с.
3. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978. 144 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978. 592 с.