Галкин В.Я., Уфимцев М.В.

О СМЕСИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С БИНОМИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Рассмотрены вероятностные свойства смеси распределения Пуассона конечного порядка k с биномиальным распределением: принадлежность её к классу обобщённых пуассоновских распределений, выражение для функции вероятностей в виде конечной суммы, рекуррентные соотношения для функции вероятностей и её производных по параметрам, моментные характеристики. Данное исследование обобщает полученные Филиппу [1] результаты.

Введение

В [2], [3] мы исследовали двухпараметрическое семейство распределений Пуассона порядка k, получаемое в результате перехода от условной случайной величины (с.в.) $\xi \mid \zeta$, имеющей биномиальное $Bi(\zeta,\varepsilon)$ распределение, к безусловной с.в. ξ. Предполагалось, что с.в. ζ имеет распределение Пуассона порядка k (натуральное число k задано). Вероятностные свойства и соотношения, полученные для этого семейства распределений, позволили рассмотреть как теоретически, так и с использованием численных методов статистическую задачу оценивания его параметров [3], [4].

С точки зрения общей теории распределений наше двухпараметрическое семейство является смесью ([5], стр.160) распределения Пуассона порядка k с биномиальным распределением, соответствующая вероятностная постановка задачи рассмотрена в [1]. Но использована несколько отличающаяся от нашей модель: условное распределение является биномиальным $Bi(n\zeta,\varepsilon)$, где натуральное число n играет роль шага (декремента: в схеме Бернулли рассматривается последовательность 0, n, $2n$, ... независимых испытаний). Таким образом, результаты, полученные нами в [2], [3], нужно переформулировать применительно к рассматриваемой в [1] смеси. Нами получены некоторые важные результаты, обобщающие рассмотрение Филиппу.

I. Постановки задачи

Пусть независимые с.в. ζ_j, $j = 1, 2, \dots, k$ распределены по закону Пуассона ($\zeta_j \sim Po(\lambda)$) с одним и тем же параметром λ. Тогда с.в.

$$\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \ldots + k\zeta_k \tag{1}$$

имеет распределение Пуассона порядка k, что будем обозначать $\zeta \sim P_k(\lambda)$. Производящая функция вероятностей (п.ф.в.) для ζ равна [6], [1-3]

$$g_\varsigma(z) = E\{z^\varsigma\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{\zeta = n\} = \exp\left\{-k\lambda + \lambda\sum_{j=1}^{k} z^j\right\}. \qquad (2)$$

Пусть с.в. $X|\zeta \sim Bi\,(n\zeta,\, p),\ 0 < p \le 1$. Рассматривается безусловное распределение с.в. X. Тогда п.ф.в. для X легко выписывается по формуле полной вероятности и равна [1]

$$g_X(z) = \exp\left\{\lambda \sum_{m=1}^{k} ((q+pz)^{mn} - 1)\right\}, \qquad (3)$$

где положено $q = 1 - p$. В дальнейшем будем обозначать соответствующее распределение символически как $P_kB(\lambda, n, p)$.

Введём некоторые определения, важные для дальнейшего изложения (см. [7], а также [8], стр. 8-11).

Определение 1. Пусть $F_X(x;\theta)$ – функция распределения (ф.р.) случайной величины X и пусть параметр распределения θ сам является с.в. Y с ф.р. $F_Y(x;\ \vec{\Phi})$, зависящей, вообще говоря, от вектора собственных параметров $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_l)$. Тогда с.в., обозначаемую $X \underset{\theta}{\wedge} Y$ и имеющую ф.р.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(x;y)\,dF_Y(y;\vec{\Phi}) = F_{X \underset{\theta}{\wedge} Y}(x;\vec{\Phi}),$$

называют *составной*, или *смешанной* величиной X по отношению к с.в. Y, или просто смешанной с.в. X. Функцию распределения для с.в. $X \underset{\theta}{\wedge} Y$ именуют составным (смешанным) распределением $F_X(x)$ по отношению к “смешиваемому” распределению F_Y, или просто составным (смешанным) распределением F_X, что записывают как $F_X \underset{\theta}{\wedge} F_Y$.

Заметим, что процедура смешивания является частным случаем перехода от условной с.в. $X|Y$ к безусловной с.в. X. Она тесно связана с процедурой обобщения, впервые введённой Феллером ([9], стр.292-293) для распределения Пуассона: если X_1 – с.в. с распределением Пуассона $Po(\lambda)$ и с п.ф.в.

$$g_1(z) = exp\{\lambda(z - 1)\},$$

а X_2 – с.в. с п.ф.в. $g_2(z)$, то *обобщённое* (*сложное*) распределение Пуассона имеет п.ф.в.

$$g_{12}(z) = g_1(g_2(z)) = exp\{\lambda(g_2(z) - 1)\}.$$

Впоследствии Гёрлэнд [7] обобщил это определение на случай произвольных дискретных с.в.

Определение 2. Пусть $g_1(z)$ и $g_2(z)$ – производящие функции вероятностей дискретных с.в. X_1 и X_2 с ф.р. $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Тогда с.в., имеющую п.ф.в. в виде сложной функции

$$g_{12}(z) = g_1(g_2(z)),$$

называют обобщённой с.в. X_1 по отношению к “обобщающей” с.в. X_2, или просто обобщённой с.в. X_1, и обозначают $X_1 \vee X_2$.

Определение 3. Функцию распределения, отвечающую $g_{12}(z)$, называют обобщённым распределением F_1 относительно “обобщающего” распределения F_2, или просто обобщённым распределением F_1, и записывают символически как $F_1 \vee F_2$.

Гёрлэндом [7] была доказана следующая теорема, связывающая обобщённое распределение $F_1 \vee F_2$ и составное (смешанное по параметру θ) распределение.

Пусть F_2 – распределение некоторой дискретной с.в., зависящее от параметра θ, так что её п.ф.в. $g_2(z;\ \theta)$ удовлетворяет условию $g_2^j(z;\theta)$ = $g_2(z;\ j\theta)$, и пусть дискретное распределение F_1 имеет п.ф.в. $g_1(z)$ = $\sum p_j z^j$. Тогда составное $F_2(\theta j) \underset{\theta}{\wedge} F_1$ и обобщённое $F_1 \vee F_2$ распределения совпадают.

Он же показал, что операции смешивания и обобщения обладают рядом полезных свойств, например, ассоциативностью.

В рассматриваемом сейчас случае смешивающее биномиальное распределение $Bi(m,\ p)$ является воспроизводящим по параметру m (в нашем варианте $m = n\zeta$) (см. [10], стр.134), так что условия теоремы Гёрлэнда выполнены. Поэтому распределение с.в. X является обобщённым относительно обобщающего распределения $P_k(\lambda)$.

С другой стороны, изучаемое смешанное распределение является сложным распределением Пуассона. Действительно, распределение Пуассона порядка k с п.ф.в. (2) получается в результате обобщения распределения Пуассона $Po(\mu)$, $\mu = k\lambda$, с дискретным равномерным распределением с.в. ρ, имеющим функцию вероятностей (ф.в.) $f_i = P\{\rho = i\} = 1/k$ в точках $1, 2, \ldots, k$:

$$P_k(\lambda) = Po(\mu) \vee \{f_i\}.$$

Для дискретной равномерной с.в. ρ получим п.ф.в.

$$g_\rho(z) = E\{z^\rho\} = \sum_{i=1}^{k} f_i z^i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z^i$$

и, подставляя $g_\rho(z)$ в определение Феллера, доказываем сложный пуассоновский характер с.в. $\zeta \sim P_k(\lambda)$.

Тогда смешанное распределение для с.в. X можно символически записать как $Bi(m,\ p) \underset{m}{\wedge} Po(\mu) \vee \{f_i\}$. Теорема Гёрлэнда применима, так как биномиальное распределение – воспроизводящее по параметру m. Поэтому изучаемое смешанное распределение эквивалентно

$$(Po(\mu) \vee \{f_i\}) \vee Bi(1, p).$$

Используя ассоциативность операции обобщения, имеем эквивалентность

$$(Po(\mu) \vee \{f_i\}) \vee Bi(1, p) \sim Po(\mu) \vee (\{f_i\} \vee Bi(1, p)).$$

Применив к обобщённому распределению $\{f_i\} \vee Bi(1, p)$ теорему Гёрлэнда, получим окончательно

$$Po(\mu) \vee (\{f_i\} \vee Bi(1, p)) \sim Po(\mu) \vee (Bi(i, p) \underset{i}{\wedge} \{f_i\}),$$

то есть с.в. X является сложной пуассоновской.

Можно дать ещё одну постановку задачи – через суммирование случайного числа с.в.: рассматривается сумма из N слагаемых

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N, \quad X_j \sim Bi(n, p), \quad j = 1, \ldots, k,$$

причём само число N является дискретной с.в. $N \sim P_k(\lambda)$ и не зависит от случайных величин X_j. Тогда $S_N \sim P_k B(\lambda, n, p)$.

Эта постановка была рассмотрена нами в [8] (стр.17) для более широкого класса распределений, чем у Филиппу, а он доказал в [1] теорему применительно к распределению $P_k B(\lambda, n, p)$.

II. Функция вероятностей

Для с.в. X в [1] выписано формальное представление ф.в. p_j $j = 0, 1, 2, \ldots$ в виде бесконечного ряда

$$p_j = P\{X = j\} = e^{-k\lambda} \left(\frac{p}{q}\right)^j \sum_{i=0}^{\infty} \binom{ni}{j} q^{ni} \sum_{i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k = i} \frac{\lambda^{i_1 + \ldots + i_k}}{i_1! \ldots i_k!},$$

бесполезное для практических целей. Используемая нами техника [2], [3], [6] позволяет получить ф.в. в форме конечной суммы. Чтобы это показать, сначала преобразуем сумму в (3) по формуле бинома

$$\sum_{m=1}^{k} ((q + pz)^{mn} - 1) = \sum_{m=1}^{k} \left(\sum_{l=0}^{mn} C_{mn}^l p^l z^l q^{mn-l} - 1 \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \left(\sum_{l=1}^{mn} C_{mn}^l p^l z^l q^{mn-l} + q^{mn} - 1 \right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{kn-1} p^l z^l \left(\sum_{m=[l/n]+1}^{mn} C_{mn}^l q^{mn-l} - \sum_{m=1}^{k} (1 - q^{mn}) \right),$$

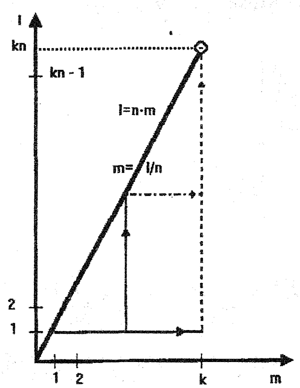

Рис. 1

здесь смена порядка суммирования происходит согласно рис.1.

Введём теперь вспомогательные переменные

$$\varepsilon_l = p^l \sum_{m=[l/n]+1}^{k} C_{mn}^l q^{mn-l}, \quad l = 1, 2, \ldots, kn - 1. \tag{4}$$

Обозначим через ε сумму величин ε_l, так что

$$\varepsilon = \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l = \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=1}^{mn} C_{mn}^l p^l q^{mn-l} = \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=0}^{mn} C_{mn}^l p^l q^{mn-l} - \sum_{m=1}^{k} q^{mn} =$$

$$= \sum_{m=1}^{k} (p+q)^{mn} - \sum_{m=1}^{k} q^{mn} = \sum_{m=1}^{k} (1 - q^{mn}).$$

В наших обозначениях (3) запишется как

$$g_X(z) = \exp\left\{ \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l \; (z^l - 1) \right\}. \tag{3'}$$

Теперь можно использовать формулу обращения для п.ф.в.

$$p_j = P\{X = j\} = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} g_X(z) \bigg|_{z=0}, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислим эту производную, используя формулу Фаа ди Бруно для производных высших порядков сложной функции *f(z)≡F(y(z))* ([11], стр. 626):

$$p_j = \sum_{m=0}^{j} \frac{d^m}{dy^m} F(y) \sum_{\substack{I_1^{(j)}=j, \\ J_1^{(j)}=m}} \prod_{l=1}^{j} \frac{\left(\frac{d^l}{dz^l} y(z) \right)^{i_l}}{(l!)^{i_l} \, i_l!} \Bigg|_{z=0}, \tag{5}$$

где приняты обозначения

$$y = y(z) = \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l (z^l - 1), \quad F(y(z)) = g_X(z) = e^y, \quad I_1^{(j)} = \sum_{l=1}^{j} l i_l, \quad J_1^{(j)} = \sum_{l=1}^{j} i_l,$$

суммирование идёт по неотрицательным решениям системы уравнений $I_1^{(j)} = j$, $J_1^{(j)} = m$. Так как $y(0) = -\lambda\, \varepsilon$, имеем

$$p_j = \sum_{m=0}^{j} e^{-\lambda\varepsilon} \sum_{\substack{I_1^{(j)}=j,\\ J_1^{(j)}=m}} \prod_{l=1}^{j} \frac{(y^{(l)}(z))^{i_l}}{(l!)^{i_l}\, i_l!}\Bigg|_{z=0} \qquad (6)$$

Учитывая, что

$$y^{(l)}(0) = \lambda\, \varepsilon_l\, l!\ ,\ l = 1, 2, ..., K,$$

и

$$y^{(l)}(0) = 0 \text{ в противном случае,}$$

где обозначено $K = \min\{j, kn - 1\}$, делаем вывод, что в (6) суммировать надо лишь при $i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, ..., i_K \geq 0$, а $i_{K+1} = i_{K+2} = ... = 0$. Тогда условия суммирования в (6) будут $I_1^{(j)} = \sum_{l=1}^{j} l i_l = j$, $I_1^{(K)} = m$, и точно так же в произведении в качестве верхнего предела будет не j, а K.

Итак, имеем для (6)

$$p_j = \sum_{m=0}^{j} e^{-\lambda\varepsilon} \sum_{\substack{I_1^{(K)}=j,\\ J_1^{(K)}=m}} \prod_{l=1}^{K} \frac{(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}}{(l!)^{i_l}\, i_l!},\quad j = 0, 1, 2, ... \,. \qquad (6')$$

Согласно лемме ([6], стр.21), множества целых чисел $\{I_1^{(m)} = r; J_1^{(m)} = s,\ s = 0, 1,\ ...,\ r\}$ и $\{I_1^{(m)} = r\}$ при любом целом неотрицательном r совпадают, т.е. (6′) упрощается: пропадает суммирование по m, а во внутренней сумме условие $I_1^{(K)} = m$ не нужно. Окончательно получим

$$p_j = e^{-\lambda\varepsilon} \sum_{I_1^{(K)}=j} \prod_{l=1}^{K} \frac{(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}}{(l!)^{i_l}\, i_l!} = p_0 \sum_{I_1^{(K)}=j} \prod_{l=1}^{K} \frac{(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}}{(l!)^{i_l}\, i_l!}, \qquad (7)$$

где обозначено

$$p_0 = P\{X = 0\} = e^{-\lambda\varepsilon} = \exp\left\{-\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} (q^{ln} - 1)\right\}. \qquad (7')$$

III. Рекуррентные формулы

Рассматривая п.ф.в. (3′), можно получить точно так же, как это сделано в [2], рекуррентность по j для ф.в. (7), (7′):

$$jp_j = \lambda \sum_{l=1}^{K} l\varepsilon_l p_{j-l}, \; p_0 = \exp\{-\lambda\varepsilon\}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Кроме того, аналогично [2] можно получить производную по λ в виде

$$\frac{\partial p_j}{\partial \lambda} = \sum_{l=1}^{K} \varepsilon_l p_{j-l} - p_j \varepsilon, \tag{9}$$

а производная по p тождественна формуле (17) статьи [2]:

$$\frac{\partial p_j}{\partial p} = \frac{1}{p}\left(jp_j - (j+1)p_{j+1}\right). \tag{10}$$

Так как вывод этих трёх формул, в общем, основан на сходных идеях, выведем, например, (10). Для начала заметим, что производная по p с учётом изменения порядка дифференцирования по p и по z представляется как

$$\frac{\partial p_j}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left\{\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j} g_X(z)\right\}\Bigg|_{z=0} = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left\{\frac{\partial}{\partial p} g_X(z)\right\}\Bigg|_{z=0}.$$

Воспользуемся п.ф.в. (3) для вычисления производной по p:

$$\frac{\partial g_X(z)}{\partial p} = g_X(z)\cdot\lambda\sum_{i=1}^{k}(1-p+pz)^{in-1} in(z-1) \; .$$

Тогда искомая производная будет равна

$$\frac{\partial p_j}{\partial p} = \frac{1}{j!}\left\{\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left(g_X(z)\lambda\sum_{i=1}^{k}(1-p+pz)^{in-1} inz\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^j}{\partial z^j}\left(g_X(z)\lambda\sum_{i=1}^{k}(1-p+pz)^{in-1} in\right)\right\}\Bigg|_{z=0} .$$

При дифференцировании первого слагаемого применим формулу Лейбница для произведения функций, а выражение для j–ой производной второго слагаемого, стоящее в круглых скобках, совпадает с производной по z п.ф.в. (3). Поэтому предыдущее выражение можно записать как

$$\frac{1}{j!}\left\{\sum_{l=0}^{j} C_j^l \frac{\partial^{j-l}}{\partial z^{j-l}}\left(g_X(z)\lambda\sum_{i=1}^{k}\left(1-p+pz\right)^{in-1}in\right)\frac{\partial^l}{\partial z^l}(z)\right\}_{z=0} -$$

$$-\frac{1}{j!}\left\{\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left(g_X(z)\frac{1}{p}\frac{\partial g_X(z)}{\partial z}\right)\right\}_{z=0} = \frac{1}{j!}\left\{C_j^1\frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}}\left(g_X(z)\frac{1}{p}\frac{\partial g_X(z)}{\partial z}\right)\right\}_{z=0} -$$

$$-\frac{1}{p}\frac{1}{j!}\left\{(j+1)\frac{1}{j+1}\frac{\partial^{j+1}}{\partial z^{j+1}}g_X(z)\right\}_{z=0} = \frac{j}{p}\frac{1}{j!}\left\{\frac{\partial^j g_X(z)}{\partial z^j}\right\} - \frac{j+1}{p}\frac{1}{(j+1)!}\left\{\frac{\partial^{j+1} g_X(z)}{\partial z^{j+1}}\right\}_{z=0},$$

что даёт после подстановки $z = 0$ требуемое выражение (10).

IV. Моментные характеристики

Характеристическая функция (х.ф.) для распределения $P_k B(\lambda, n, p)$ имеет вид (сравните с (3′))

$$\varphi_X(t) = E\left\{e^{itX}\right\} = \exp\left\{\lambda\sum_{l=1}^{kn-1}\varepsilon_l\,(e^{itl}-1)\right\}, \tag{3″}$$

откуда легко получить семиинварианты κ_r произвольного порядка r

$$\kappa_r = (-1)^r\,\frac{d^r}{dt^r}\ln\varphi_X(t)\Bigg|_{t=0} = \lambda\sum_{l=1}^{kn-1}\varepsilon_l l^r\,,\ r = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Генеральные моменты произвольного порядка для с.в. X могут быть получены из производящей функции (генеральных) моментов (п.ф.м.)

$$m(t) = E\{exp(tX)\} = \varphi(t/i)$$

как

$$\alpha_r = E\{X^r\} = \frac{d^r}{dt^r}m(t)\Bigg|_{t=0} = (-i)^r\frac{d^r}{dt^r}\varphi(t)\Bigg|_{t=0},\ r = 1, 2, \ldots$$

Для вычисления центральных моментов $\mu_r = E\{(X - \alpha_1)^r\}$ используется производящая функция $C(t)$ центральных моментов (п.ф.ц.м.)

$$C(t) = \exp\{-t\alpha_1\}\,m(t) = E\{\exp(t(X-\alpha_1))\},$$

из которой центральные моменты получаются дифференцированием:

$$\mu_r = \frac{d^r}{dt^r}C(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^r}{dt^r}\left\{e^{-\alpha_1 t}m(t)\right\}\Big|_{t=0}\ , r = 2, 3, \ldots$$

В силу (3″) имеем

$$m(t) = \exp\{\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l (e^{lt}-1)\}\ ,$$

а

$$C(t) = \exp\left\{\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l (e^{lt} - lt - 1)\right\}. \qquad (12)$$

Обращение п.ф.ц.м. (12) проведём по формуле (5) (полагая $F(y(t)) = C(t)$), при этом

$$y = y(t) = \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l (e^{lt} - lt - 1).$$

Рассуждения такие же, как при получении ф.в. (7):

$$\mu_r = r!\cdot \sum_{m=0}^{r} \frac{d^m}{dy^m} e^y \sum_{\substack{I_1^{(r)}=r\\ J_1^{(r)}=m}} \prod_{j=1}^{r} \frac{\left({d^j}/{dt^j} \left\{ \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l (e^{lt} - lt - 1) \right\} \right)^{i_j}}{(j!)^{i_j} i_j!}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= r! \cdot \sum_{I_1^{(r)}=r} \prod_{j=1}^{r} \frac{\left(\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l\, {d^j}/{dt^j} (e^{lt} - lt - 1) \right)^{i_j}}{(j!)^{i_j} i_j!}\Bigg|_{t=0} .$$

Заметим, что при $j=1$ производная $\frac{d}{dt}\left(e^{lt} - lt - 1\right)$ в нуле равна $\left(le^{lt} - l\right)_{t=0} = l - l = 0$. Значит, в произведении типа $\prod_{j=1}^{r} a^{i_j}$ должно быть $i_1 = 0$, чтобы результат был отличен от 0. Таким образом, имеем для $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mu_r = r! \sum_{I_2^{(r)}=r} \prod_{j=2}^{r} \frac{\left(\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l l^j \right)^{i_j}}{(j!)^{i_j} i_j!}\ , \qquad (13)$$

причём $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$ (как для любого распределения).

Можно получить четыре низших момента популяции с $P_k B(\lambda, n, p)$ либо с помощью (13), или же по формуле (11), учитывая, что $\alpha_1 = \kappa_1$, $\mu_2 = \kappa_2$, $\mu_3 = \kappa_3$, а $\mu_4 = \kappa_4 + 3\mu_2^2$:

$$\kappa_l = \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} l\varepsilon_l = \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} lp^l \sum_{j=[l/n]+1}^{k} C_{jn}^l (1-p)^{jn-l} =$$

$$= \lambda \sum_{l=0}^{kn-1} lp^l \sum_{j=[l/n]+1}^{k} C_{jn}^l (1-p)^{jn-l} = \lambda \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{jn} lC_{jn}^l p^l (1-p)^{jn-l} = \lambda \sum_{j=1}^{k} pjn,$$

т.е.

$$\alpha_l = E\{X\} = \lambda np \frac{k(k+1)}{2} \qquad (14)$$

(сопоставьте с формулой (11) из [2]), что совпадает с первой формулой из Утверждения 2.4 [1]. Далее, согласно (13),

$$\mu_2 = 2! \sum_{2i_2=2} \prod_{j=2}^{2} \frac{\left(\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l l^j\right)^{i_j}}{(j!)^{i_j} i_j!} =< i_2 = 1, j = 2 >= 2! \frac{\lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l l^2}{(2!)^1 1!} =$$

$$= \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l l^2 = \kappa_2 = \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} l^2 p^l \sum_{m=[l/n+1]}^{k} C_{mn}^l q^{mn-l} = \lambda \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{jn} l^2 C_{jn}^l p^l (1-p)^{jn-l}.$$

Внутренняя сумма по l есть не что иное, как второй начальный момент

$$\alpha_2 = E\{\xi^2\} = Var\{\xi\} + (E\{\xi\})^2$$

для с.в. $\xi \sim Bi(jn,p)$, и, как известно ([9], стр.233), он равен $jnp(1-p) + (jn)^2 p^2$. Суммируя по j, получим

$$\mu_2 = \lambda np \frac{k(k+1)}{2} \left\{ (1-p) + np \frac{2k+1}{3} \right\} = \frac{\alpha_1}{3} \{3q + np(2k+1)\}, \qquad (15)$$

что совпадает со второй формулой из [1] (Утверждение 2.4; сравните также с формулой (11) из [2]).

Формулы для μ_3 и μ_4 можно получить с помощью несложных, но весьма громоздких промежуточных выкладок, исходя из выражений (11) или (13). Приведём результаты.

$$\kappa_3 = \lambda \sum_{l=1}^{kn-1} \varepsilon_l l^3 = \lambda \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{jn} l^3 C_{jn}^l p^l (1-p)^{jn-l} =$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{k} \left\{ (jn)^3 p^3 + 3(jn)^2 p^2 - 3(jn)^2 p^3 + jnp - 3jnp^2 + 2jnp^3 \right\} ,$$

откуда, вычисляя вручную или с помощью Maple V, Rel.4 [12], получаем

$$\mu_3 = \alpha_1 \left\{ 1 + n(2k+1) - 3)p + (2 - n(2k+1) + \frac{k}{2}(k+1)n^2)p^2 \right\}. \tag{16}$$

Можно записать μ_3 в другой форме через μ_2 и α_1, справедливость которой легко проверяется,

$$\mu_3 = 3q\mu_2 + \alpha_1 \left\{ q(p-2) + p^2 n^2 \frac{k(k+1)}{2} \right\}. \tag{16$'$}$$

Если положить $p = 1$, $n = 1$, то получим μ_3 для чистого распределения Пуассона порядка k:

$$\mu_3 = \lambda \sum_{l=1}^{k} l^3 = \lambda \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 .$$

Наконец, четвёртый семиинвариант κ_4 можно записать наиболее компактно в виде

$$\kappa_4 = \alpha_1 \left\{ q(1-6pq) + q(7-11p)pn\frac{2k+1}{3} + 3qp^2n^2k(k+1) \right\} + \\ + \alpha_1 \left\{ p^3 n^3 \frac{(2k+1)(3k^2+3k-1)}{15} \right\} \tag{17}$$

(правильность выражения (17) проверялась с помощью Maple). Выражая κ_4 через μ_2, имеем

$$\kappa_4 = \left(p^2 n^2 \frac{3k^2+3k-1}{5} + q(7-11p) \right) \mu_2 + \\ + q\alpha_1 \left\{ 1 - 7q + 5pq + p^2 n^2 \frac{12k^2+12k+1}{5} \right\}, \tag{17$'$}$$

что приводит при $p = 1$, $n = 1$ к

$$\kappa_4 = \mu_2 \frac{3k^2+3k-1}{5}. \tag{17$''$}$$

Из (17′) следует формула для

$$\mu_4=\mu_2\left(3\mu_2+p^2n^2\frac{3k^2+3k-1}{5}+q(7-11p)\right)+$$

$$+q\alpha_1\left\{1-7q+5pq+p^2n^2\frac{12k^2+12k+1}{5}\right\}. \qquad (18)$$

В контрольном случае $p=n=1$ имеем для $P_k(\lambda)$ – распределения Пуассона порядка k

$$\mu_4=\mu_2\left(3\mu_2+\frac{3k^2+3k-1}{5}\right).$$

Интересно отметить связь между центральными моментами произвольного порядка и комбинаторными полиномами: если применить к п.ф.ц.м. (12) обобщённую формулу Лейбница, получим

$$\mu_r=\sum_{J_1^{(kn-1)}=r}\prod_{l=1}^{kn-1}\frac{1}{i_l!}\frac{d^{i_l}}{dt^{i_l}}\exp\left\{\lambda\varepsilon_l(e^{lt}-lt-1)\right\}_{t=0}.$$

С учётом того, что

$$\frac{d^{i_l}}{dt^{i_l}}\exp\left\{\lambda\varepsilon_l(e^{lt}-lt-1)\right\}_{t=0}=l^{i_l}\overline{S}_{i_l}(\lambda\varepsilon_l),$$

где

$$\overline{S}_r(a)=\frac{d^r}{dt^r}\exp\left\{a(e^t-t-1)\right\}_{t=0}=\sum_{m=0}^{r}\overline{\sigma}_r^{(m)}a^m$$

– присоединённые многочлены Стирлинга (об их свойствах см. [8], стр. 57 и след.), $\overline{\sigma}_r^{(m)}$ – присоединённые числа Стирлинга ([13], стр. 92; [14], стр. 180),

$$\overline{\sigma}_r^{(m)}=\frac{d^r}{dt^r}\frac{1}{m!}(e^t-t-1)\Big|_{t=0},$$

имеем для центральных моментов выражение

$$\mu_r=r!\sum_{J_1^{(kn-1)}=r}\prod_{l=1}^{kn-1}\frac{l^{i_l}}{i_l!}\overline{S}_{i_l}(\lambda\varepsilon_l),\ \ r=0,1,2,\ldots \qquad (19)$$

Литература

1. Philippou, A.N. (1989) Mixtures of Distributions by the Poisson Distribution of Order k . Biometrical Journal, v.31, no. 1, pp.67–74
2. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Некоторые свойства двухпараметрического семейства распределений Пуассона порядка k. В кн.: Проблемы математической физики. М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 46–54
3. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Некоторые вероятностно-статистические свойства двухпараметрического семейства распределений Пуассона порядка k. // Вестник МГУ. Сер.15. Вычислительная математика и кибернетика, 2000, № 2. С. 32–38
4. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Оценивание параметров распределений Пуассона порядка k. // Прикладная математика и информатика, 1999, № 2 С. 84–93
5. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы обработки данных. М.: Мир. 1980
6. Филиппу А.Н. Пуассоновские и сложные пуассоновские распределения порядка k и некоторые их свойства. – Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР, 1983, № 130. С. 175–180
7. Gurland, J. Some interrelations among compound and generalized distributions. // Biometrika, 1957, v.44, pp. 265–268
8. Белов А.Г., Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Вероятностно-статистические задачи при экспериментальном разделении множественных процессов. М.: изд. МГУ. 1985
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её применение, т.1. М.: Мир. 1967
10. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука. 1967
11. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган. М.: Наука. 1979
12. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. М.: Мир. 1997
13. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ. 1963
14. Риордан Дж. Комбинаторные тождества. М.: Наука. 1982