Галкин В.Я., УфимцевМ.В.

Оценивание параметров распределений Пуассона порядка k

В статье [1] рассматривались свойства двухпараметрического семейства распределений Пуассона порядка k с функцией вероятностей (ф.в.)

$$p_n = exp\left\{-\lambda\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l\right\}\cdot\sum_{I_1^{(k)}=n}\prod_{m=1}^{k}\frac{\lambda^{i_m}(\varepsilon_m)^{i_m}}{i_m!} = p_0\cdot\left\{\sum_{I_1^{(k)}=n}\prod_{m=1}^{k}\frac{\lambda^{i_m}(\varepsilon_m)^{i_m}}{i_m!}\right\}, \tag{1}$$

где $\lambda > 0,\ 0 < \varepsilon \le 1$ – параметры распределения,

$$\varepsilon_l = \varepsilon^l\sum_{j=l}^{k}C_j^l(1-\varepsilon)^{j-l} = \varepsilon^l\sum_{j=l}^{k}C_j^l\,\bar\varepsilon^{\,j-l},\ l = 1,\ \dots,\ k \tag{2}$$

– вспомогательные переменные,

$I_1^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^{k}\alpha\cdot i_\alpha$, $i_1, i_2, \dots, i_k \ge 0$ – некоторые неотрицательные целые числа,

$$p_0 = exp\{-\lambda\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l\} = exp\{\lambda\sum_{l=1}^{k}\left(\bar\varepsilon^l - 1\right)\},\ \bar\varepsilon = 1-\varepsilon. \tag{3}$$

В важном частном случае $k = 2$ (1) - (3) сводятся к

$$p_n = p_0\cdot\varepsilon^n\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{\lambda^{n-m}(3-2\varepsilon)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}, \tag{1'}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(3-2\varepsilon),\ \varepsilon_2 = \varepsilon^2, \tag{2'}$$

$$p_0 = exp\{-\lambda\,\varepsilon(3-\varepsilon)\}. \tag{3'}$$

Конструктивный способ вычисления ф.в. p_n задаётся рекуррентной формулой

$$n\,p_n = \lambda\sum_{l=1}^{\min\{n,k\}} l\varepsilon_l p_{n-l},\ n = 1,2,\dots \tag{4}$$

с заданной в (3) начальной величиной p_0. Производные (1) по параметрам могут быть определены из равенств

$$\frac{\partial p_n}{\partial\lambda} = \sum_{l=1}^{\min\{n,k\}}\varepsilon_l p_{n-l} - p_n\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p_n}{\partial\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(np_n - (n+1)p_{n+1}\right),\ n = 0,1,\dots . \tag{6}$$

Из моментных характеристик распределения (1) проще всего получить семиинварианты произвольного порядка r:

$$\kappa_r = \lambda\sum_{l=1}^{k}\varepsilon_l\cdot l^r,\quad r = 1,2,\dots, \tag{7}$$

что даёт для четырёх низших семиинвариантов и связанных с ними моментов

$$\kappa_1 = \alpha_1 = \lambda\varepsilon\cdot k(k+1)/2,$$

$$\kappa_2 = \mu_2 = \lambda\varepsilon\cdot k(k+1)/6\cdot(3+2(k-1)\varepsilon) = \alpha_1(1+2/3\cdot\varepsilon(k-1)),$$

$$\kappa_3 = \mu_3 = \lambda\varepsilon\cdot k(k+1)/4 \cdot (2 + 2(k-1)\varepsilon + (k-1)(k-2)\varepsilon^2) \tag{8}$$
$$= \alpha_1 (1 + \varepsilon(k-1) + \varepsilon^2/2 \cdot (k-1)(k-2)),$$
$$\kappa_4 = \mu_4 - 3(\mu_2)^2 = \lambda\varepsilon\cdot k(k+1)/30 \cdot (15 + 70(k-1)\varepsilon + 45(k-1)(k-2)\varepsilon^2$$
$$+ 6(k-1)(k-2)(k-3)\varepsilon^3) = \alpha_1 (1 + 14/3\cdot\varepsilon(k-1) + 3\varepsilon^2 (k-1)(k-2)$$
$$+ 2/5\cdot\varepsilon^3 (k-1)(k-2)(k-3)).$$

Все эти свойства ф.в. понадобятся нам при оценивании параметров распределения (1) и исследовании свойств полученных оценок.

Пусть задана выборка объёма N : n_1, ..., n_N из распределения (1). Ставится задача (i) отыскания точечных оценок параметров λ, ε, а также (ii) точечного оценивания одного параметра λ при заданном ε или (iii) оценивания ε при фиксированном λ. Так как существуют различные способы построения точечных оценок параметров [2, 3], то нужно сравнение эффективности оценок.

Из рекуррентностей (5), (6) видно, что ф.в. p_n регулярна в смысле её первых и вторых частных производных по параметрам [4], т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial p_n}{\partial\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial p_n}{\partial\varepsilon} = 0\ ,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 p_n}{\partial\lambda^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 p_n}{\partial\lambda\partial\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial^2 p_n}{\partial\varepsilon^2} = 0\ .$$

Тем самым выполнены достаточные условия для справедливости многомерного неравенства Крамера-Рао о нижней границе ковариационной матрицы оценок, а также утверждения об асимптотической нормальности оценок максимального правдоподобия (в дальнейшем – МП) [3,4] .

Пусть $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\lambda}$ – произвольная несмещённая оценка параметров распределения ε, λ, а $\mathbf{Cov}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\lambda})$ – её ковариационная матрица. Тогда

$$\mathbf{Cov}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\lambda}) \geq N^{-1}\cdot \boldsymbol{B}^{-1}, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{B} = \begin{Vmatrix} E\left(\dfrac{\partial \ln p_n}{\partial\lambda}\right)^2 & E\left(\dfrac{\partial \ln p_n}{\partial\lambda}\cdot\dfrac{\partial \ln p_n}{\partial\varepsilon}\right) \\ E\left(\dfrac{\partial \ln p_n}{\partial\lambda}\cdot\dfrac{\partial \ln p_n}{\partial\varepsilon}\right) & E\left(\dfrac{\partial \ln p_n}{\partial\varepsilon}\right)^2 \end{Vmatrix} \tag{10}$$

информационная матрица Фишера (информант) [4].

Одномерный вариант этой теоремы, когда величина ε известна, а λ – единственный оцениваемый параметр, даёт известное неравенство Крамера-Рао для нижней границы дисперсии (НГД) его оценки

$$D(\tilde{\lambda}) \geq \left(N\cdot E\left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial\lambda}\right)^2\right)^{-1} . \tag{9'}$$

Неравенства (9), (9') дают естественную нижнюю границу для точечных оценок параметров, и так как в силу регулярности распределения (1) по параметрам метод МП является асимптотически эффективным (для него при $N \to \infty$ неравенства (9), (9') обращаются в равенства), то эта НГД не улучшаема. Поэтому она принята нами за меру эффективности различных оценок и была вычислена при различных k, ε, λ . К сожалению, выражения (5), (6) для производных не приводят к представлению для элементов $\boldsymbol{B}$ в виде конечных сумм, так что соответствующие ряды (для фиксированных k, ε и λ)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda}\right)^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\frac{\partial \ln p_n}{\partial \varepsilon}\right)^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n \frac{\partial \ln p_n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \ln p_n}{\partial \varepsilon}$$

считались численно с помощью (5), (6). Результаты вычислений будут далее проанализированы.

Метод МП даёт асимптотически нормальные, асимптотически эффек-тивные оценки, имеющие смещение $O(N^{-1})$. Ковариационная матрица МП-оценок вычисляется по формулам (9), (10). С учётом соотношений (5), (6) система уравнений МП имеет вид в случае (i)

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln p_{n_i}}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\min\{k,n_i\}} \varepsilon_j \frac{p_{n_i-j}}{p_{n_i}} - N \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j = 0 \ ,$$
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \ln p_{n_i}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \left(n_i - (n_i+1) \frac{p_{n_i+1}}{p_{n_i}} \right) = 0. \qquad (11)$$

В случаях (ii) и (iii) рассматривается только одно из уравнений (11). В случае произвольного $k > 2$ не удаётся сколько-нибудь упростить нелинейную систему (11). Не удаётся доказать существования решения и его единственности (это важно, так как метод МП требует нахождения глобального максимума функции правдоподобия). Да и вычисление решения системы нелинейных уравнений нетривиально (скажем, при применении метода Ньютона матрица Якоби системы (11) может оказаться вырожденной для конкретного набора значений n_1, ..., n_N).

Рассмотрим задачу в важном частном случае $k = 2$, когда система принимает вид (для упрощения обозначений знаки оценок " ^ " опущены):

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_1 p_{n_i-1} + \varepsilon_2 p_{n_i-2}}{p_{n_i}} = N(3\varepsilon - \varepsilon^2), & (12') \\ \displaystyle\lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_1 p_{n_i} + 2\varepsilon_2 p_{n_i-1}}{p_{n_i}} = \varepsilon_1 \lambda N + 2\varepsilon_2 \lambda \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{n_i-1}}{p_{n_i}} = N a_1 & (12'') \end{cases}$$

(здесь a_1 – выборочное среднее; переход от второго из уравнений (11) к (12") осуществлён с использованием рекуррентности (4)). С учётом (2') запишем (12") в виде

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_1 \frac{p_{n_i-1}}{p_{n_i}} = \frac{3-2\varepsilon}{2\varepsilon} N a_1 - \lambda N \frac{(3-2\varepsilon)^2}{2} \ . \qquad (13')$$

С помощью рекуррентности (4) преобразуем (12') к форме

$$\lambda \sum_{i=1}^{N} 2\varepsilon_2 \frac{p_{n_i-2}}{p_{n_i}} = 2N\left(a_1 - \lambda \cdot (3\varepsilon - \varepsilon^2)\right). \qquad (13'')$$

Сложив (13') и (13"), получим

$$3\varepsilon\lambda = a_1, \qquad (14)$$

что после подстановки в (13") даёт

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{n_i-2}}{p_{n_i}} = N \ . \qquad (15)$$

Подставив (14) в (13'), получим

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{n_i-1}}{p_{n_i}} = N \,. \tag{16}$$

Таким образом, (14) вместе с любым из уравнений (15) и (16) определяет решение системы уравнений МП. Очевидно, что система, в которой первое уравнение (для $k = 2$ совпадающее с первым из уравнений *метода моментов (18'))* позволяет исключить одно из неизвестных ε или λ, так что итерационный процесс требуется только для решения одного уравнения, т.е. проще, чем исходная система (11). Кроме того, справедлива

Теорема 1. При заданном ε уравнение (16) имеет не более одного решения по λ

Доказательство . Достаточно доказать, что функция

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{n_i-2}}{p_{n_i}} - N$$

является монотонно убывающей по λ , т.е. $f'(\lambda) < 0$ при всех $\lambda > 0$. В свою очередь, для этого достаточно, чтобы при всех $n \geq 2$

$$p_n^2 \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{p_{n-2}}{p_n}\right) = p'_{n-2}\, p_n - p_{n-2}\, p'_n < 0.$$

При $n = 2$ это проверяется непосредственно, так как из (1') и (4)

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{p_0}{p_2}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{2p_0}{\lambda(\varepsilon_1 p_1 + 2\varepsilon_2 p_0)}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{2}{\lambda(\lambda\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2)}\right) < 0.$$

При $n > 2$ имеем для p_n (1'), а для p_{n-2} запишем

$$p_{n-2} = p_0 \cdot \varepsilon^{n-2} \sum_{l=0}^{[n/2]-1} \frac{\lambda^{n-l-2}}{l!} \frac{(3-2\varepsilon)^{n-2l-2}}{(n-2l-2)!} \,,$$

где p_0 определена в (3'). Тогда

$$p'_{n-2}\, p_n - p_{n-2}\, p'_n = \tag{17}$$

$$= p_0^{\,2} \varepsilon^{2n-2} \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{[n/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]-1} \lambda^{2n-m-l-2} \frac{1}{m!} \frac{1}{l!} \frac{(3-2\varepsilon)^{2n-2m-2l-2}}{(n-2m)!(n-2l-2)!} \big((n-l-2)-(n-m)\big).$$

Заменой $M = m - 1$ правая часть (17) приводится к виду

$$p_0^{\,2} \varepsilon^{2n-2} \frac{1}{\lambda} \left\{ \sum_{l=0}^{[n/2]-1} \sum_{M=0}^{[n/2]-1} \frac{\lambda^{2n-M-l-3}}{(M+1)!\,l!} \cdot (M-l-1) \frac{(3-2\varepsilon)^{2n-2M-2l-4}}{(n-2M-2)!(n-2l-2)!} \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{[n/2]-1} \frac{\lambda^{2n-l-2}}{l!} (-l-2) \cdot \frac{(3-2\varepsilon)^{2n-2l-2}}{n!(n-2l-2)!} \right\}.$$

Последняя сумма отрицательна при $\lambda > 0$. Двойная сумма симметрична по l, M. Члены, соответствующие $M = l$, отрицательны при $\lambda > 0$. Поэтому осталось рассмотреть случай $M \neq l$. Пусть i и j – целые, $0 \leq i < j \leq [\,n/2] - 1$. Рассмотрим попарно члены с $M = i$, $l = j$ и с $M = j$, $l = i$. Тогда вклад соответствующей пары слагаемых будет

$$p_0{}^2 \varepsilon^{2n-2} \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^{2n-i-j-3}}{i!\,j!} \frac{(3-2\varepsilon)^{2n-2i-2j-4}}{(n-2j-2)!(n-2i-2)!} \left\{ \frac{i-j-1}{i+1} + \frac{j-i-1}{j+1} \right\},$$

причём слагаемое в фигурных скобках равно

$$-\frac{(i-j)^2-(i+j)-2}{(i+1)(j+1)}, \qquad \text{т.е.}$$

отрицательно. Теорема доказана. □

Нелинейный вид (11) и проблематичность существования МП-оценок, их единственности, наличие серьёзных вычислительных проблем диктуют поиск других, более простых оценок параметров. Широко употребительны оценки по <u>методу моментов</u>, которые в случае (i) приводят к системе

$$\begin{cases} \lambda\varepsilon \dfrac{k(k+1)}{2} = a_1, & (18') \\ \lambda\varepsilon \dfrac{k(k+1)}{2} \dfrac{3+2(k-1)\varepsilon}{3} = m_2, & (18'') \end{cases}$$

где m_2 – выборочная дисперсия. Деля (18”) на (18’), приходим к условию разрешимости $2(k-1)\varepsilon = 3(m_2/a_1 - 1) > 0$, т.е. должно быть $m_2 > a_1$. Искомой оценкой для ε будет

$$\hat{\varepsilon} = \frac{3}{2(k-1)} \left(\frac{m_2}{a_1} - 1 \right), \tag{19}$$

а из (18’) оценка для λ

$$\hat{\lambda} = \frac{4(k-1)}{3k(k+1)} \cdot \frac{a_1^2}{m_2 - a_1}. \tag{20}$$

Смещение оценок, полученных по методу моментов, порядка $O(N^{-1})$, а дисперсия функции $y = y(a_1, m_j)$ от выборочных моментов, удовлетворяющей ограничениям, которые в нашем случае заведомо выполняются, есть [2]

$$D(y) = \left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)^2_{\substack{a_1=\alpha_1,\\ m_j=\mu_j}} D(a_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial m_j}\right)^2_{\substack{a_1=\alpha_1,\\ m_j=\mu_j}} D(m_j) +$$

$$+2\left(\frac{\partial y}{\partial a_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial m_j}\right)_{\substack{a_1=\alpha_1,\\ m_j=\mu_j}} \operatorname{cov}(a_1, m_j) + O(N^{-3/2}). \tag{21}$$

Учитывая, что [2]

$$D(a_1) = \frac{\mu_2}{N}, \quad D(m_2) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N} + O(N^{-2}) = \frac{\kappa_4 + 2\kappa_2^2}{N} + O(N^{-2}), \tag{22}$$

$$\operatorname{cov}(a_1, m_2) = \mu_3/N + O(N^{-2}) = \kappa_3/N + O(N^{-2}),$$

и вычисляя дисперсию оценок (19), (20) с помощью формул (8), (21), (22), получим с точностью $O(N^{-1/2})$

$$2N{\cdot}D(\hat{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{\alpha_1}\cdot\frac{90+45(k-4)\varepsilon+2(k^2-20k+46)\varepsilon^2}{15(k-1)}+\left(\frac{3\mu_2}{\alpha_1(k-1)}\right)^2, \qquad (23)$$

$$2N{\cdot}D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{\alpha_1}\cdot\frac{90+15(k-10)\varepsilon+(17k^2-25k+62)\varepsilon^2}{15(k-1)\,\varepsilon}+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{3\mu_2}{\alpha_1(k-1)}\right)^2. \qquad (24)$$

Видно, что $D(\hat{\varepsilon})$ убывает по λ, и при $\lambda\to\infty$ дисперсия $\hat{\varepsilon}$ стремится к постоянной $(3\mu_2/(\alpha_1(k\text{-}1)))^2/2N$, а дисперсия $\hat{\lambda}$ при $\lambda\to\infty$ имеет квадратичный рост $(3\lambda\mu_2/(\alpha_1(k\text{-}1)\varepsilon)^2/2N$, однако при малых λ существенен линейный первый член (24).

Если же оценивается по методу моментов единственный параметр, то используется уравнение (18') для первого момента, и искомые оценки будут

$$\hat{\lambda}=\frac{2a_1}{\varepsilon k(k+1)} \qquad (25)$$

(случай (ii): ε известно, оценивается λ) и

$$\hat{\varepsilon}=\frac{2a_1}{\lambda k(k+1)} \qquad (26)$$

(случай (iii): оценивается ε, а λ известно). Обе эти оценки являются несмещёнными, а соответствующие дисперсии легко вычисляются как

$$D(\hat{\lambda}) = \frac{4}{\varepsilon^2k^2(k+1)^2}D(a_1)=\frac{4\mu_2}{\varepsilon^2k^2(k+1)^2N}=\frac{2}{3}\frac{\lambda}{\varepsilon N}\frac{3+2(k-1)\varepsilon}{\varepsilon k(k+1)}, \qquad (27)$$

$$D(\hat{\varepsilon}) = \frac{4}{\lambda^2k^2(k+1)^2D(a_1)}=\frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{\lambda N}\frac{3+2(k-1)\varepsilon}{k(k+1)}. \qquad (28)$$

В случае (i) одновременного оценивания двух параметров может быть предложена модификация [5] оценок по методу моментов, фактически являющаяся частным случаем метода подстановки, или аналогии [6, стр.213] –оценки ищутся из (18') и частотности h_0 в нуле:

$$h_0\approx p_0 = exp\{-\lambda\textstyle\sum_1^k\varepsilon_j\}. \qquad (29)$$

Теорема 2. Если $a_1 \neq 0$, $h_0 \neq 1$ и система (18'), (29) имеет решение, то при фиксированном λ это решение единственно по ε.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $a_1=0$ и $h_0=1$. Тогда либо (1) $\lambda \neq 0$, $\varepsilon = 0$, $\bar{\varepsilon} = 1$ (так как предполагается $\varepsilon > 0$ по постановке задачи, то этот случай невозможен). В этом случае любое $\lambda > 0$ – решение; либо (2) $\lambda = 0$, $0<\varepsilon<1$ – в этом случае произвольное ε является решением. Случаи $a_1=0$, $h_0<1$ или $h_0 = 1$, $a_1 \neq 0$ невозможны.

Пусть $a_1 > 0$, $h_0 < 1$. Исключая λ, имеем из (3)

$$\sum_{j=1}^{k}(\bar{\varepsilon}^j-1)=\frac{\ln h_0}{\lambda}=\frac{\varepsilon k(k+1)\ln h_0}{a_1}=\frac{(1-\bar{\varepsilon})k(k+1)\ln h_0}{a_1}.$$

Так как случай $\bar{\varepsilon}=1$ был только что рассмотрен, то $0\leq\bar{\varepsilon}<1$, и, сокращая на $\bar{\varepsilon}-1$, получим

$$\sum_{j=1}^{k-1}\bar{\varepsilon}^{j}=\frac{k(k+1)\ln h_0}{a_1}\ . \qquad (30)$$

При $\bar{\varepsilon}\in(0,\ 1)$ производная по ε в левой части (30) отрицательна:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\bar{\varepsilon}^{j}\right)=-\sum_{j=1}^{k-1}j\cdot\ \bar{\varepsilon}^{j-1}\ <0,$$

следовательно, левая часть (30) монотонно убывает по ε, и если (30) имеет решение ε^*, то это решение единственно.

Обозначим через ε^*, λ^* решение системы уравнений (18'), (29). Эти оценки являются асимптотически несмещёнными (смещение $O(N^{-1})$) [2]. Асимптотическая дисперсия вычисляется по (21) с учётом того, что

$$D(h_0)=\frac{p_0(1-p_0)}{N}+O(N^{-2})\ ,\ \mathrm{cov}(a_1,h_0)=-\ \frac{\alpha_1 p_0}{N}+O(N^{-2}), \qquad (31)$$

и она равна (с точностью до членов $O(N^{-1/2})$)

$$ND(\varepsilon^*)=\frac{1}{\Delta^2}\left\{\frac{2\varepsilon\cdot\tilde{\varepsilon}^2}{\lambda k(k+1)}\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon(k-1)\right)+\frac{1-p_0}{p_0}\left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2-2\varepsilon^2\left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\lambda}\right)\right\}, \qquad (32)$$

$$ND(\lambda^*)=\frac{1}{\Delta^2}\left\{\frac{2\lambda\varepsilon\cdot s^2}{k(k+1)}\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon(k-1)\right)+\frac{1-p_0}{p_0}-2\lambda\varepsilon\cdot s\right\}, \qquad (33)$$

где обозначено

$$\tilde{\varepsilon}=\sum\nolimits_1^k\varepsilon_j\ ,\ s=\sum\nolimits_1^k j\bar{\varepsilon}^{j-1}\ ,\ \Delta=\varepsilon s-\tilde{\varepsilon}$$

(производные $\frac{\partial\varepsilon^*}{\partial a_1},\frac{\partial\varepsilon^*}{\partial h_0},\frac{\partial\lambda^*}{\partial a_1}$ и $\frac{\partial\lambda^*}{\partial h_0}$ вычислялись как производные для системы неявных функций [7]).

Можно показать, что при $0\le h_0<1$ система (18'), (29) допускает единственное решение. Будем рассматривать эти соотношения как систему двух уравнений

$$\begin{cases} f_1(a_1,h_0,\varepsilon,\lambda)=a_1-\dfrac{\varepsilon\lambda k(k+1)}{2}=0,\\ f_1(a_1,h_0,\varepsilon,\lambda)=h_0-\exp\{-\lambda\sum_1^k(\bar{\varepsilon}^j-1)\}=0\ . \end{cases}$$

Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial a_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial h_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\varepsilon} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial h_0} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\varepsilon} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{\lambda k(k+1)}{2} & \dfrac{\varepsilon k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & -\lambda s\cdot p_0 & -\tilde{\varepsilon}\cdot p_0\end{pmatrix}$$

равен 2, причём определитель

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial\varepsilon} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\lambda}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial\varepsilon} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\lambda}\end{vmatrix}=\frac{\lambda k(k+1)}{2}\cdot p_0(\varepsilon s-\tilde{\varepsilon})\neq\ 0\ ,$$

за исключением, самое большее, k точек, в которых может выполняться равенство

$$0 = \Delta = \varepsilon s - \tilde{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{k} j\bar{\varepsilon}^{j-1}\varepsilon - k + \sum_{j=1}^{k} \bar{\varepsilon}^{j} \;.$$

Во всех остальных точках система имеет единственное решение [7, стр.215].

Для сравнения различных способов оценивания параметров ф.в. (1) были вычислены величины $\sqrt{N}D(\hat{\varepsilon})$ и $\sqrt{N}D(\hat{\lambda})$ дисперсий (23), (24) оценок по методу моментов, *а также подобные по смыслу величины из (9), (9'), (32) и (33) при* различных k и ε как функции λ. Наш выбор обусловлен тем, что в большинстве приложений вероятность ε определяется постановкой задачи и не может быть изменена *в ходе эксперимента, тогда как λ является контролируемым параметром* (интенсивность счёта). Проверка аналитических выражений (23), (24), (32), (33), расчёт соответствующих дисперсий (9), (10), (23), (24), (32), (33) и построение графиков сделаны с помощью пакета Mathematica 2.2 для IBM PC [8]. На рис. 1 и 2 представлены в полу-логарифмическом масштабе графики вычисленных величин для кратности $k=2$.

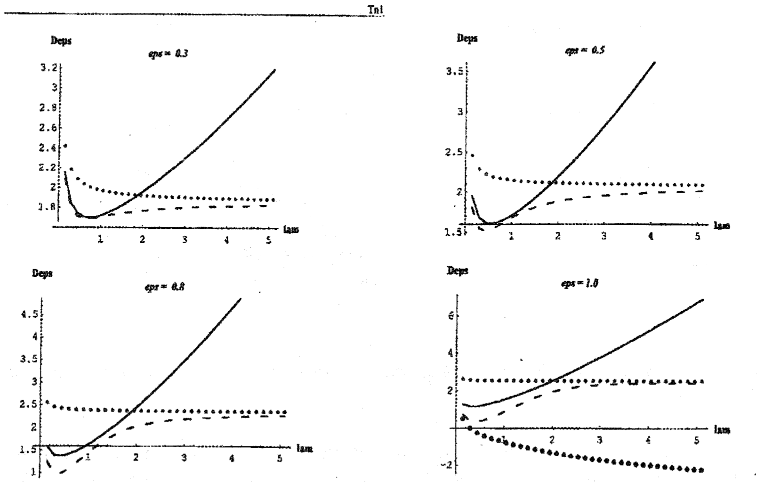

Рис.1 (а – г). Зависимость логарифмов дисперсии $\sqrt{N}D(\hat{\varepsilon})$ оценок параметра ε как функция λ

На рис.1 изображена зависимость логарифмов дисперсии оценок параметра ε как функция λ. Выбраны значения ε = 0.3, 0.5, 0.8 и 1.0. Сетка по аргументу λ взята равномерной с начальным значением λ = 0.1, шагом 0.1 и конечным λ = 5.0. Легенда на рис.1а–1в такова: пунктирная кривая соответствует дисперсии МП-оценки, точечная – оценке метода моментов, сплошная кривая – оценке метода подстановки [5, 6]. Видно, что МП-оценка имеет минимум при $\lambda \approx 0.6$ для ε = 0.3; с ростом ε положение минимума смещается в сторону меньших значений λ ($\lambda_{опт.} \approx 0.35$ при ε = 1.). При увеличении λ дисперсия МП-оценки несколько растёт и асимптотически стремится к постоянной (об этом см. ниже).

Оценка ε по методу моментов имеет монотонно убывающую по λ дисперсию, как это следует из (23). При $\lambda \to \infty$ дисперсия этой оценки близка к дисперсии соответствующей МП-оценки. Это следует из доказанной нами в [1] теоремы об асимптотической нормальности распределения (1) при $\lambda \to \infty$. Так как для нормального распределения метод моментов и метод МП эквивалентны, то это и объясняет поведение оценки по методу моментов при больших λ.

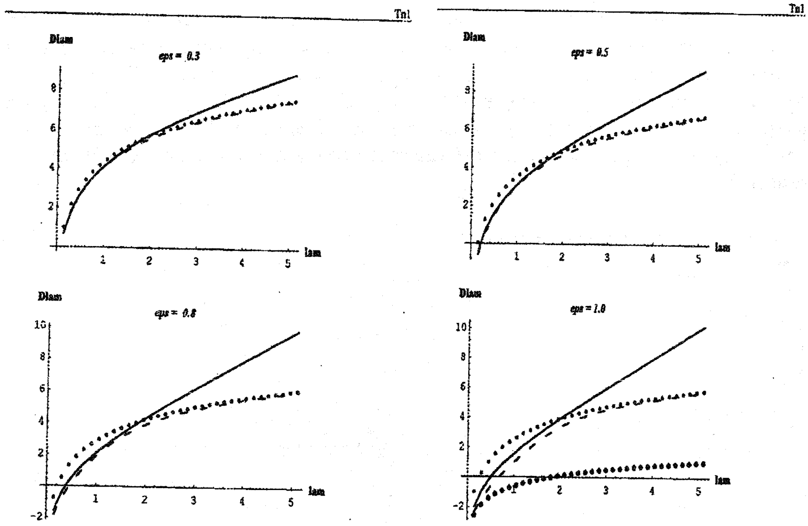

Рис.2 (а – г). Зависимость логарифмов дисперсии $\sqrt{N}D(\hat{\lambda})$ оценок параметра λ как функция λ

Наконец, при малых $\lambda \leq 1$ оценка метода подстановки для параметра ε имеет примерно ту же дисперсию, что и МП-оценка. Однако с ростом λ эта дисперсия быстро возрастает и при $\lambda = 5$. в несколько раз превышает значение НГД (дисперсию МП-оценки). Эта тенденция усиливается с ростом ε.

Для значения $\varepsilon = 1$. (рис.1г) приведена и четвёртая кривая (крупные точки, самая нижняя). Она соответствует случаю (iii) НГД оценки (9') параметра ε при фиксированном λ. Видно, что эта величина при умеренных и больших λ во много раз меньше, чем одноимённая величина в случае совместного оценивания двух параметров ε, λ (пунктирная кривая). Она монотонно убывает по λ и в целом достаточно близка к дисперсии (28) оценки ε по методу моментов.

Рис. 2 (а–г), иллюстрирующий зависимость дисперсий оценок λ как функции λ, менее интересен. Легенда этих графиков та же, что и для рис.1. Видно, что все три функции возрастают по λ. Как и для рис.1, оценка метода подстановки и МП-оценка близки при малых $\lambda \leq 1$, а при больших λ асимптотически эквивалентны оценка метода моментов и МП-оценка. Снова случай $\varepsilon = 1$ (рис.2г) подтверждает, что значение НГД (9') оценки параметра λ в несколько раз меньше, чем одноимённая величина в случае совместной МП-оценки двух параметров.

В заключение скажем, что рассмотрение дисперсий оценок для случая $k = 3$ не изменило качественной картины результатов: отмеченные на рис.1, 2 особенности сохраняются, просто значения дисперсий одноимённых величин ε в случае $k = 3$ оказались в $1.5 \div 2$ раза меньше. Отметим также, что возрастание дисперсий в случае совместного оценивания двух параметров объясняется сильными корреляциями в недиагональных элементах матрицы B^{-1} : корреляция оценок ε и λ возрастает от $0.24 \div 0.915$ при $\lambda = 0.1$ до $0.995 \div 0.998$ при $\lambda = 10$.

Анализ результатов расчётов приводит к выводу, что более надёжные оценки (меньшие дисперсии) получаются при постановках задачи, в которых один из параметров распределения известен или может быть оценен независимо от другого. В этой ситуации может быть рекомендован метод моментов, так как решения (25), (26) уравнения (18') сразу выписываются, а дисперсии оценок (27), (28) близки к НГД типа (9'). В случае одновременного оценивания параметров ε , λ должен быть сделан выбор в зависимости от предварительно оцененного значения λ между методом моментов при $\lambda \gg 1$ и оценкой метода подстановки (или МП) при $\lambda \leq 1$.

Литература

1. Галкин В.Я., Уфимцев М.В. Некоторые свойства двухпараметрического семейства распределений Пуассона порядка k . В кн.: Проблемы математической физики. М.: Диалог-МГУ. 1998, стр. 46–54

2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир. 1975

3. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука. 1973

4. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука. 1967

5. Costa S. A method measure photoneutron multiplicity. Nucl. Instrum. and Meth., 1963, vol.21, no 1, pp.129-135

6. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для втузов // Под ред. А.В.Ефимова - 2-е изд. М.: Наука. 1990

7. Немыцкий В.В., Слуцкая М.И., Черкасов А.Н. Курс математического анализа, т.II. Москва, ГИТТЛ. 1957

8. Wolfram, S. "Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer". Addison-Wesley, Reading, MA. 1991