С.В.Гаврилов

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ В СЛУЧАЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПРОВОДИМОСТИ И ОДНОГО ИЗМЕРЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ*

Введение

Под задачей электроимпедансной томографии обычно подразумевают задачу определения коэффициента электропроводности неоднородного ограниченного тела по измерениям характеристик электрического поля на его поверхности [1]. В настоящей работе рассматривается задача электроимпедансной томографии в ограниченной двумерной области с кусочно-постоянной электрической проводимостью $\sigma(M)$, значения которой считаются известными. Обратная задача сводится к поиску границы, состоящей из точек разрыва функции $\sigma(M)$. Исходной информацией служат значения потенциала и его нормальной производной на внешней границе области.

Исследованию единственности решения этой обратной задачи посвящены работы [2]-[5]. Численные методы ее решения рассматривались в работах [6]-[12]. В данной работе предлагается численный метод решения задачи электроимпедансной томографии. Перейдем к постановке задачи.

Рассмотрим на плоскости односвязную ограниченную область Ω с границей Γ_0. Пусть Ω_1 односвязная область с границей Γ_1, такая, что $\overline{\Omega_1} \in \Omega$. Кривые Γ_0 и Γ_1 достаточно гладкие. Обозначим через Ω_0 область $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется определить функцию $u(M)$, такую что: $u \in C(\overline{\Omega}), u(M) = u_i(M), M \in \Omega_i (i = 0, 1)$, где $u_i \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega_i})(i = 0, 1)$,

$$\Delta u_i(M) = 0, \quad M \in \Omega_i, \quad i = 0, 1, \tag{1}$$

$$u_0(M) = u_1(M), \quad M \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\sigma_0 \frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial u_1(M)}{\partial n}, \quad M \in \Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{4}$$

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-00259)

Здесь σ_0, σ_1 заданные положительные постоянные, а $f(M)$ известная функция, непрерывная и не постоянная на Γ_0.

Сформулируем обратную задачу. Пусть в краевой задаче (1)-(4) кривая Γ_0, постоянные σ_0, σ_1 и функция $f(M)$ на Γ_0 заданы, а кривая Γ_1 неизвестна. Требуется определить Γ_1, если задана дополнительная информация о решении задачи (1)-(4):

$$\frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{5}$$

где $g(M)$ известная функция, непрерывная на Γ_0, а n — внутренняя нормаль к Γ_0.

В работе строится метод численного решения поставленной обратной задачи. Метод включает в себя два этапа. На первом решается задача Коши для уравнения Лапласа и находится функция

$$u_0(M) = f_2(M), \quad M \in \Gamma_2 \tag{6}$$

на вспомогательном контуре Γ_2, таком что $\Gamma_2 \in \Omega_0$ и Γ_2 содержит внутри себя контур Γ_1. На втором этапе с найденной функцией $f_2(M)$ решается задача (1)-(4), (6). Иными словами, условие (5) в исходной обратной задаче заменяется на (6). Для решения задачи (1)-(4),(6) используется метод, предложенный в работе [13].

Нахождение значения потенциала на вспомогательном контуре

Рассмотрим односвязную область Ω_2, ограниченную снаружи контуром Γ_0 и изнутри контуром Γ_2. Функция $u_0(M)$ в области Ω_2 является решением задачи Коши для уравнения Лапласа

$$\Delta u_0(M) = 0, \quad M \in \Omega_2, \tag{7}$$

$$u_0(M) = f(M), \quad M \in \Gamma_0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_0(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \Gamma_0. \tag{9}$$

В результате решения этой задачи определяются значения функции $u_0(M) = f_2(M)$ на вспомогательном контуре Γ_2.

Перейдем к численному решению задачи (7)-(9). Численное решение задачи Коши для уравнения Лапласа рассматривалось в работах [14]-[17]. В данной работе используется метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа, основанный на методе граничных интегральных уравнений.

Для параметризации контуров Γ_0 и Γ_2 фиксируем полярную систему координат с центром в точке M_0, расположенной в внутри кривой Γ_2. Пусть границы Γ_0 и Γ_2 задаются в этой системе координат функциями $R(\psi) : R(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$ и $R_2(\psi) : R_2(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$ соответственно.

Воспользуемся методом граничных интегральных уравнений. Применяя основную формулу Грина к функции $u_0(M)$ из задачи (7)-(9), получим систему интегральных уравнений для функций $f_2(M)$ и $g_2(M)$, которые представляют собой значения функции $u_0(M)$ и ее нормальной производной на границе Γ_2 соответственно.

$$\begin{aligned} \pi f(M) = \int\limits_{\Gamma_0} g(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P - \int\limits_{\Gamma_0} f(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \\ + \int\limits_{\Gamma_2} g_2(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P - \int\limits_{\Gamma_2} f_2(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P, \quad M \in \Gamma_0, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \pi f_2(M) = \int\limits_{\Gamma_0} g(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P - \int\limits_{\Gamma_0} f(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \\ + \int\limits_{\Gamma_2} g_2(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P - \int\limits_{\Gamma_2} f_2(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P, \quad M \in \Gamma_2, \end{aligned} \tag{11}$$

где n_p — внутренняя нормаль в точке P к поверхности Γ_0 или Γ_2.

Запишем уравнения (10), (11) в полярной системе координат. Пусть на контуре Γ_0 точки $M(x_m, y_m)$ и $P(x_p, y_p)$ имеют следующие представления в полярной системе координат: $x_m = R(\psi)\cos\psi$, $y_m = R(\psi)\sin\psi$, $x_p = R(\varphi)\cos\varphi$, $y_p = R(\varphi)\sin\varphi$. Аналогично на контуре Γ_2 точки $M(x_m, y_m)$ и $P(x_p, y_p)$ имеют следующие представления: $x_m = R_2(\psi)\cos\psi$, $y_m = R_2(\psi)\sin\psi$, $x_p = R_2(\zeta)\cos\zeta$, $y_p = R_2(\zeta)\sin\zeta$. Введем обозначения $f(\psi) = f(R(\psi)\cos\psi, R(\psi)\sin\psi)$, $g(\psi) = g(R(\psi)\cos\psi, R(\psi)\sin\psi)$,
$f_2(\psi) = f_2(R_2(\psi)\cos\psi, R_2(\psi)\sin\psi)$, $g_2(\psi) = g_2(R_2(\psi)\cos\psi, R_2(\psi)\sin\psi)$. Переходя в уравнениях (10), (11) к полярным координатам, получим

$$\int\limits_0^{2\pi} H(\zeta, \psi) g_2(\zeta) d\zeta - \int\limits_0^{2\pi} E(\zeta, \psi) f_2(\zeta) d\zeta = V(\psi), \quad 0 \le \psi \le 2\pi, \tag{12}$$

$$\pi f_2(\psi) + \int\limits_0^{2\pi} J(\zeta,\psi) f_2(\zeta) d\zeta - \int\limits_0^{2\pi} L(\zeta,\psi;r) g_2(\zeta) d\zeta = U(\psi), \quad 0 \le \psi \le 2\pi, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} E(\zeta,\psi) = -\frac{1}{2}\sqrt{R_2^2(\zeta) + \left(R_2'(\zeta)\right)^2} \times \\ \times \ln\left(R_2^2(\zeta) + R^2(\psi) - 2R_2(\zeta)R(\psi)\cos(\zeta-\psi)\right), \end{aligned} \tag{14}$$

$$H(\zeta,\psi) = \frac{[R_2(\zeta) - R(\psi)\cos(\zeta-\psi)]R_2(\zeta) - R(\psi)R_2'(\zeta)\sin(\zeta-\psi)}{R_2^2(\zeta) + R^2(\psi) - 2R_2(\zeta)R(\psi)\cos(\zeta-\psi)}, \tag{15}$$

$$J(\zeta,\psi) = \frac{[R_2(\zeta) - R_2(\psi)\cos(\zeta-\psi)]R_2(\zeta) - R_2(\psi)R_2'(\zeta)\sin(\zeta-\psi)}{R_2^2(\zeta) + R_2^2(\psi) - 2R_2(\zeta)R_2(\psi)\cos(\zeta-\psi)}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} L(\zeta,\psi) = -\frac{1}{2}\sqrt{R_2^2(\zeta) + \left(R_2'(\zeta)\right)^2} \times \\ \times \ln\left(R_2^2(\zeta) + R_2^2(\psi) - 2R_2(\zeta)R_2(\psi)\cos(\zeta-\psi)\right), \end{aligned} \tag{17}$$

а функции $V(\psi)$ и $U(\psi)$ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} V(\psi) = \pi f(\psi) + \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{R(\varphi) + \left(R'(\varphi)\right)^2} \times \\ \times \ln\left(R^2(\varphi) + R^2(\psi) - 2R(\varphi)R(\psi)\cos(\varphi-\psi)\right) g(\varphi) d\varphi - \\ - \int\limits_0^{2\pi} \frac{[R(\varphi) - R(\psi)\cos(\varphi-\psi)]R(\varphi) - R(\psi)R'(\varphi)\sin(\varphi-\psi)}{R^2(\varphi) + R^2(\psi) - 2R(\varphi)R(\psi)\cos(\varphi-\psi)} f(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \tag{18}$$

$$U(\psi) = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{R(\varphi) + (R'(\varphi))^2}\times$$
$$\times \ln\left(R^2(\varphi) + R_2^2(\psi) - 2R(\varphi)R_2(\psi)\cos(\varphi-\psi)\right)g(\varphi)d\varphi +$$
$$+\int\limits_0^{2\pi} \frac{[R(\varphi) - R_2(\psi)\cos(\varphi-\psi)]R(\varphi) - R_2(\psi)R'(\varphi)\sin(\varphi-\psi)}{R^2(\varphi) + R_2^2(\psi) - 2R(\varphi)R_2(\psi)\cos(\varphi-\psi)} f(\varphi)d\varphi. \tag{19}$$

Таким образом, (12) и (13) составляют систему линейных интегральных уравнений для функций $f_2(M)$ и $g_2(M)$. Численное решение задачи продолжения (7)-(9) проводится следующим образом. На отрезке $[0, 2\pi]$ вводится сетка ψ_i и сеточные аналоги f_2^i и g_2^i функций $f_2(\psi)$ и $g_2(\psi)$. После замены интегралов, входящих в интегральные уравнения (12),(13), на квадратурные формулы задача нахождения f_2^i сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Решение задачи со вспомогательным контуром

С найденной на первом этапе функцией $f_2(\psi)$ на втором этапе решается задача (1)-(4),(6). Численный метод ее решения основан на представлении функции $u(M)$ в виде суммы потенциалов двойного и простого слоя, построении нелинейного операторного уравнения относительно функции, задающей неизвестный контур Γ_1, и решении полученного уравнения итерационным процессом, на каждом шаге которого операторное уравнение линеаризуется и решается с применением регуляризации. Ниже излагаются основные принципы этого метода, подробное описание приведено в [13].

Функция $u(M)$ представляется с помощью суммы потенциалов двойного и простого слоя.

$$u(M) = \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P)\frac{\partial}{\partial n_0}\ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P + (\sigma_0 - \sigma_1)\int\limits_{\Gamma_1} \nu(P)\ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right)dl_P. \tag{20}$$

Здесь точка M с координатами (x, y) принадлежит области Ω, а плотности $\mu(P), \nu(P)$ являются решениями системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{gathered}\pi\mu(M) + \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n_0} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \\ (\sigma_0 - \sigma_1) \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = f(M), \quad M \in \Gamma_0,\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\pi\nu(M) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int\limits_{\Gamma_0} \mu(P) \frac{\partial^2}{\partial n_1 \partial n_0} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P + \\ + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int\limits_{\Gamma_1} \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln\left(\frac{1}{\rho_{MP}}\right) dl_P = 0, \quad M \in \Gamma_1,\end{gathered} \tag{22}$$

где n_0 и n_1 внутренние нормали к кривым Γ_0 и Γ_1 соответственно.

Задача (1)-(4),(6) решается в предположении, что кривые Γ_0 и Γ_2 являются выпуклыми, а класс неизвестных кривых Γ_1 таков, что существует фиксированная точка M_0, являющаяся общим центром звездности для кривых Γ_1 из этого класса. Взяв точку M_0 в качестве центра полярной системы координат, неизвестную кривую Γ_1 можно задать как функцию $r(\psi)$ полярного угла ψ. Предполагается, что $r(\psi) \in C^2[0, 2\pi]$ и $\|r\|_{C^2[0,2\pi]} \leq c_0$, где c_0 — фиксированная постоянная.

После перехода к полярным координатам в уравнениях (21),(22) получаем

$$\begin{gathered}\pi\mu(\psi) + \int\limits_0^{2\pi} N(\varphi, \psi)\mu(\varphi) d\varphi + \\ +(\sigma_0 - \sigma_1) \int\limits_0^{2\pi} M(\zeta, \psi; r)\nu(\zeta) d\zeta = f(\psi), \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,\end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\pi\nu(\psi) + \frac{1}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int\limits_0^{2\pi} P(\varphi, \psi; r)\mu(\varphi) d\varphi + \\ + \frac{(\sigma_0 - \sigma_1)}{(\sigma_0 + \sigma_1)} \int\limits_0^{2\pi} Q(\zeta, \psi; r)\nu(\zeta) d\zeta = 0, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi.\end{gathered} \tag{24}$$

За представлением функций $N(\varphi, \psi)$, $M(\zeta, \psi; r)$, $Q(\zeta, \psi; r)$ и $P(\varphi, \psi; r)$

отсылаем читателя к работе [13]. Отметим, что в обозначениях этих функций подчеркивается их зависимость от других. Например, вместо $M(\varphi,\psi)$ используется обозначение $M(\varphi,\psi;r)$, чтобы указать на зависимость этой функции от функции r.

Рассматривая формулу (20) при $M\in\Gamma_2$, учитывая дополнительное условие (6) и переходя к полярным координатам, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} S(\varphi,\psi)\mu(\varphi)d\varphi+(\sigma_0-\sigma_1)\int\limits_0^{2\pi} T(\zeta,\psi;r)\nu(\zeta)d\zeta=f_2(\psi),\quad 0\le\psi\le 2\pi. \tag{25}$$

Представления для функций $S(\varphi,\psi)$ и $T(\zeta,\psi;r)$ приведены в [13].

Уравнения (23),(24) и (25) определяют нелинейное операторное уравнение относительно неизвестной функции $r(\psi)$

$$Ar=f_2. \tag{26}$$

Для вычисления функции $(Ar)(\psi)$ при заданной $r(\psi)$ нужно решить систему интегральных уравнений (23),(24) и определить $\mu(\psi),\nu(\psi)$, а затем вычислить значение интегрального оператора, стоящего в левой части уравнения (25).

Уравнение (26) решается итерационным методом. В качестве начального приближения $r_0(\psi)$ неизвестного контура принимается окружность. Пусть $r_n(\psi)$ функция, полученная на n-ом шаге итерационного процесса. После линеаризации уравнения (26) в окрестности функции $r_n(\psi)$ получается линейное операторное уравнение для функции $\rho_n(\psi)$:

$$B[r_n]\rho_n=\hat{f}_2[r_n]. \tag{27}$$

Решением этого уравнения определяется функция $\rho_n(\psi)$, которая позволяет получить $r_{n+1}(\psi)$:

$$r_{n+1}(\psi)=r_n(\psi)+\rho_n(\psi),\quad n=0,1,2.... \tag{28}$$

Численная реализация итерационного метода проводится следующим образом. На отрезке $[0,2\pi]$ вводится сетка ψ_i и сеточные аналоги r_n^i функций $r_n(\psi)$. Задача решения уравнения (27) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений для неизвестной сеточной функции ρ_n^i. Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений применяется метод регуляризации Тихонова. Величина параметра регуляризации согласовывается с точностью задания исходной информации и с шагом итерационного процесса n.

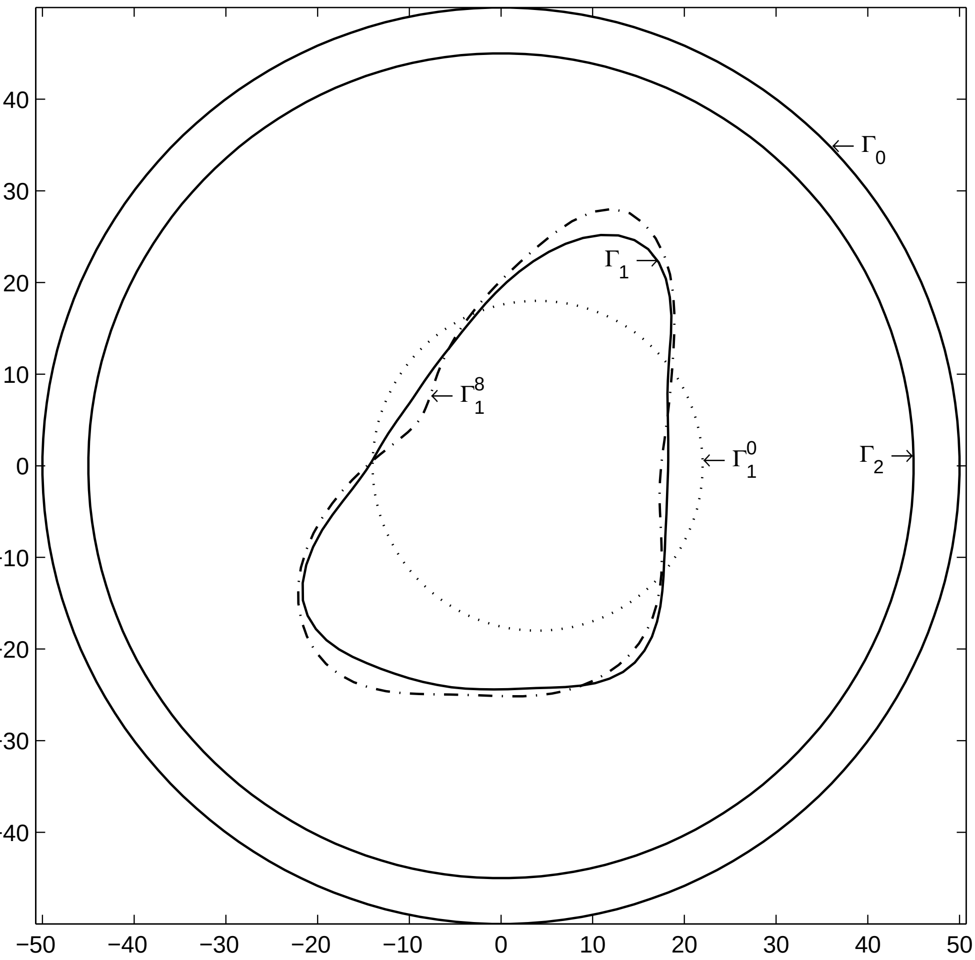

Рис. 1. Результаты вычислительного эксперимента

Результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим применение предложенного двухэтапного метода для решения задачи электроимпедансной томографии (1)-(4),(5). В ходе численной реализации метода полярная система координат и сетка, на которой решается задача продолжения, согласуется с задачей со вспомогательным контуром. За центр полярной системы координат, в которой записываются уравнения (12),(13), берется точка M_0, являющаяся общим центром звездности для кривых Γ_1. Для численного решения задачи продолжения на отрезке $[0, 2\pi]$ вводится сетка ψ_i, которая затем используется и для задачи со вспомогательным контуром.

В качестве примера приведем вычислительный эксперимент, в котором были выбраны следующие параметры. Контуры Γ_0 и Γ_2 — окружности радиуса 50 и 45 соответственно, $\sigma_0 = 3$, $\sigma_1 = 1$. Значение функции $u(x, y)$

на Γ_0, заданное в полярных координатах,

$$f(\psi) = 50\left(\exp[-4\sin^2(\psi/2)] - \exp[-4\cos^2(\psi/2)]\right).$$

Контур Γ_1 представлял собой выпуклую кривую, задаваемую кубическим сплайном (см. рис. 1). Схема вычислительного эксперимента была такова. С заданными Γ_0,Γ_1,σ_0,σ_1 и $f(\psi)$ решалась задача Дирихле (1)-(4) и находилась функция $g(\psi)$, представляющая собой значение нормальной производной $u(x,y)$ на контуре Γ_0. В эту функцию вносилась погрешность и получалась функция $g_\delta(\psi)$, такая что $\|g(\psi)-g_\delta(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]}/\|g(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} = 0,05$. Далее с функцией $g_\delta(\psi)$, взятой в качестве исходных данных, численно решалась задача продолжения и находилась функция $f_2(\psi)$, представляющая собой значение решения задачи (7)-(9) на контуре Γ_2.

Затем с этой функцией $f_2(\psi)$ итерационным методом решалась задача со вспомогательным контуром и вычислялся контур Γ_1. На рис. 1 приведен результат решения обратной задачи Γ_1^8, полученный при выборе равномерных сеток на контуре Γ_0 в 100 узлов и на контуре Γ_1 в 60 узлов, в результате 8-ми итераций с начальным приближением Γ_1^0. Критерием останова служило достижение уровня погрешности по невязке.

Литература

[1] Borcea L., Electrical impedance tomography, Inverse Problems. 2002. V.18. p.99-136.

[2] Alessandrini G., Isakov V., Analiticity and uniqueness for the inverse conductivity problem, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste. 1996. V.28 I,II. p.351-369.

[3] Barceo B., Fabes E., Seo J.K., The inverse conductivity problem with one measurement: uniqueness for convex polyhedra, Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V.122-1. p.183-189.

[4] Bellout H., Friedman A., Isakov V., Stability for an inverse problem in potential theory, Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V.332 p.271-296.

[5] Astala K., Paivarinta L., Calderon's inverse conductivity problem in the plane, Ann. Math. 2006. V.163. p.265-99.

[6] Kang H., Seo J. K., Layer potential technique for the inverse conductivity problem, Inverse Problems. 1996. V.12. p.267-78.

[7] Bruhl M., Hanke M., Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography, Inverse Problems. 2000. V.16. p.1029-42.

[8] Bruhl M., Hanke M., Recent progress in electrical impedance tomography, Inverse Problems. 2003. V.19. p.65-90.

[9] Eckel H., Kress R., Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem, Inverse Problems. 2007. V.23. p.475-491.

[10] Kwon O., Seo J.K., Yoon J.R., A real-time algorithm for the location search of discontinuous conductivities with one measurement, Comm. Pure Appl. Math. 2002. V.55.no.1. p.1-29.

[11] Kang, H., Seo J.K., Sheen, D., Numerical identification of discontinuous conductivity coefficients, Inverse Problems. 1997. V.13. p.113-23.

[12] Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В., Численные методы решения некоторых обратных задач электрофизиологии сердца, Дифференц. ур-ния. 2009. т.45. N 7. с.1014-1022.

[13] Гаврилов С.В., Денисов А.М., Численные метод определения границы неоднородности в краевой задаче для уравнения Лапласа в кусочно-однородной среде, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. т.51. N 8. с.1 - 14.

[14] Латтес Р., Лионс Ж.-Л., Метод квазиобращения и его приложения, Мир, 1970.

[15] Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В., Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. т.31. N 1. с.64 - 74.

[16] Денисов А.М., Захаров Е.В., Калинин А.В., Калинин В.В., Применение метода регуляризации Тихонова для решения обратной задачи электрокардиографии, Вестник Московского университета, Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика. 2008. N 2. с.5 - 10.

[17] Dihn Nho Hao, Lesnic D., The Cauchy problem for Laplace's equation using the conjugate gradient method, IMA J. Appl. Math. 2000. V.65. p.199-217.