

*А. Ю. Гаврилов, М. Г. Лебедев*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕТЕОРИТОВ: ДАННЫЕ НАБЛЮДЕНИЙ И МОДЕЛИРОВАНИЕ**

### **1. Введение**

Астероидно-кометная опасность является одной из серьезных угроз спокойной жизни человечества. В то же время вторжение метеорных тел в земную атмосферу и их движение в ней представляет собой важную и интересную проблему физики и астрономии. Поэтому вопрос изучения движения метеоритов в атмосфере всегда привлекал внимание ученых, в том числе российских. Работа Б.Ю. Левина [1], изданная в 1956 г., стала, пожалуй, первой известной работой, затрагивающей физическую теорию метеоров. Стройная теория аэродинамики входящих небесных тел была создана в монографии В.П. Стулова и соавторов [2] и в последующем цикле его работ (см., например, [3, 4]).

При полете метеорного тела в атмосфере оно подвергается крайне большим механическим и тепловым нагрузкам, что приводит к его разрушению – полному или частичному – в ходе полета [3]. Тело может испытать фрагментацию и продолжать спуск в атмосфере в виде нескольких обломков. Нагрев поверхности метеорного тела приводит к плавлению вещества его поверхности с последующим испарением (процесс, называемый иногда абляцией). Заметим, что интенсивный нагрев поверхности метеорита сопровождается его свечением, что делает возможным наблюдение полета, по крайней мере, на участке его траектории, с Земли.

Судьба небесного тела, вторгшегося в земную атмосферу, на финише его пути может быть различной, в зависимости от массы и химического состава тела, его начальной скорости и угла входа в атмосферу. Упомянутые выше процессы механического и теплового разрушения метеорита могут привести к полному изменению его агрегатного состояния, так что первоначально твердое тело сменяется высоконапорной газовой струей, достигающей поверхности планеты. Таким, очевидно, был характер знаменитого Тунгусского события 1908 г., вызвавшего огромные разрушения в, к счастью, незаселенной местности (вывал леса на площади более 2150 км<sup>2</sup> [2]), при том что ни единой частицы метеоритного вещества не было найдено в ходе поисков, продолжавшихся многие десятилетия. Численное моделирование подобной ситуации было выполнено в работе [5], где были рассчитаны процессы распространения струи продуктов метеорного вещества в

атмосфере, ее соударения с поверхностью, покрытой растительным массивом, и разрушения последнего.

В иных случаях фрагменты метеорного тела могут достичь поверхности Земли в твердом состоянии. Таким был случай недавнего Чебаркульского события (2010 г.). Найденные фрагменты становятся объектом пристального изучения специалистов, в связи с чем важной задачей становится их поиск, а предварительно определение места их возможного падения.

В настоящее время в ряде стран (США, Канаде, Чехословакии) созданы болидные сети, отслеживающие полет вторгшихся небесных тел в земной атмосфере [8]. Благодаря их наблюдениям стало возможным зафиксировать падение метеоритов Лост Сити в 1970 г. [6] и Иннисфри в 1977 г. [7].

В России сети болидных камер развиты слабо. Однако, к настоящему времени стали появляться проекты первых действительно внушительных сетей станций, состоящих из несколько десятков камер. Основным инициатором создания выступил Уральский университет, а поводом к созданию послужил метеорит, пролетевший над Бурятией и Хакасией [8, 9].

В ходе полета метеорита происходит остывание его поверхности и прекращение его свечения. Естественно, что с угасанием тела болидная сеть прекращает его отслеживание и не в состоянии зафиксировать место его падения. Возникает задача достраивания траектории или ее продолжения со «светлого» на «темный» участок по известным из наблюдений параметрам «светлого» участка. В известном смысле такая задача представляет собой обратную задачу. К настоящему времени разработан ряд подходов к ее решению, краткий обзор которых приведен ниже.

Целью настоящей работы является совершенствование этих подходов и, в частности, определение закона движения метеорита в атмосфере при помощи точного численного решения уравнений, описывающих это движение, не прибегая к приближенным их решениям.

## **2. О данных наблюдений**

Данные наблюдений о падениях метеоритов получают, основываясь на фотографических методах [10, 11]. Изображения падения получают с помощью болидных сетей камер – группы статических камер, которые сканируют небо в поисках наиболее ярких болидов и их фотографируют. Типичное изображение, полученное с помощью подобной камеры, представлено ниже:

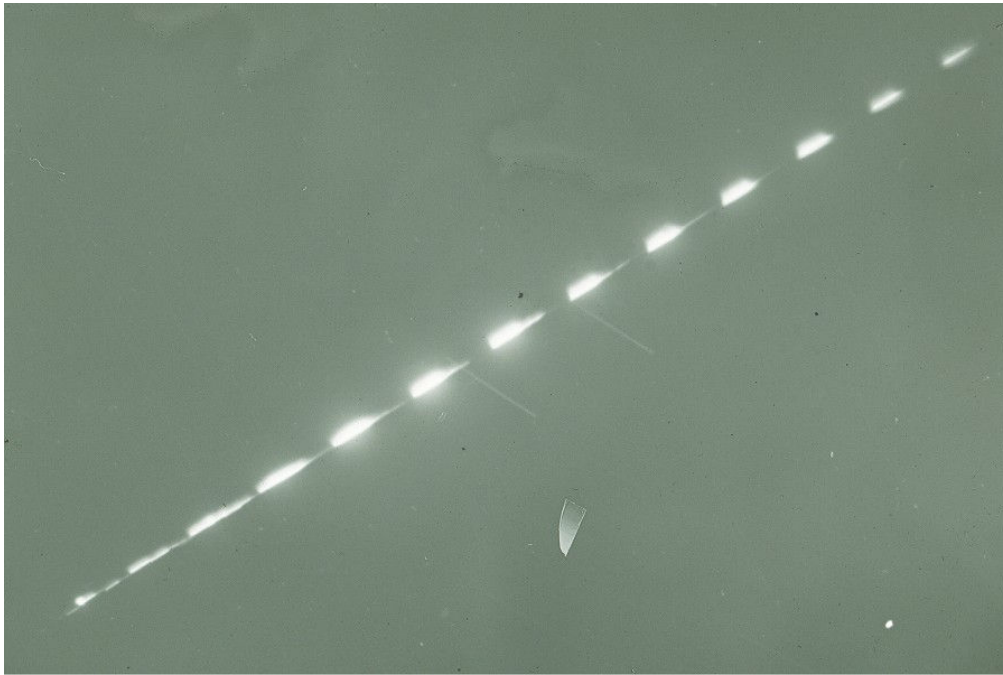


Рис. 1. Падение метеорита Иннисфри. Фотография, полученная болидной камерой [7].

По данным фотографий вычисляются изменения скорости и высоты с течением времени. Для этого широко применяются методы, основанные на светимости метеорита. Далее расчетные данные компонуются и формируется таблица, в которой представлены зависимости скорости и высоты от времени. Пример наблюдательных данных для метеорита Иннисфри приведен ниже [7].

Время, с	Скорость, км/с	Высота, км
0.0	14.54	58.8
0.2	14.49	56.1
0.4	14.47	53.5
0.6	14.44	50.8
0.8	14.40	48.2
1.0	14.34	45.5
1.2	14.23	42.8
1.4	14.05	40.2
1.6	13.79	37.5
1.8	13.42	35.0
2.0	12.96	32.5
2.2	12.35	30.2
2.4	11.54	27.9
2.6	10.43	25.9
2.8	8.89	24.2
3.0	7.24	22.6
3.2	5.54	21.5

Таблица 1. Траектория метеорита Иннисфри, согласно данным наблюдений

### 3. Система уравнений движения метеорита

Система уравнений метеорной физики была получена в рамках задачи о прямолинейном движении затупленного тела в атмосфере. Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений связывает между собой динамические параметры метеорита, такие как масса, высота и скорость. В проекции на касательную и нормаль к траектории система записывается следующим образом [2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{dV}{dt} = -D + P \sin(\gamma) \\ MV \frac{d\gamma}{dt} = P \cos(\gamma) - \frac{MV^2}{R} \cos(\gamma) - L \\ \frac{dh}{dt} = -V \sin(\gamma) \\ H^* \frac{dM}{dt} = -\frac{1}{2} c_h \rho_a V^3 S \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Неизвестными функциями в этих уравнениях являются масса метеорита  $M = M(t)$ , скорость тела  $V = V(t)$ , текущая высота тела  $h = h(t)$  и угол между его траекторией и горизонтом  $\gamma = \gamma(t)$ . Сила торможения и подъемная сила, действующие на тело со стороны воздушной среды, определяются по формулам

$$D = \frac{1}{2} c_D \rho_a V^2 S, \quad L = \frac{1}{2} c_L \rho_a V^2 S,$$

где  $c_D$  и  $c_L$  - коэффициенты торможения и подъемной силы. В уравнение для массы (последнее уравнение системы) также входят теплота сублимации  $H^*$  и коэффициент теплопроводности  $c_h$ . Наконец,  $S$  - площадь миделева сечения метеорита и  $\rho_a = \rho_a(h)$  - плотность атмосферы на заданной высоте.

Данная система не может быть решена без дополнительных предположений о падении тела, поскольку содержит большое количество неизвестных параметров, а также неизвестный закон изменения площади миделева сечения  $S$ . Неизвестны также и начальные данные: скорость, масса, высота и угол входа. Даже если отталкиваться от данных наблюдений по высоте и скорости и считать начальным моментом момент первого наблюдения, то масса тела все равно будет неизвестна.

Поэтому сделаем некоторые предположения относительно движения и формы тела, которые могли бы упростить систему. Прежде всего предположим, что изменения угла  $\gamma$  незначительны и ими можно пренебречь. Из данного предположения следует, что угол  $\gamma = const.$  на всей протяженности полета. Ниже будет показано, что подобное допущение, в общем, оправдано. Поэтому второе уравнение системы рассматриваться в дальнейшем не будет.

Метеорит будем считать сферическим и будем считать, что форма тела сохраняется в течение всего времени полета. Опишем наши предположения математическими формулами.

В силу предположения о сферичности можно записать уравнения для массы и площади миделева сечения. Пусть  $R$  – радиус сферы, тогда:

$$M = \rho_m V = \rho_m \frac{4\pi}{3} R^3 \Rightarrow R = \left( \frac{3M}{4\pi\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.2)$$

Тогда

$$S = \pi R^2 = \pi \left( \frac{3M}{4\pi\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} = k \left( \frac{M}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.3)$$

где  $k = \pi \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1.209$  - безразмерная константа.

Подставим выражение для площади в систему (3.1). С учетом вышеизложенных выкладок и того, что  $P = Mg$ , получаем:

$$\begin{aligned} M \frac{dV}{dT} &= -\frac{k}{2} c_d \rho_a V^2 \left( \frac{M}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} + M g \sin(\gamma) \\ \frac{dh}{dT} &= -V \sin(\gamma) \\ \frac{H^* dM}{dT} &= -\frac{k}{2} c_h \rho_a V^3 \left( \frac{M}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Будем считать начальным моментом времени момент первого наблюдения. Обозначим через  $M_0, V_0, h_0$  начальные массу, скорость и высоту, соответственно. Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} M &= M_0 m, \quad V = V_0 v, \\ h &= h_0 y, \quad T = \frac{t h_0}{V_0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

В уравнении (3.5)  $m, v, y, t$  - безразмерные масса, скорость, высота и время, причем первые три величины принадлежат интервалу  $[0; 1]$ .

Теперь из размерных величин в системе уравнений (3.4) осталась только плотность атмосферы  $\rho_a$ . Для введения безразмерной плотности потребуются дополнительные предположения касательно атмосферы и условий падения. Будем считать, что падение происходит в нормальных условиях: температура воздуха на уровне моря  $T_{sea} = 0^\circ \text{C} = 273 \text{K}$ , давление на уровне моря  $p_{sea} = 101325 \text{Па}$ , плотность атмосферы на уровне моря  $\rho_{sea} = 1.125 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Введем безразмерную плотность следующим образом:

$$\rho = \frac{\rho_a}{\rho_{sea}} \Leftrightarrow \rho_a = \rho \rho_{sea} \quad (3.6)$$

Здесь  $\rho_a = \rho_a(h)$  – размерная плотность атмосферы на размерной высоте  $h$ , рассчитываемая по барометрическим формулам:

$$\begin{aligned}\rho_a &= \rho_a(h) = \frac{Mp(h)}{RT} \\ p(h) &= \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)\end{aligned}\quad (3.7)$$

В формулах (3.7)  $p(h)$  – давление на высоте  $h$ ,  $M = 0.029 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$  – молярная масса воздуха,  $R = 8.31 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}$  – универсальная газовая постоянная,  $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  – гравитационная постоянная и  $T = 273 \text{ К}$  – температура атмосферы.

Подставляя выражения (3.5) – (3.7) в систему (3.4), получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -v \sin(\gamma) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{2} c_d \rho v^2 m^{-\frac{1}{3}} \left[ \frac{\rho_{sea}}{M_0} \left( \frac{M_0}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} \right] Y_0 + d \sin(\gamma) \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{k c_h V_0^2}{2H^*} \left[ \frac{\rho_{sea}}{M_0} \left( \frac{M_0}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} \right] Y_0 \rho v^3 m^{\frac{2}{3}} \\ d &= \frac{g Y_0}{V_0^2} \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

Здесь коэффициент  $d$  известная безразмерная константа, которая зависит только от скорости и высоты в момент первого наблюдения.

Введем обозначения

$$A_1 = \left[ \frac{\rho_{sea}}{M_0} \left( \frac{M_0}{\rho_m} \right)^{\frac{2}{3}} \right] Y_0, \quad A_2 = \frac{c_h V_0^2}{H^*} \quad (3.9)$$

Коэффициенты (3.9) безразмерные. Перепишем систему (3.8) в более лаконичном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{2} c_d \rho v^2 m^{-\frac{1}{3}} A_1 \\ \frac{dy}{dt} &= -v \sin(\gamma) \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{k}{2} A_2 A_1 \rho v^3 m^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теперь из (3.5) следует, что для безразмерных переменных начальные условия будут выглядеть следующим образом:

$$m(0) = m_0 = 1, \quad y(0) = y_0 = 1, \quad v(0) = v_0 = 1 \quad (3.11)$$



#### 4. Определение полной траектории метеорита

При полете метеорита в атмосфере Земли происходит его постепенное охлаждение и, начиная с некоторого момента, его свечение прекращается. С этого момента он перестает быть доступен наблюдению болидных станций. Так, для метеорита Иннисфри это происходит, когда тело находится на высоте около 21 км над земной поверхностью (см. рис. 1 и табл. 1).

Таким образом, возникает задача достраивания траектории метеорита вплоть до поверхности планеты. Для этого можно воспользоваться следующим подходом. Обозначим зависимости, полученные из наблюдений (например, заданные Таблицей 1), как  $h_{obs}(t), v_{obs}(t)$ . Поскольку решение задачи (3.10), (3.11) дает информацию о движении в течение всего полета, то кривые  $h(t)$  и  $v(t)$ , задаваемые этим решением, должны проходить максимально близко к кривым  $h_{obs}(t)$  и  $v_{obs}(t)$ . Система (3.10) содержит два неизвестных безразмерных параметра  $A_1$  и  $A_2$  и неизвестный угол  $\gamma$ , от которых зависит решение соответствующей задачи Коши (3.10), (3.11). Следовательно, параметры  $\gamma, A_1$  и  $A_2$  должны быть выбраны такими, чтобы различие между  $h(t)$  и  $h_{obs}(t)$  и  $v(t)$  и  $v_{obs}(t)$  было минимальным. Опишем эту конструкцию математически.

Пусть  $N$  - количество точек наблюдений,  $t_N$  - время последнего наблюдения. Тогда  $t \in [0; t_N]$ . Для простоты рассуждений будем считать, что точки наблюдений берутся через одинаковые промежутки времени. Введем разбиение на этом отрезке:

$$\tau = \frac{t_N}{N}, \quad t_i = i\tau, i = 0; N \quad (4.1)$$

Тогда от условия близости кривых можно перейти к условию близости точек этих кривых, взятых в одинаковые моменты времени. Это приводит нас к задаче минимизации функционала следующего вида:

$$F = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \left[ \left( h_i - h_{obs}^{(i)} \right)^2 + \left( v_i - v_{obs}^{(i)} \right)^2 \right] \rightarrow \min_{(A_1, A_2, \gamma)} \quad (4.2)$$

Здесь  $h_i, v_i$  – решение задачи (3.10), (3.11) в момент времени  $t_i$ ,  $h_{obs}^{(i)}, v_{obs}^{(i)}$  - точки наблюдения в момент времени  $t_i$ .

Ранее описанная задача минимизации решалась для случая, когда решение задачи (3.10), (3.11) бралось в приближенном аналитическом виде [12]. Это решение параметрически зависело от двух безразмерных комплексов, включающих физические параметры задачи, описанные в разделе 3. Минимизация сводилась к определению оптимальных значений этих комплексов. В магистерской диссертации одного из авторов данной работы [13] этот подход был обобщен введением еще одной величины, по

которой проводилась минимизация, а именно, скорости (размерной) входа небесного тела в атмосферу.

В настоящей работе минимизация проводится относительно точного численного решения задачи (3.10), (3.11), зависящего от двух безразмерных комплексов  $A_1, A_2$ , определенных в (3.9), и угла входа  $\gamma$ .

Для минимизации функционала был применен алгоритм Нелдера—Мида, также известный как метод деформируемого многогранника [14]. Это итерационный метод безусловной минимизации, не требующий вычисления производных минимизируемой функции. Метод хорошо подходит для решения сложных оптимизационных задач к категории которых можно отнести задачу (4.2). Для вычисления функционала (4.2) на каждом шаге алгоритма решается система дифференциальных уравнений неявным методом Адамса третьего порядка, после чего численное решение подставляется в (4.2) и вычисляется уже непосредственно значение функционала. Начальное приближение в методе Нелдера—Мида берется произвольно. Расчеты производились для метеорита Иннисфри, для которого был взят расширенный набор точек наблюдений (Табл. 1).

Заметим, что подлежащая решению система уравнений (3.10) содержит неизвестный параметр – коэффициент сопротивления метеорита  $c_d$ . Для тел сферической формы в полете с гиперзвуковой скоростью многочисленные экспериментальные данные, подтвержденные численными расчетами, дают значение  $c_d \approx 0.9$  (см., например, [15]). Однако, эти данные соответствуют сплошнородному обтеканию невращающегося тела. Разреженность газа, в котором движется тело (что, безусловно, имеет место в верхних слоях атмосферы) и его возможное вращение приводят к некоторому увеличению этого значения. Основываясь на численных расчетах, проведенных в [16], в рассматриваемой ситуации предпочтительнее взять значение  $c_d \approx 2$ .

Результаты минимизации функционала (4.2) по методу Нелдера—Мида дали следующие результаты. За 308 итераций был достигнут минимум функционала  $F_{\min} = 0.004$  на значениях  $A_1 = 35.19$ ,  $A_2 = 21.75$  и  $\gamma = 64.01^\circ$ . По этим значениям из формул (3.9) могут быть определены (при некоторых дополнительных предположениях) начальная масса и скорость входа метеорита в атмосферу Земли.

На рис. 2 и 3 построены закон движения метеорита Иннисфри (зависимость высоты от времени наблюдения) и изменение скорости тела по траектории в безразмерных переменных (3.5). Точки на кривых соответствуют данным наблюдений (Табл. 1), а сплошные кривые представляют собой результаты численного решения задачи Коши (3.10), (3.11) совместно с минимизацией функционала (4.2). Можно отметить хорошее согласование результатов наблюдений и расчетов.



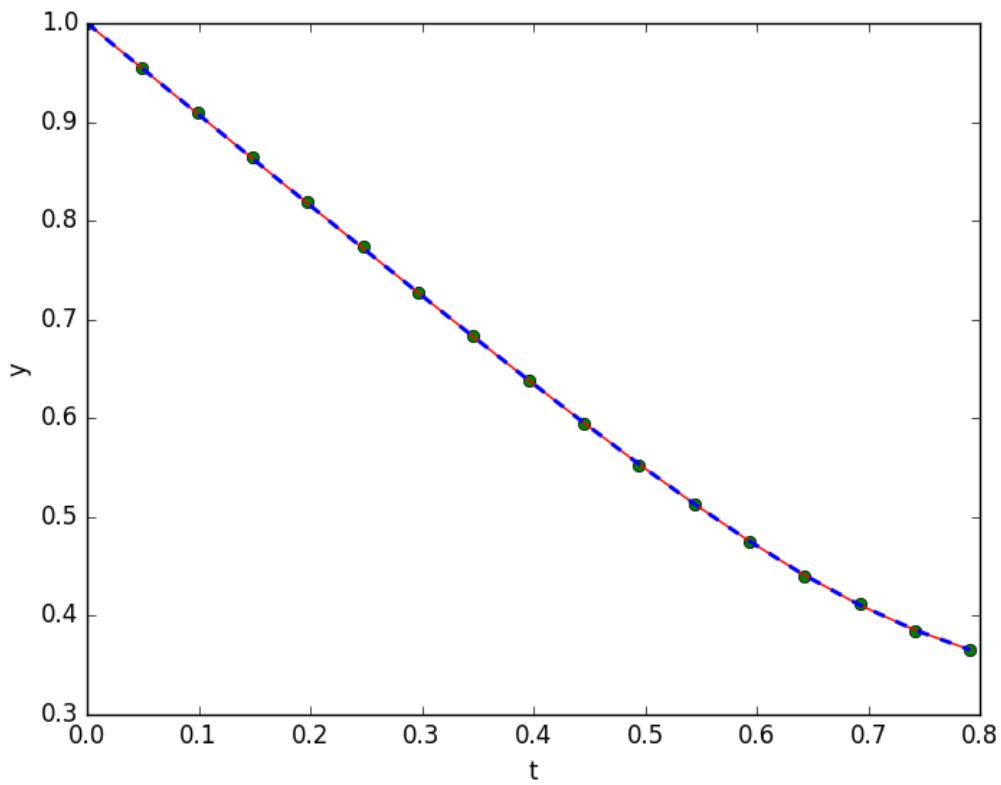


Рис. 2. Траектория метеорита Иннисфри в безразмерных переменных

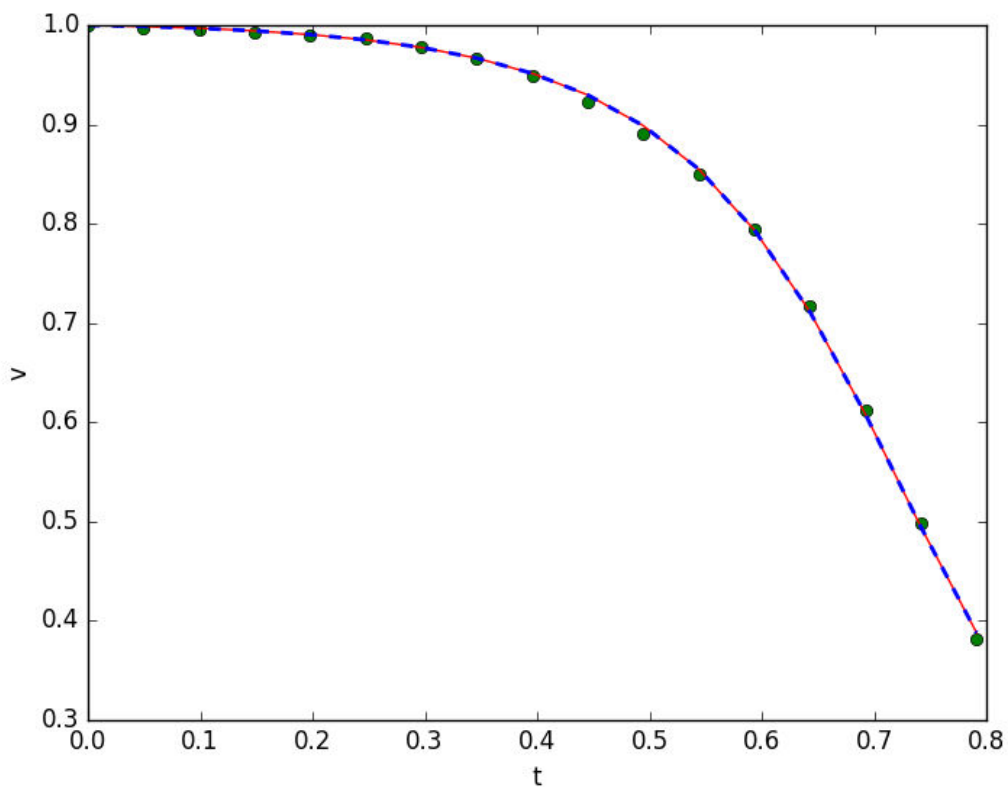


Рис. 3. Изменение скорости метеорита Иннисфри на светлом участке его траектории (в безразмерных переменных)

Зная теперь значения параметров  $A_1$ ,  $A_2$ , мы можем решить задачу Коши для всей траектории метеорита, продлив ее таким образом на «темный», недоступный наблюдениям участок, вплоть до падения тела на поверхность Земли, чему соответствует значение  $y = 0$ . Эта траектория (закон изменения высоты со временем) построена по результатам расчета на рис. 4; на этом рисунке время отложено уже в размерных единицах (секундах). Обращает на себя внимание резкое изменение характера движения тела вскоре после выхода его со «светлого» участка. Это изменение связано со значительным замедлением движения (падением скорости тела). Так, если три четверти пути от входа в атмосферу до падения метеорит преодолевает всего за 3 – 4 с, на прохождение оставшейся четверти затрачивается около 50 с.

Можно предположить, что изменение характера движения тела и прекращение его свечения при  $t > 3.2$  с (Табл. 1 и рис. 4) вызваны существенными потерями массы и импульса тела к рассматриваемому моменту.

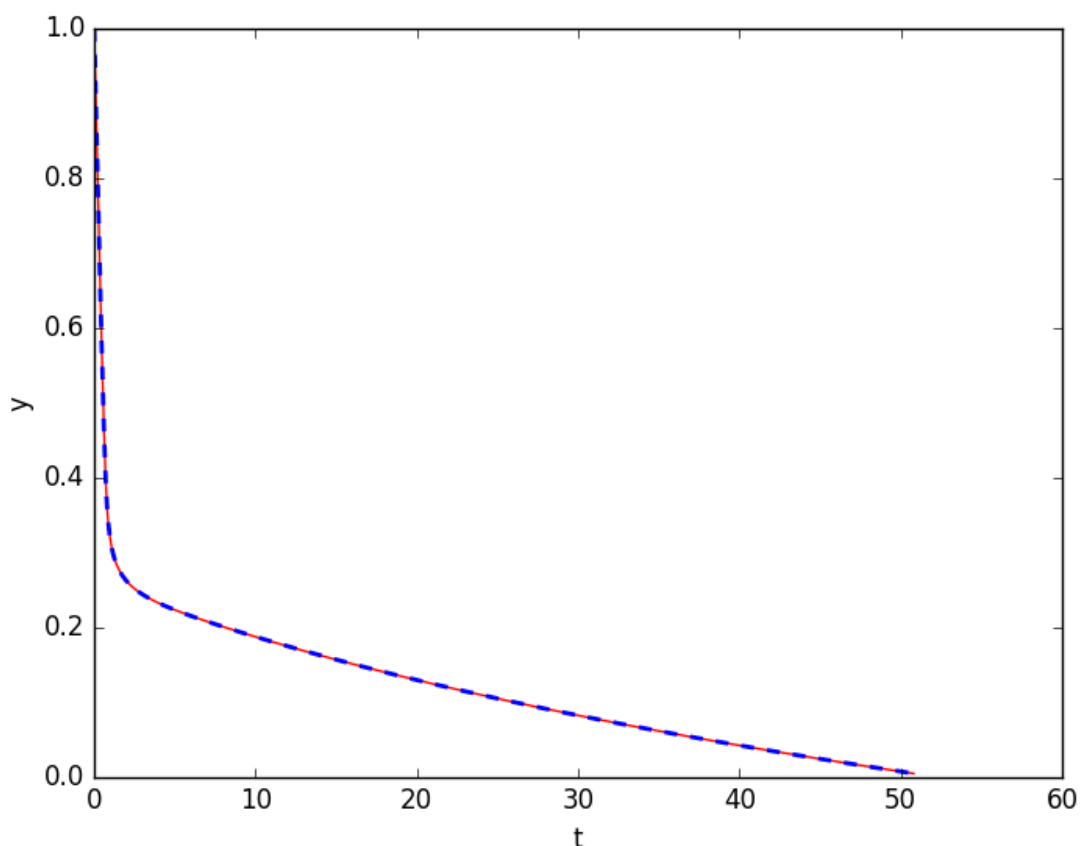


Рис. 4. Продолженная траектория метеорита Иннисфри. Время  $t$  отложено в секундах.

Как отмечалось выше, одним из параметров, по которому проводилась минимизация функционала (4.2), был угол траектории метеорита с горизонтом  $\gamma$ ; получено его значение  $64.01^\circ$ . В работе [17], в которой приводилось детальное описание падения Иннисфри, был проведен анализ снимков траектории метеорита, на основе которых была получена величина угла равная  $67.8^\circ$ . В работе [4] приведена оценка  $\sin(\gamma) = 0.93$ , что соответствует  $68.18^\circ$ . Из этих оценок следует, что найденное значение угла находится в соответствии с ранее полученными результатами.

Заметим, что определение траектории метеорита на всем ее протяжении может помочь в определении места его падения и успешном выполнении своей миссии группами поиска остатков вторгшегося тела.

## Литература

1. *Левин Б.Ю.* Физическая теория метеоров и метеорное вещество в Солнечной системе. М.: Изд-во АН СССР. 1956. 269 с.
2. *Стулов В.П., Мирский В.Н., Вислый А.И.* Аэродинамика болидов. М.: Наука. 1995. 240 с.
3. *Стулов В.П.* О разрушении и распаде метеорных тел в атмосфере. // Доклады РАН. 2008. Т. 421. №4. С. 486—489.
4. *Грицевич М.И., Стулов В.П., Турчак Л.И.* Последствия столкновений природных космических тел с атмосферой и поверхностью Земли. // Космические исследования. 2012. Т. 50. №1. С. 59—67.
5. *Лебедев М.Г., Ситник В.В., Стулов В.П.* Метеорные явления и НРС. // Суперкомпьютеры. 2010. № 4(4). С. 51—57.
6. <http://fireball.meteorite.free.fr/meteor/en/6/1970-01-03/lost-city/synthese>
7. <http://fireball.meteorite.free.fr/meteor/en/2/1977-02-05/innisfree/synthese>
8. <https://urfu.ru/ru/news/17754/>
9. <https://www.gismeteo.ru/news/sobytiya/18061-pervaya-v-rossii-bolidnaya-set-ustanovlena-na-urale/>
10. *Грицевич М.И.* Анализ атмосферных траекторий для падений Пржибрам, Лост-Сити, Иннисфри, Нойшванштайн. // Астрономический вестник. 2008. Т. 42. № 5. С. 397—417.
11. *Грицевич М.И., Стулов В.П.* О применимости фотометрической формулы при оценке массы болидообразующих тел. // Доклады РАН. 2008. Т. 418. № 5. С. 624—630.
12. *Ждан И.А., Стулов В.П., Стулов П.В., Турчак Л.И.* Движение тел метеоритных форм при произвольном угле атаки. // Астрономический вестник. 2009. Т. 43. №5. С. 449—452.

13. *Гаврилов А.Ю.* Моделирование траекторий движения метеороидов и поиск их динамических параметров. Магистерская диссертация. МГУ, ф-т вычислительной математики и кибернетики. 2017.
14. *Nelder J.A., Mead R.A* simplex method for function minimization. // *Computer Journal*. 1965. V. 7. P. 308—313.
15. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз. 1959. 220 с.
16. *Волков А.Н.* Аэродинамические коэффициенты вращающейся сферы в потоке разреженного газа. // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2009. №1. С. 167—187.
17. *Halliday I., Blackwell A.T., Griffin A.A.* Photographic observations and orbit of the Innisfree meteorite. // *Meteoritics*. 1977. V. 12. P. 248–249.