С.Г. Головина, А.Г. Разборов

О ВОССТАНОВЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЫ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = \Delta P + f(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{D}, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \bar{n}}\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = 0, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} P(t,x,y) = P_0, \\ P(0,x,y) = P_0, \end{cases} \tag{1}$$

где D – односвязная область с ляпуновской границей Γ, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к Γ, направленный внутрь D, $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$ – фиксированная точка, P_0 – фиксированное число.

Пусть решение задачи (1) $P(t,x,y)$ известно при всех $t > 0$ для точек (x_1,y_1),...,(x_n,y_n) из $\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$. *Обратная задача заключается в определении контура* Γ *по функциям* $f(t)$ *и* $P(t,x_1,y_1),\ldots,P(t,x_n,y_n)$.

Обратная задача такого типа возникает при поиске зон малой проницаемости в нефтяном пласте (т.е. зон, где бурение новых скважин нецелесообразно) по измерениям давления в имеющихся скважинах. Предполагается, что давление в нефтяном пласте не изменяется поперек пласта, а проницаемость в нем постоянна, за исключением области D полной непроницаемости, размеры которой малы по сравнению с размерами пласта. В точках с координатами $(x_0,y_0),\ldots,(x_n,y_n)$ расположены $n+1$ скважина, при этом в скважине (x_0,y_0) создается давление, изменяющееся по закону $f(t)$. До начала работы скважины (x_0,y_0) и на большом расстоянии от исследуемой области давление в пласте равно некоторому постоянному пластовому давлению P_0. В этом случае давление $P(t,x,y)$ в точке (x,y) в момент времени t вне зоны непроницаемости является решением задачи (1).

В работах [1], [2] была рассмотрена задача определения границы зоны непроницаемости в нефтяном пласте по измерениям установившегося давления в скважинах. В данной работе в качестве

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00314.

входной информации для восстановления границы используются нестационарные данные о давлении в скважинах, что позволяет уменьшить количество измерений.

Сведение прямой задачи к интегральному уравнению

Замена $\hat{P}(t,x,y) = P(t,x,y) - P_0$ приводит (1) к виду

$$\begin{cases} \hat{P}_t = \Delta\hat{P} + f(t)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{D}, \ t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial \hat{P}}{\partial \overline{n}}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = 0, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} \hat{P}(t,x,y) = 0, \\ \hat{P}(0,x,y) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Применим преобразование Лапласа:

$$u(p,x,y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\hat{P}(t,x,y)\,dt, \quad F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Для $u(p,x,y)$ получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u - pu = -F(p)\delta(x-x_0)\delta(y-y_0), \ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{D}, \ \mathrm{Re}\, p > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right|_{(x,y)\in\Gamma} = 0, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty} u(p,x,y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

При $p = s^2 > 0$ фундаментальным решением оператора $\Delta - s^2$ в $\mathbf{R}^2$, стремящимся к нулю на бесконечности, является функция

$$-\frac{1}{2\pi}K_0(s\sqrt{x^2+y^2}),$$

где $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка. Пусть M и M_0 – точки с координатами (x,y) и (x_0,y_0), соответственно. При $p = s^2 > 0$ решение (3) представим в виде

$$u(p,x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}K_0(s\cdot\rho(M,M_0))F(s^2) + v(s,M,M_0),$$

где

$$\rho(M,M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

а функция $v(s, M, M_0)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta v - s^2 v = 0, \ M \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{D}, \ s \neq 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial \bar{n}}\right|_{M \in \Gamma} = -\dfrac{F(s^2)}{2\pi} \left.\dfrac{\partial K_0(s \cdot \rho(M, M_0))}{\partial \bar{n}}\right|_{M \in \Gamma}, \\ \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty} v(s, M, M_0) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решением (4) является потенциал простого слоя

$$v(s, M, M_0) = \int\limits_{\Gamma} K_0(s \cdot \rho(M, N)) \mu(N, M_0) \, \mathrm{d}\, l_N, \qquad (5)$$

с непрерывной при $N \in \Gamma$ плотностью $\mu(N, M_0)$, удовлетворяющей уравнению

$$\begin{gathered} \mu(N, M_0) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial K_0(s \cdot \rho(N, Q))}{\partial \bar{n}_Q} \mu(Q, M_0) \, \mathrm{d}\, l_Q = \\ = -\frac{F(s^2)}{2\pi} \frac{\partial K_0(s \cdot \rho(N, M_0))}{\partial \bar{n}_N}, \ N \in \Gamma. \end{gathered} \qquad (6)$$

Аналитическое решение прямой задачи для круга

Решим задачу (3) в случае, когда D является кругом радиуса a. Пусть начало координат совпадает с центром D. После перехода к полярным координатам (4) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - s^2 v = 0, \ r > a, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r = a} = -\dfrac{F(s^2)}{2\pi} \dfrac{\partial K_0}{\partial r} (s \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}), \\ \lim\limits_{r \to +\infty} v(s, r, \varphi, r_0, \varphi_0) = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где (r, φ) и (r_0, φ_0) – полярные координаты точек M и M_0, соответственно. Решение (7) будем искать в виде ряда ($K_n(z)$ – функции Макдональда)

$$\begin{gathered} v(s, r, \varphi, r_0, \varphi_0) = A_0 \frac{K_0(sr)}{sK_0'(sa)} + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{K_n(sr)}{sK_n'(sa)} \left(A_n \cos(n(\varphi - \varphi_0) + B_n \sin(\varphi - \varphi_0) \right), \end{gathered} \qquad (8)$$

удовлетворяющего первому и третьему уравнениям в (7). По теореме сложения [3],

$$K_0(s\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}) =$$

$$= I_0(sr)K_0(sr_0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} I_n(sr)K_n(sr_0)\cos(n(\varphi-\varphi_0)),$$

где $I_n(z)$ – функции Инфельда. Следовательно,

$$\left.\frac{\partial K_0}{\partial r}\right|_{r=a} = sI_0'(sa)K_0(sr_0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} sI_n'(sa)K_n(sr_0)\cos(n(\varphi-\varphi_0)).$$

Таким образом, (8) будет решением (7) при

$$A_0 = -\frac{1}{2\pi}F(s^2)sI_0'(sa)K_0(sr_0),\ A_n = -\frac{1}{\pi}F(s^2)sI_n'(sa)K_n(sr_0),\ B_n = 0,$$

то есть решением (3) является

$$u(s^2,r,\varphi,r_0,\varphi_0) = \frac{F(s^2)}{2\pi}K_0\left(s\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right) -$$

$$-\frac{F(s^2)}{2\pi}\left[\frac{I_0'(sa)}{K_0'(sa)}K_0(sr)K_0(sr_0)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n'(sa)}{K_n'(sa)}K_n(sr)K_n(sr_0)\cos(n(\varphi-\varphi_0))\right],$$

или, с учетом формул дифференцирования функций Инфельда и Макдональда,

$$\begin{aligned} u(s^2,r,\varphi,r_0,\varphi_0) = \frac{F(s^2)}{2\pi}\Bigg[&K_0\left(s\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right)+\\ &+\frac{I_1(sa)}{K_1(sa)}K_0(sr)K_0(sr_0)+ \\ +2\sum\nolimits_{n=1}^{+\infty}\frac{I_{n-1}(sa)+I_{n+1}(sa)}{K_{n-1}(sa)+K_{n+1}(sa)}&K_n(sr)K_n(sr_0)\cos(n(\varphi-\varphi_0))\Bigg]. \end{aligned} \tag{9}$$

Численное исследование задачи

Для проверки точности решения прямой задачи с помощью интегрального уравнения (6) и формулы (5) проводилось сравнение численных расчетов по этим формулам для области D, имеющей форму круга, с точным решением для круга (9). Проведенное исследование показало, что значения функции $u(s^2,x,y,x_0,y_0)$, вычисленные с использованием аналитического решения (9) и с использованием интегрального уравнения, совпадают с достаточно высокой точностью: значения отличаются менее, чем на 0,01%.

Численное исследование прямой задачи проводилось для случая, когда контур Γ является эллипсом

$$\frac{x^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(2,5)^2} = 1.$$

Точки измерения распределены по окружности радиуса $R = 4$ с шагом $\pi/15$. На рисунке 1 приведены графики решений для четырех вариантов расположения точки возбуждения: (r_0, φ_0) равно $(4, 0)$, $(4, \pi/6)$, $(4, \pi/2)$ и $(4, \pi)$.

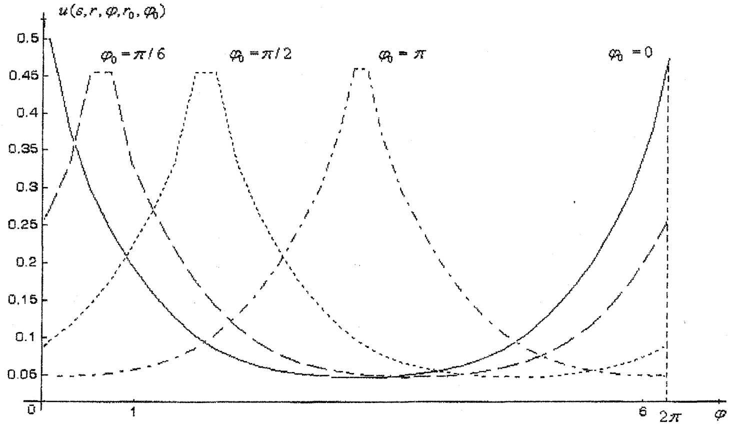

Рис. 1

Для исследования зависимости $u(s^2, x, y, x_0, y_0)$ от параметра s проводилось вычисление этой функции при различных s. На рисунке 2 приведены результаты расчетов. Точки измерения располагались на окружности радиуса $R = 4$ с шагом $\pi/15$, точка возбуждения имела координаты $(4, 7\pi/5)$.

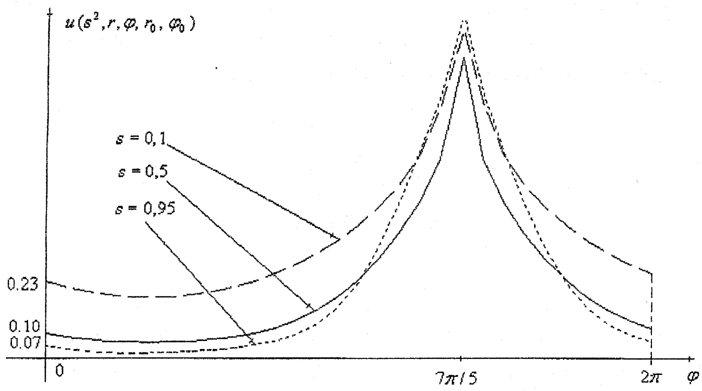

Рис. 2

На рисунке 3 приведен результат решения обратной задачи для случая, когда контур Г является эллипсом с полуосями 3 и $1,5$, с центром в точке $(1,0)$ и углом между большей осью и осью абсцисс в $\pi/4$ (изображен сплошной линией). Пунктирной линией изображен восстановленный контур.

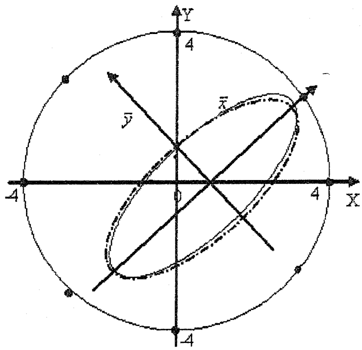

Рис. 3

Исходными данными являлись $f(t) = 1$, $p = s^2 = 0,25$, $(x_0, y_0) = (4,0)$, $(x_j, y_j), j = \overline{1,7}$, расположенные на окружности радиуса

4 с шагом $\pi/4$, начиная с точки $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. В качестве значений $v(s, x_i, y_i, x_0, y_0)$ были взяты результаты решения соответствующей прямой задачи с внесенной погрешностью в 2,5%.

Литература

1. Головина С.Г., Денисов А.М., Дмитриев В.И. Об обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Прикладная математика и информатика, М.: МАКС Пресс, 2005, № 21, С. 5-14.

2. Головина С.Г. Метод линеаризации в обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем. и Киберн. 2008, № 1, С. 5-9.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их применения. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1968.

4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988.