С.Г. Головина, А.Г. Разборов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ В ДВУМЕРНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ*

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} = \Delta P, \ P = P(t,M), \ M(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \ t>0, \ \overline{D} = D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\ \left.\dfrac{\partial P}{\partial \overline{n}_1}\right|_{M\in\Gamma_1} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial P}{\partial \overline{n}_2}\right|_{M\in\Gamma_2} = f(t)q(M), \quad t \ge 0, \\ P(0,M) = P_0, \quad M \in \overline{D}, \end{cases} \tag{1}$$

где D – односвязная область с гладкими внутренней границей Γ_1 и внешней границей Γ_2, $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ – единичные векторы внешних нормалей к Γ_1 и Γ_2, соответственно, P_0 – фиксированное число.

Обратная задача заключается в определении контура Γ_1 *при известных* Γ_2, $f(t)$, $q(M)$ *и* P_0 *по решению прямой задачи* (1) $P(t,M)$, *заданному в некоторых точках* $M_1,\dots,M_n \in D$ *и при всех* $t \ge 0$.

2. Численное решение прямой задачи

После замены $u(t,M) = P(t,M) - P_0$ и применения преобразования Лапласа $v(p,M) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}u(t,M)dt$, $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$, для новой неизвестной функции $v(t,M)$ получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta v - pv = 0, M \in \overline{D}, \mathrm{Re}\, p > 0, \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial \overline{n}_1}\right|_{M\in\Gamma_1} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial \overline{n}_2}\right|_{M\in\Gamma_2} = F(p)q(M), \quad \mathrm{Re}\, p > 0, \end{cases} \tag{2}$$

решение которой при $p = s^2 > 0$ единственно и равно потенциалу простого слоя

* Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00314.

$$v(s,M)=\int_{\Gamma_1} K_0(s\,|\overline{MN}|)\mu(N)\mathrm{d}l_N+\int_{\Gamma_2} K_0(s\,|\overline{ML}|)\eta(L)\mathrm{d}l_L, \qquad (3)$$

с непрерывными плотностями μ и η, являющимися решениями системы

$$\begin{cases} \pi\mu(N)+\int\limits_{\Gamma_1}\dfrac{\partial K_0(s\,|\overline{NQ}|)}{\partial \overline{n}_N}\mu(Q)\mathrm{d}l_Q+\int\limits_{\Gamma_2}\dfrac{\partial K_0(s\,|\overline{NR}|)}{\partial \overline{n}_N}\eta(R)\mathrm{d}l_R=0, \\ \pi\eta(L)+\int\limits_{\Gamma_2}\dfrac{\partial K_0(s\,|\overline{LR}|)}{\partial \overline{n}_L}\eta(R)\mathrm{d}l_R+\int\limits_{\Gamma_1}\dfrac{\partial K_0(s\,|\overline{LQ}|)}{\partial \overline{n}_L}\mu(Q)\mathrm{d}l_Q=F(s^2)q(L), \end{cases} \qquad (4)$$

где $N\in\Gamma_1$, $L\in\Gamma_2$, $K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка, а выражения $|\overline{MN}|$, $|\overline{ML}|$ и т.д. обозначают длины соответствующих отрезков.

Будем считать, что начало координат находится внутри контура Γ_1, и что Γ_1 и Γ_2 ограничивают звездные области, т.е. полярные координаты точек Γ_1 и Γ_2 имеют вид $(h(\varphi),\varphi)$ и $(g(\beta),\beta)$, соответственно, где $h(0)=h(2\pi)$, $g(0)=g(2\pi)$, $h(\varphi),g(\beta)\in C^1[0;2\pi]$. В этом случае, при переходе в уравнениях (3) и (4) к полярным координатам, нормали и длины элементов границ пересчитываются в терминах $h(\varphi)$ и $g(\beta)$, например

$$\mathrm{d}l_N=\sqrt{h^2(\varphi)+(h')^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\overline{n}_N=-\frac{\big(h'(\varphi)\sin\varphi+h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi-h'(\varphi)\cos\varphi\big)}{\sqrt{h^2(\varphi)+(h')^2(\varphi)}}.$$

Решение прямой задачи сводится, таким образом, к вычислению из системы (4) *функций* $\mu[h(\varphi),\varphi]$ *и* $\eta[g(\beta),\beta]$ *по известным функциям* $h(\varphi)$, $g(\beta)$, $F(s^2)$ *и* $q[g(\beta),\beta]$.

Численный алгоритм решения (4) был реализован в рамках стандартных вычислительных методов, основанных на сведении системы интегральных уравнений к линейной системе в пространстве $\mathbf{R}^{\mathrm{n}}$ с коэффициентами из $\mathbf{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$.

Для проверки построенного численного алгоритма задача (2) была решена аналитически для области D, являвшейся кольцом с центром в начале координат, с краевым условием на внешней границе, приблизительно соответствовавшим важному для практических задач случаю сосредоточенного в точке потока. Точная постановка модельной задачи приведена в пункте 4. Аналитическое решение данной модельной задачи с высокой точностью совпало с решением, вычисленным с помощью системы (4) и формулы (3).

3. Численное решение обратной задачи

Сделаем еще одно дополнительное предположение относительно контуров Γ_1 и Γ_2: будем считать, что задающие их функции $h(\varphi)$ и $g(\beta)$ таковы, что

$$\max_{[0;2\pi]} |h'(\varphi)| << \min_{[0;2\pi]} h(\varphi), \qquad \max_{[0;2\pi]} |g'(\beta)| << \min_{[0;2\pi]} g(\beta). \tag{5}$$

Условие (5) позволяет несколько упростить подынтегральные выражения в уравнениях (3) и (4) относительно функций $h(\varphi)$ и $g(\beta)$, так как в этом случае упростятся выражения для нормалей и длин элементов границ, например

$$\mathrm{d}l_N = \sqrt{h^2(\varphi) + (h')^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi \approx h(\varphi)\mathrm{d}\phi,$$

$$\overline{n}_N = -\frac{\big(h'(\varphi)\sin\varphi + h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi - h'(\varphi)\cos\varphi\big)}{\sqrt{h^2(\varphi) + (h')^2(\varphi)}} \approx -(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Обозначим полярные координаты точек M, N, L, Q и R через (r,α), $(h(\varphi),\varphi)$, $(g(\beta),\beta)$, $(h(\psi),\psi)$ и $(g(\gamma),\gamma)$, соответственно. С учетом упрощенных выражений для $\mathrm{d}l$ и $\overline{n}$, уравнение (3) в полярных координатах примет вид

$$v(s,r,\alpha) = A[\mu,h] + G[\eta,g] \tag{6}$$

где

$$A[\mu,h] = \int_0^{2\pi} K_0\Big(s\sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}\Big)\mu[h(\varphi),\varphi]h(\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

$$G[\eta,g] = \int_0^{2\pi} K_0\Big(s\sqrt{r^2 + g^2(\beta) - 2rg(\beta)\cos(\alpha-\beta)}\Big)\eta[g(\beta),\beta]g(\beta)\mathrm{d}\beta,$$

а система (4) преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \pi\mu[h(\varphi),\varphi] + \displaystyle\int_0^{2\pi} W[h(\varphi),h(\psi)]\mu[h(\psi),\psi]\mathrm{d}\psi + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} W[h(\varphi),g(\gamma)]\eta[g(\gamma),\gamma]\mathrm{d}\gamma = 0, \\ \pi\eta[g(\beta),\beta] - \displaystyle\int_0^{2\pi} W[g(\beta),g(\gamma)]\eta[g(\gamma),\gamma]\mathrm{d}\gamma - \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_0^{2\pi} W[g(\beta),h(\psi)]\mu[h(\psi),\psi]\mathrm{d}\psi = F(s^2)q[g(\beta),\beta], \end{cases} \tag{7}$$

где, например,

$$W[h(\varphi),h(\psi)] = s\frac{h(\psi)[h(\varphi)-h(\psi)\cos(\psi-\varphi)]}{\sqrt{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}}\times$$
$$\times K_1\left(s\sqrt{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}\right).$$

Отметим, что функция $\eta[g(\beta),\beta]$, являясь решением системы (7), неявно зависит также и от функции h.

Таким образом, обратная задача сводится к восстановлению функции $h(\varphi)$ *по известным функциям* $v(s,r,\alpha)$, $g(\beta)$, $q[g(\beta),\beta]$ *и* $F(s^2)$ *из уравнения* (6) *и системы* (7).

Функция $h(\varphi)$ вычисляется из уравнения (6) с помощью некоторой итерационной процедуры, причем на каждом j-том шаге вместо уравнения (6) решается приведенное ниже уравнение (8) – линеаризация (6) в окрестности функции h_{j-1}, полученной на предыдущем шаге:

$$v(s,r,\alpha,) = A[\mu_{j-1},h_{j-1}] + B(\mu_{j-1},h_{j-1},\mu'_{j-1},\eta'_{j-1})[\omega_j] + G[\eta_{j-1},g], \qquad (8)$$

где оператор $B(\mu,h,\mu',\eta')$, вид которого приведен в Приложении, является дифференциалом правой части (6) по h, $\omega_j = h_j - h_{j-1}$, а μ_{j-1} и η_{j-1} вычисляются из (7) при $h = h_{j-1}$. Функции μ'_{j-1} и η'_{j-1} при выполнении условия (5) приближенно в виде $\mu'_{j-1}(\varphi)\omega_j(\varphi)$ и $\eta'_{j-1}(\varphi)\omega_j(\varphi)$ задают в точке h_{j-1} дифференциалы отображений $h \to \mu$ и $h \to \eta$, определяемых системой (7), и являются решениями системы

$$\begin{cases} \pi\mu'_{j-1}(\varphi) + \int_0^{2\pi} W[h_{j-1}(\varphi),h_{j-1}(\psi)]\mu'_{j-1}(\psi)\mathrm{d}\psi + \\ \quad + \int_0^{2\pi} W'_h[h_{j-1}(\varphi),h_{j-1}(\psi)]\mu_{j-1}(\psi)\mathrm{d}\psi + \int_0^{2\pi} W'_h[h_{j-1}(\varphi),g(\gamma)]\eta_{j-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma + \\ \quad + \int_0^{2\pi} W[h_{j-1}(\varphi),g(\gamma)]\eta'_{j-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma = 0, \\ \pi\eta'_{j-1}(\beta) - \int_0^{2\pi} W[g(\beta),g(\gamma)]\eta'_{j-1}(\gamma)\mathrm{d}\gamma - \int_0^{2\pi} W[g(\beta),h_{j-1}(\psi)]\mu'_{j-1}(\psi)\mathrm{d}\psi - \\ \quad - \int_0^{2\pi} W'_h[g(\beta),h_{j-1}(\psi)]\mu_{j-1}(\psi)\mathrm{d}\psi = F(s^2)q[g(\beta),\beta]. \end{cases} \qquad (9)$$

Выражения для функций W'_h из системы (9) приведены в Приложении.

Для вычисления $h(\varphi)$ предлагается следующая итерационная процедура: задавшись некоторым начальным приближением $h_0(\varphi)$, на шагах $j=1,2,...$ из уравнения (7) при $h=h_{j-1}$ вычисляем μ_{j-1} и η_{j-1} по алгоритму, описанному в пункте 2, потом из уравнения (9) по тому же алгоритму вычисляем μ'_{j-1} и η'_{j-1}, и, наконец, из уравнения (8) находим $\omega_j(\varphi)$ и $h_j(\varphi)=h_{j-1}(\varphi)+\omega_j(\varphi)$.

4. Результаты вычислительного эксперимента

Для проверки описанного в пункте 2 алгоритма решения прямой задачи была рассмотрена следующая модельная задача в кольце:

$$\begin{cases} \Delta v - s^2 v = 0,\ 1<r<4, \alpha\in[0;2\pi], s^2>0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial r}(1,\alpha)=0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial r}(4,\alpha)=s^{-2}\pi e^{-\pi|\alpha-\pi|}, \alpha\in[0;2\pi], s^2>0. \end{cases}$$

На Рис. 1 приведен график полученного численно из интегрального уравнения (4) и формулы (3) решения этой задачи при $s=0{,}5$. Часть графика в области $\alpha\in(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4})$, $r\in(3{,}2\,;4)$ не показана, чтобы масштаб по вертикальной оси не был слишком мал. Быстрый рост решения в указанной области обуславливается краевым условием при $r=4$, приблизительно соответствующим сосредоточенному в точке $(4;\pi)$ потоку.

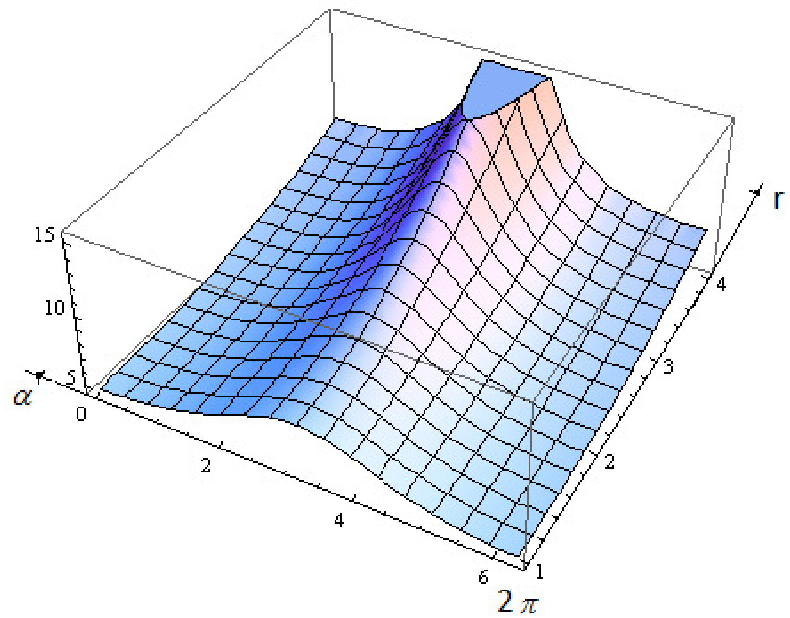

Рис. 1

Указанное численное решение с весьма высокой точностью совпало с полученным аналитически решением модельной задачи, которое имеет следующий вид:

$$v(s,r,\alpha) = s^{-3}\frac{I_0(sr)K_1(s)+I_1(s)K_0(sr)}{I_1(4s)K_1(s)-I_1(s)K_1(4s)}\times\frac{1-e^{-\pi^2}}{\pi}+$$

$$+4\pi s^{-3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left\{\cos(n\alpha)\frac{(-1)^n-e^{-\pi^2}}{n^2+\pi^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{I_n(sr)[K_{n-1}(s)+K_{n+1}(s)]+K_n(sr)[I_{n-1}(s)+I_{n+1}(s)]}{[I_{n-1}(4s)+I_{n+1}(4s)][K_{n-1}(s)+K_{n+1}(s)]-[K_{n-1}(4s)+K_{n+1}(4s)][I_{n-1}(s)+I_{n+1}(s)]}\right\},$$

где K_n и I_n – функции Макдональда и Инфельда порядка n, соответственно.

На Рис. 2 приведен результат решения обратной задачи для случая, когда контур Γ_1 задается функцией $h(\varphi)=2+0{,}1\cos 5\varphi+0{,}1\sin 5\varphi$, а контур Γ_2 является окружностью радиуса 3.5 с центром в начале координат (изображены сплошной линией). Звездочками изображен восстановленный контур.

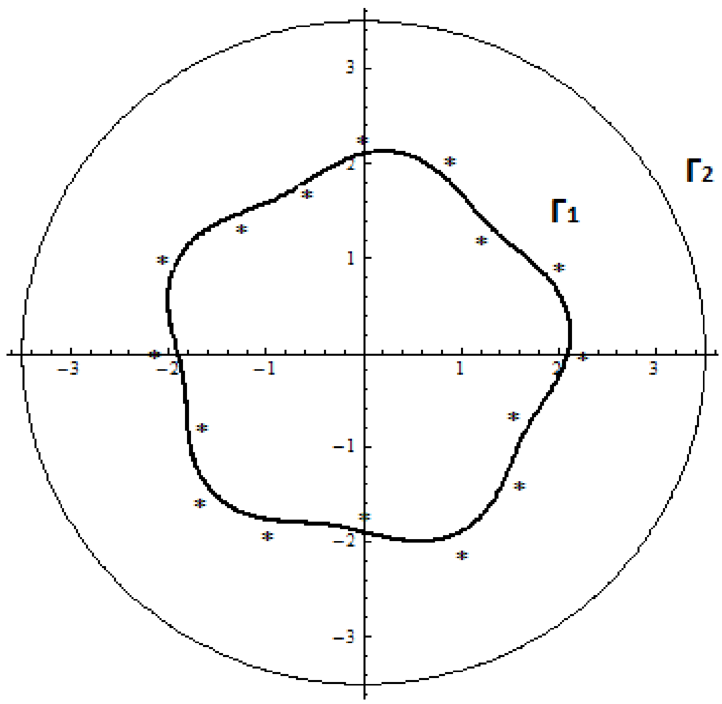

Рис. 2

Точки измерения решения прямой задачи $M_l, l=\overline{1,16}$ были расположены с шагом $\dfrac{\pi}{8}$, начиная с точки $(3,0)$, на окружности радиуса 3 с центром в начале координат, $F(s) = s^{-2}$ (что соответствует $f(t) = 1$), $p_1 = s_1^2 = 0{,}4$, $p_2 = s_2^2 = 0{,}5$, $q(\beta) = \pi e^{-\pi|\beta - \pi|}$. В качестве значений $v(s, r, \alpha)$ в точках M_l были взяты результаты численного решения соответствующей прямой задачи. Начальным приближением h_0 была выбрана окружность с центром в начале координат радиуса 2.

5. Приложение

Оператор $B(\mu, h, \mu', \eta')$ в уравнении (8) имеет следующий вид:

$$B(\mu,h,\mu',\eta')[\omega] = \int_0^{2\pi} \Big[K_0\Big(s\sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}\Big) \times$$

$$\times \{h(\varphi)\mu'(\varphi) + \mu(\varphi)\} - K_1\left(s\sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)} \right) \times$$

$$\times s \frac{h(\varphi) - r\cos(\alpha-\varphi)}{\sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}} h(\varphi)\mu(\varphi) +$$

$$+ K_0\Big(s\sqrt{r^2 + g^2(\varphi) - 2rg(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}\Big)\eta'(\varphi)g(\varphi) \Big] \omega(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

Функции W_h' в системе (9) имеют следующий вид:

$$W_h'[g(\beta), h(\psi)] = -\frac{s^2}{2}\Big[K_0\Big(s\sqrt{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi)\cos(\beta-\psi)}\Big) +$$

$$+ K_2\Big(s\sqrt{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi)\cos(\beta-\psi)}\Big)\Big] \times$$

$$\times \frac{h(\psi) - g(\beta)\cos(\beta-\psi)}{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi)\cos(\beta-\psi)} h(\psi)\big(g(\beta) - h(\psi)\cos(\beta-\psi)\big) +$$

$$+ s \frac{K_1\Big(s\sqrt{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi)\cos(\beta-\psi)}\Big)}{\Big(\sqrt{g^2(\beta) + h^2(\psi) - 2g(\beta)h(\psi)\cos(\beta-\psi)}\Big)^3} \times$$

$$\times \big[g^3(\beta) - 3h(\psi)g^2(\beta)\cos(\beta-\psi) + 3h^2(\psi)g(\beta)\cos^2(\beta-\psi) - h^3(\psi)\cos^2(\beta-\psi)\big],$$

$$W_h'[h(\varphi), g(\gamma)] = -\frac{s^2}{2}\Big[K_0\Big(s\sqrt{g^2(\gamma)+h^2(\varphi)-2g(\gamma)h(\varphi)\cos(\varphi-\gamma)}\Big)+$$

$$+K_2\Big(s\sqrt{g^2(\gamma)+h^2(\varphi)-2g(\gamma)h(\varphi)\cos(\varphi-\gamma)}\Big)\Big]\times$$

$$\times\frac{g(\gamma)\big(h(\varphi)-g(\beta)\cos(\varphi-\gamma)\big)^2}{g^2(\gamma)+h^2(\varphi)-2g(\gamma)h(\varphi)\cos(\varphi-\gamma)}+$$

$$+s\frac{K_1\Big(s\sqrt{g^2(\gamma)+h^2(\varphi)-2g(\gamma)h(\varphi)\cos(\varphi-\gamma)}\Big)}{\Big(\sqrt{g^2(\gamma)+h^2(\varphi)-2g(\gamma)h(\varphi)\cos(\varphi-\gamma)}\Big)^3}g^3(\varphi)\sin^2(\varphi-\gamma),$$

$$W_h'[h(\varphi), h(\psi)] = -\frac{s^2}{2}\Big[K_0\Big(s\sqrt{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}\Big)+$$

$$+K_2\Big(s\sqrt{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}\Big)\Big]\times$$

$$\times\frac{\big(h(\psi)+h(\varphi)-\big(h(\psi)+h(\varphi)\big)\cos(\psi-\varphi)\big)}{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}h(\psi)\big(h(\varphi)-h(\psi)\cos(\psi-\varphi)\big)+$$

$$+s\frac{K_1\Big(s\sqrt{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}\Big)}{\Big(\sqrt{h^2(\varphi)+h^2(\psi)-2h(\varphi)h(\psi)\cos(\varphi-\psi)}\Big)^3}\Big[h^3(\psi)\big(1-\cos(\psi-\varphi)\big)+$$

$$+h^3(\varphi)-3h(\psi)h^2(\varphi)\cos(\psi-\varphi)+\Big(3h^2(\psi)h(\varphi)-h^3(\psi)\Big)\cos^2(\psi-\varphi)\big)\Big].$$

Литература

1. Головина С.Г., Денисов А.М., Дмитриев В.И. Об обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Прикладная математика и информатика. № 21. М.: МАКС Пресс, 2005. С. 5-14.
2. Головина С.Г. Метод линеаризации в обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем. и Киберн. 2008, № 1, С. 5-9.
3. Головина С.Г., Разборов А.Г. Об определении границы двумерной области по решению внешней начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности // Прикладная математика и информатика. № 33. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 69-74.