

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦЫ ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ ПО РЕШЕНИЮ ВНЕШНЕЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ\*

### Постановка обратной задачи

Рассмотрим следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = \Delta P + f_k(t)\delta(x - x_k)\delta(y - y_k), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, t > 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \bar{n}} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = 0, \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow +\infty} P(t, x, y) = P_0, \\ P(0, x, y) = P_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $D$  — односвязная область с ляпуновской границей  $\Gamma$ ,  $\bar{n}$  — единичный вектор нормали к  $\Gamma$ , направленный внутрь  $D$ ,  $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  — фиксированные точки,  $P_0$  — фиксированное число.

Рассмотрим конечный набор точек  $(x_l, y_l) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ,  $l = \overline{1, n}$  и обозначим через  $P(t, x_l, y_l, x_k, y_k)$  решение задачи (1) в этих точках.

*Обратная задача заключается в определении контура  $\Gamma$  по известным при  $t > 0$  функциям  $f_k(t)$  и  $P(t, x_l, y_l, x_k, y_k)$ , где  $k \in K \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $l = \overline{1, n}$ ,  $l \neq k$ .*

Обратная задача такого типа возникает, например, при поиске зон малой проницаемости в нефтяном пласте (т.е. зон, где бурение новых скважин нецелесообразно) по измерениям давления в имеющихся скважинах. Предполагается, что давление в нефтяном пласте не изменяется поперек пласта, а проницаемость в нем постоянна, за исключением области  $D$  полной непроницаемости, размеры которой малы по сравнению с размерами пласта. В точках, имеющих координаты  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , расположены  $n$  скважин, при этом в скважине  $(x_k, y_k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , создается давление, изменяющееся по закону  $f_k(t)$ . До начала работы скважины  $(x_k, y_k)$ , а также при всех  $t > 0$  на большом расстоянии от исследуемой

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00314.

области давление в пласте равно некоторому постоянному пластовому давлению  $P_0$ . В этом случае давление  $P(t, x, y, x_k, y_k)$  в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$  вне зоны непроницаемости является решением задачи (1).

В работах [1], [2] была рассмотрена задача определения границы зоны непроницаемости в нефтяном пласте по измерениям установившегося давления в скважинах. В данной работе в качестве входной информации для восстановления границы используются нестационарные данные о давлении в скважинах, что позволяет уменьшить количество измерений для решения обратной задачи.

### Численное решение обратной задачи

Рассмотрим задачу (1) при произвольном фиксированном  $k \in K$ . Пусть  $M$  и  $M_0$  — точки с координатами  $(x, y)$  и  $(x_k, y_k)$ , соответственно. В работе [3] показано, что задача (1) после преобразований

$$\hat{P}(t, M, M_0) = P(t, M, M_0) - P_0, \quad (2)$$

$$u(p, M, M_0) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \hat{P}(t, M, M_0) dt, \quad F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_k(t) dt \quad (3)$$

сводится к задаче

$$\begin{cases} \Delta u - pu = -F(p)\delta(x - x_k)\delta(y - y_k), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \operatorname{Re} p > 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right|_{(x, y) \in \Gamma} = 0, \\ \lim_{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty} u(p, M, M_0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

решение которой при  $p = s^2 > 0$  единственно и задается формулами

$$v(s, M, M_0) = \int_{\Gamma} K_0(s | \overline{MN} |) \mu(N, M_0) dl_N, \quad (5)$$

$$\mu(N, M_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial K_0(s | \overline{NQ} |)}{\partial \bar{n}_N} \mu(Q, M_0) dl_Q = -\frac{F(s^2)}{2\pi^2} \frac{\partial K_0(s | \overline{NM_0} |)}{\partial \bar{n}_N}, \quad N \in \Gamma, \quad (6)$$

$$u(p, M, M_0) = \frac{1}{2\pi} K_0(s | \overline{MM_0} |) F(s^2) + v(s, M, M_0), \quad (7)$$

где  $K_0(z)$  — функция Макдональда нулевого порядка.

Перейдем в уравнениях (5) и (6) к полярным координатам. Будем считать, что начало координат находится в области  $D$ , а полярные координаты точек  $\Gamma$  имеют вид  $(h(\varphi), \varphi)$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $h(\varphi) \in C^1[0; 2\pi]$ .

Обратная задача сводится, таким образом, к восстановлению функции  $h(\varphi)$  по известным функциям  $v(s, M, M_0)$  и  $F(s^2)$  из системы уравнений (5), (6).

Обозначим полярные координаты точек  $M$ ,  $M_0$ ,  $N$  и  $Q$  через  $(r, \alpha)$ ,  $(r_0, \alpha_0)$ ,  $(h(\varphi), \varphi)$  и  $(h(\psi), \psi)$ , соответственно. Тогда

$$|\overline{MN}| = \sqrt{r^2 + h^2(\varphi) - 2rh(\varphi)\cos(\alpha - \varphi)},$$

$$|\overline{NQ}| = \sqrt{h^2(\psi) + h^2(\varphi) - 2h(\psi)h(\varphi)\cos(\psi - \varphi)},$$

$$|\overline{NM_0}| = \sqrt{r_0^2 + h^2(\varphi) - 2r_0h(\varphi)\cos(\alpha_0 - \varphi)}.$$

Будем предполагать, что область  $D$  имеет такую форму, что выполняется следующее условие:

$$\max_{[0; 2\pi]} |h'(\varphi)| \ll \min_{[0; 2\pi]} h(\varphi). \quad (8)$$

Указанное условие позволяет несколько упростить подынтегральные выражения в уравнениях (5) и (6) относительно неизвестной функции  $h(\varphi)$ , так как в этом случае длина элемента границы  $\Gamma$

$$dl = \sqrt{h^2(\varphi) + (h'(\varphi))^2} d\varphi \approx h(\varphi) d\varphi,$$

а единичный вектор внутренней нормали к  $\Gamma$

$$\bar{n} = -\frac{(h'(\varphi)\sin\varphi + h(\varphi)\cos\varphi, h(\varphi)\sin\varphi - h'(\varphi)\cos\varphi)}{\sqrt{h^2(\varphi) + (h'(\varphi))^2}} \approx -(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Уравнение (5) примет в этом случае вид

$$v(s, r, \alpha, r_0, \alpha_0) = A[\mu, h], \quad (9)$$

где

$$A[\mu, h] = \int_0^{2\pi} K_0(s | \overline{MN} |) \mu(\varphi) h(\varphi) d\varphi. \quad (10)$$

Уравнение (6) преобразуется к следующему виду:

$$\mu(\varphi) + \int_0^{2\pi} W(\varphi, \psi) \mu(\psi) d\psi + g(\varphi) = 0, \quad (11)$$

$$W(\varphi, \psi) = s \cdot \frac{h(\psi)}{\pi} K_1(s | \overline{NQ} |) \frac{h(\varphi) - h(\psi) \cos(\psi - \varphi)}{| \overline{NQ} |}, \quad (12)$$

$$g(\varphi) = s \cdot \frac{F(s^2)}{2\pi^2} K_1(s | \overline{NM_0} |) \frac{h(\varphi) - r_0 \cos(\alpha_0 - \varphi)}{| \overline{NM_0} |}. \quad (13)$$

Решение обратной задачи будем искать из уравнения (9) с помощью некоторой итерационной процедуры, причем на каждом очередном шаге вместо исходного уравнения будет решаться его линейризация в окрестности функции  $h$ , полученной на предыдущем шаге:

$$v(s, r, \alpha, r_0, \alpha_0) - A[\mu_{j-1}, h_{j-1}] = A'_h [\mu_{j-1}, \mu'_{j-1}, h_{j-1}, \omega_j], \quad (14)$$

где  $\omega_j = h_j - h_{j-1}$ ,

$$\begin{aligned} A'_h [\mu_{j-1}, \mu'_{j-1}, h_{j-1}, \omega_j] = & \int_0^{2\pi} \left[ K_0 \left( s \sqrt{r^2 + h_{j-1}^2(\varphi) - 2rh_{j-1}(\varphi) \cos(\alpha - \varphi)} \right) \times \right. \\ & \times \left\{ h_{j-1}(\varphi) \mu'_{j-1}(\varphi) + \mu_{j-1}(\varphi) \right\} - \\ & - K_1 \left( s \sqrt{r^2 + h_{j-1}^2(\varphi) - 2rh_{j-1}(\varphi) \cos(\alpha - \varphi)} \right) \times \\ & \left. \times s \frac{h_{j-1}(\varphi) - r \cos(\alpha - \varphi)}{\sqrt{r^2 + h_{j-1}^2(\varphi) - 2rh_{j-1}(\varphi) \cos(\alpha - \varphi)}} h_{j-1}(\varphi) \mu_{j-1}(\varphi) \right] \omega_j(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция  $\mu'_{j-1}$  при выполнении условия (8) приближенно задает в точке  $h_{j-1}$  дифференциал отображения  $h \rightarrow \mu$ , определяемого уравнением (11), и удовлетворяет уравнению

$$\mu'(\varphi) + \int_0^{2\pi} W(\varphi, \psi) \mu'(\psi) d\psi + \int_0^{2\pi} W'_h(\varphi, \psi) \mu(\psi) d\psi + g'_h(\varphi) = 0, \quad (16)$$

где

$$W'_h(\varphi, \psi) = \frac{s}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} \{K_2(s|\overline{NQ}|) + K_0(s|\overline{NQ}|)\} \times \right. \\ \times s \frac{h(\psi)(h(\varphi) - h(\psi) \cos(\psi - \varphi))(h(\psi) + h(\varphi) - (h(\psi) + h(\varphi)) \cos(\psi - \varphi))}{|\overline{NQ}|^2} + \\ \left. + \frac{K_1(s|\overline{NQ}|)}{(|\overline{NQ}|)^3} \{h^3(\psi) + h^3(\varphi) - h^3(\psi) \cos(\psi - \varphi) - \right. \\ \left. - 3h(\psi)h^2(\varphi) \cos(\psi - \varphi) + 3h^2(\psi)h(\varphi) \cos^2(\psi - \varphi) - h^3(\psi) \cos^2(\psi - \varphi)\} \right], \\ g'_h(\varphi) = \frac{sF(s^2)}{2\pi^2} \left[ -\frac{1}{2} \{K_2(s|\overline{NM}_0|) + K_0(s|\overline{NM}_0|)\} \cdot s \frac{(h(\varphi) - r_0 \cos(\alpha_0 - \varphi))^2}{|\overline{NM}_0|^2} + \right. \\ \left. + \frac{K_1(s|\overline{NM}_0|) r_0^2 \sin^2(\alpha_0 - \varphi)}{(|\overline{NM}_0|)^3} \right].$$

Для вычисления  $h(\varphi)$  предлагается следующая итерационная процедура: задавшись некоторым начальным приближением  $h_0(\varphi)$ , на шагах  $j = 1, 2, \dots$  из уравнения (11) при  $h = h_{j-1}$  вычисляем  $\mu_{j-1}$ , потом из уравнения (16) при  $h = h_{j-1}$  и  $\mu = \mu_{j-1}$  вычисляем  $\mu'_{j-1}$ , и, наконец, из уравнения (14) находим  $\omega_j(\varphi)$  и  $h_j(\varphi) = h_{j-1}(\varphi) + \omega_j(\varphi)$ .

### Результаты вычислительного эксперимента

На Рисунке 1 приведен результат решения обратной задачи для случая, когда контур  $\Gamma$  задается функцией  $h(\varphi) = 6 + 0,4 \cos 3\varphi + 0,4 \sin 3\varphi$  (изображен сплошной линией). Точками изображен восстановленный контур. Точки  $(x_l, y_l)$ ,  $l = 1, 12$  были расположены с шагом  $\pi/6$ , начиная с точки  $(8, 0)$ , на окружности радиуса 8 с центром в начале координат, множество  $K$  равнялось  $\{1, 8\}$ ,  $f_1(t) = f_8(t) = 1$ ,  $p_1 = s_1^2 = 0, 1$ ,  $p_2 = s_2^2 = 0, 2$ . В качестве значений  $v(s, x_l, y_l, x_k, y_k)$  были взяты результаты численного

решения соответствующей прямой задачи (численное решение прямой задачи обсуждалось в работе [3]). Начальным приближением  $h_0$  была выбрана окружность с центром в начале координат радиуса 4.

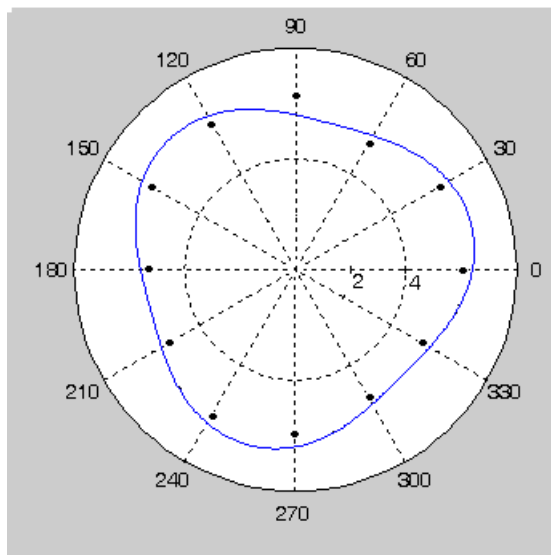


Рис. 1.

### Литература

1. Головина С.Г., Денисов А.М., Дмитриев В.И. Об обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте. Прикладная математика и информатика, М.: МАКС Пресс, 2005, № 21, С. 5-14.
2. Головина С.Г. Метод линеаризации в обратной задаче определения зон малой проницаемости в нефтяном пласте // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычисл. Матем. и Киберн. 2008, № 1, С. 5-9.
3. Головина С.Г., Разборов А.Г. О восстановлении неизвестной границы в смешанной задаче для уравнения теплопроводности // В сб.: Прикладная математика и информатика, № 30, М.: МАКС Пресс, 2008, С. 18-24.