Н.Л. Григоренко, Д.В. Камзолкин, Л.Н. Лукьянова

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОИЗВОДСТВА И ПЛАНИРОВАНИЯ ИНФРАСТРУКТУР *

1. Введение.

В настоящей работе рассматривается задача планирования инфраструктуры территории, на которой расположено сырьевое предприятие, разрабатывающее месторождение полезных ископаемых открытым способом, и находящейся вне развитой ранее инфраструктуры. Оценка капиталовложений в создание полноценной инфраструктуры территории, при условии наличия запасов исчерпаемого ресурса на 30-40 лет производственной деятельности, является важным параметром инвестиционных вложений в проект разработки месторождения. Задача об определении рационального объема инвестиционных вложений в производственный сектор, позволяющих обеспечить заданные объем прибыли и уровень развития внутренней производственной инфраструктуры территории, включающий обеспеченность заданной численности трудовых ресурсов жильем, дорожной сетью и энергией, в рамках заданной территории, представляет собой задачу оптимального управления. Функционал качества в такой задаче строится на основании экспертных данных о количественных и качественных параметрах инфраструктуры по обслуживанию территории при различных уровнях интенсивности работы сырьевого производственного процесса и возможных потерях в эффективности основного производства из-за ее неразвитости. Решение оптимизационных задач с таким функционалом позволяет оценить необходимый объем инвестиционных средств в создание обслуживающей инфраструктуры проекта, не нарушающий соответсвующие социальные, экологические и другие нормы. Оценка и планирование инвестиционных затрат в создание и развитие производственного сектора и обслуживающей проект инфраструктуры осуществляется на стадии разработки проекта и позволяет оценивать инвестиционные риски в зависимости от колебаний ценовых факторов проекта.

2. Математическая модель динамики экономических показателей производства и инфраструктуры.

Предлагаемая в работе математическая модель динамики экономических показателей производства и инфраструктуры района, на территории ко-

*Работа поддержана грантами РГНФ 10-02-00191-а, НШ-6512.2012.1.

торого расположено сырьевое предприятие, основывается на теории многосекторных моделей экономической динамики, изложенной в работах [1],[2],[3],[4]. В дальнейшем изложении мы используем, по возможности, обозначения этой теории и предполагаем выполнение неоклассических условий на соответствующие производственные функции и функции полезности. Учет требований к эффективности работы системы секторов приводит к задаче оптимального управления сложного вида, для которой мы обсуждаем подходы к численному решению.

В качестве сырьевого предприятия, фигурирующего в модели, рассмотрим сырьевое предприятие, осуществляющее производственный процесс добычи полезных ископаемых из открытого карьера. Предполагается, что динамика экономических показателей производственного процесса добычи полезных ископаемых описывается уравнениями [8],[9],[10],[11]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &=& f^0(u_1(t), P(t), Q(t)), & x(0)=0, \quad x(T(u(\cdot)))=x_1, \\ \dot{P}(t) &=& u_2(t), & P(0)=P_0, \\ \dot{Q}(t) &=& u_2(t)+u_3(t), & Q(0)=Q_0, \\ \dot{y}(t) &=& f^1(z(t),u(t),t), & y(0)=0, \end{cases} \tag{1}$$

$$Q_0 \geqslant P_0 > 0, \;\; f^0(u_1,P,Q) = u_1 P + (1-u_1)Q,$$

$$f^1(z,u,t) = e^{-\nu t}\cdot \Big[-mf^0(u_1,P,Q) -$$

$$-2u_2 - u_3 - p\cdot P + s(t)P\cdot\Big(1-\frac{P}{2f^0(u_1,P,Q)}\Big)\Big].$$

Здесь

$$z=(P,Q), \;\; u=(u_1,u_2,u_3), \;\; 0\leqslant u_i(t)\leqslant 1, \;\; i=1,2,3, \quad t\in[0,T],$$

$x(t)$ - объем исчерпаемого ресурса добытый к моменту t, $0\leqslant x(t)\leqslant x_1$,
$P(t)$ - инвестиции в перерабатывающее оборудование,
$Q(t)$ - инвестиции в добывающее оборудование,
$s(t)$ - известная непрерывная положительная функция, характеризующая цены на продукцию добывающего сектора,
T - нефиксированный момент окончания процесса, определяемый из условия $x(T)=x_1$;
$x,P,Q,y,u_1,u_2,u_3\in R^1$; ν, m, p - положительные параметры.

Динамика экономических показателей инфраструктуры описывается односекторной моделью с учетом запаздывания при вводе фондов и наличия инвестиций от сырьевого предприятия [4]:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) &=& -\mu k(t)+v(t), & k(0)=k_0, \\ \dot{v}(t) &=& -\chi_1 v(t) + \chi_2\Big[(1-\xi(t))f(k)+\eta(t)\frac{y(t)}{L(t)}\Big], & v(0)=v_0, \\ \dot{J}(t) &=& \delta J(t) + U(\xi(t)f(k(t))), & J(0)=0, \\ \dot{L}(t) &=& \nu_1 L, & L(0)=L_0, \end{cases} \tag{2}$$

где
k - фондовооруженность сектора инфраструктуры,
$v(t)$ - объем фондов, введенных в сектор инфраструктуры к моменту t,
$J(t)$ - показатель благосостояния, $f(k)$ - производственная функция сектора инфраструктуры,
$\xi(t) \in [0,1]$, $\eta(t) \in [0,1]$ - управляющие параметры,
μ, χ_1, χ_2, ν_1, δ - положительные константы,
$L(t)$ - объем трудовых ресурсов территории,
$c(t) = \xi(t) f(k(t))$ - показатель непроизводственного удельного потребления,
$U(c)$ - функция полезности, удовлетворяющая неоклассическим условиям [1], [3].

3. Постановка экстремальной задачи для модели (1)-(2.)

Показатель эффективности работы секторов модели рассмотрим в следующем виде:

$$\Phi(\alpha, A) = y(T) + AJ(T)L(T)e^{-\delta T} - \int_0^T \eta(t)y(t)dt-$$

$$-\int_0^T \alpha e^{-\nu t}(u_2^2(t) + u_3^2(t) + \eta^2(t))dt \to \max_{\{\xi,\eta,u_i,i=1,2,3,\}}, \tag{3}$$

где $u_i(t) \in [0,1], i = 1,2,3$, $\xi(t) \in [0,1]$, $\eta(t) \in [0,1]$. Первые три слагаемые функционала $\Phi(\alpha, A)$ характеризуют состояние основных фондов двух секторов, соответствующих трудовым ресурсам $L(t)$, $t \in [0,T]$ и объемам производственной деятельности $x(t)$, $t \in [0,T]$ [4]. Последний интегральный член рассматривается при малых положительных α и является регуляризирующей добавкой [6]. Здесь α, A - положительные константы.

Требуется определить параметры $\{u_i(t) \in [0,1], i = 1,2,3,\ \xi(t) \in [0,1],\ \eta(t) \in [0,1], T\}$, доставляющие экстремум функционалу (3).

Замечание 1. Модель описываемая системой уравнений (1) и (2), является представителем широкого класса неклассических двусекторных моделей. Исследование некоторых классов экстремальных задач для таких моделей представлено в цитируемой литературе. Уравнения (1) имеют разные варианты в зависимости от числа добываемых минералов, характеристик залегания минералов по глубине, характеристик плотности добываемой руды, инвестиционных правил страны, которой принадлежит территория [8], [9]. Уравнения (2) имеют разные варианты в зависимости от подходов к агрегированию экономических показателей [4]. Экстремальные задачи, рассматриваемые для этих моделей, относятся к классу нестационарных нелинейных задач оптимального управления динамическими процессами. Для таких задач характерны особые режимы, наличие которых придает специфику оптимальным управлению и траектории процесса. Для решения соответствующих экстремальных задач могут быть использованы прямые и непрямые методы решения задач оптимального управления, содержащиеся в работах [5], [6], [7]. В работах [8], [9] приведено решение задачи оптимального управления с интегральным функционалом качества, содержащим дисконтирующий параметр, для случая линейной и квадратичной зависимости концентрации чистого минерала от глубины залегания. В работах [10], [11] приведено решение задачи оптимального управления для модели с линейной концентрацией в классе позиционных управлений и рассмотрена задача оптимального управления на бесконечном горизонте планирования. В настоящей работе для модели (1) - (2) в случае функционала (3) предложен подход к численному нахождению приближения оптимального управления, использующий специфику задачи (1)-(3), и приведены результаты расчета такого управления для тестовых параметров модели.

4. Подход к численному решению задачи (1)-(3).

Приведем краевую задачу принципа максимума Понтрягина для задачи (1)-(3) [5],[7]. Она состоит в нахождении констант a_1, T и функций $x(t), P(t), Q(t), y(t), k(t), v(t), J(t), \psi_i(t), i = 1, ..., 7$, являющихся решением системы уравнений, в которой первые семь имеют вид (1),(2), восьмое уравнение имеет вид:

$$H(u_1(T-0), u_2(T-0), u_3(T-0), \xi(T-0), \eta(T-0), x(T),$$

$$P(T), Q(T), y(T), k(T), v(T), J(T), a_0, a_1) = 0, \tag{4}$$

остальные семь уравнений:

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
\dot{\psi}_1 & = & -\frac{\partial H}{\partial x} & = 0, & \psi_1(T) & = & -\frac{\partial l}{\partial x(T)} = a_1, \\
\dot{\psi}_2 & = & -\frac{\partial H}{\partial P} & = -\psi_4 \frac{\partial f^1}{\partial P} - \psi_1 \frac{\partial f^0}{\partial P}, & \psi_2(T) & = & 0, \\
\dot{\psi}_3 & = & -\frac{\partial H}{\partial Q} & = -\psi_4 \frac{\partial f^1}{\partial Q} - \psi_1 \frac{\partial f^0}{\partial Q}, & \psi_3(T) & = & 0, \\
\dot{\psi}_4 & = & -\frac{\partial H}{\partial y} & = -a_0 \eta^* - \psi_6 \chi_2 \frac{\eta^*}{L}, & \psi_4(T) & = & -\frac{\partial l}{\partial y(T)} = a_0, \\
\dot{\psi}_5 & = & -\frac{\partial H}{\partial k} & = -\psi_6 \chi_2 f_k'(1-\xi) + & & & \\
 & & & +\psi_5 \mu - \chi_7 \frac{\partial U}{\partial c} \xi f_k', & \psi_5(T) & = & 0, \\
\dot{\psi}_6 & = & -\frac{\partial H}{\partial v} & = -\psi_5 + \psi_6 \chi_1, & \psi_6(T) & = & 0, \\
\dot{\psi}_7 & = & -\frac{\partial H}{\partial J} & = -\delta \psi_7, & \psi_7(T) & = & -a_0 A L(T) e^{\delta T}.
\end{array}\right. \tag{5}$$

Здесь $a_0 \in \{0, 1\}$,

$$l(x(T), y(T), J(T), a_0, a_1) = a_0(y(T) + AJ(T)L(T)e^{-\delta T}) + a_1(x_1 - x(T)), \tag{6}$$

$$H = -a_0(\eta y + \alpha(u_2^2 + u_3^2 + \eta^2)) + \psi_1 f^0(u_1, P, Q) + \psi_2 u_2 +$$
$$+\psi_3(u_2 + u_3) + \psi_4 f^1(z, u, t) + \psi_5(-\mu k + v) +$$
$$+\psi_6\Big(-\chi_1 v + \chi_2\Big[(1-\xi)f(k) + \eta\frac{y}{L(t)}\Big]\Big) + \psi_7(\delta J + U(\xi f(k))). \qquad (7)$$

В уравнениях (1)-(2),(4)-(5) стоят управления, доставляющие максимум функции Понтрягина :

$$u_1^* = \mathrm{argmax}_{u_1\in[0,1]}\{(\psi_1 - \psi_4 m)f^0(u_1, P, Q) - \tfrac{\psi_4 s(t)P^2}{2f^0(u_1,P,Q)}\}; \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} u_2^* &= \mathrm{argmax}_{u_2\in[0,1]}\{u_2(\psi_2 + \psi_3 - 2\psi_4) - a_0\alpha u_2^2\} = \\ &= \begin{cases} 0, & \psi_2 + \psi_3 - 2\psi_4 < 0, \\ \frac{\psi_2+\psi_3-2\psi_4}{2a_0\alpha}, & 0 \leqslant \psi_2 + \psi_3 - 2\psi_4 \leqslant 2a_0\alpha, \\ 1, & 2a_0\alpha < \psi_2 + \psi_3 - 2\psi_4; \end{cases} \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} u_3^* &= \mathrm{argmax}_{u_3\in[0,1]}\{u_3(\psi_3 - \psi_4) - a_0\alpha u_3^2\} = \\ &= \begin{cases} 0, & \psi_3 - \psi_4 < 0, \\ \frac{\psi_3-\psi_4}{2a_0\alpha}, & 0 \leqslant \psi_3 - \psi_4 \leqslant 2a_0\alpha, \\ 1, & 2a_0\alpha < \psi_3 - \psi_4; \end{cases} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\xi^* = \mathrm{argmax}_{\xi\in[0,1]}\{-\xi\psi_6\chi_2 f(k) + \psi_7 U(\xi f(k))\}, \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} \eta^* &= \mathrm{argmax}_{\eta\in[0,1]}\{\eta y(\tfrac{\chi_2\psi_6}{L(t)} - a_0) - a_0\alpha\eta^2\} = \\ &= \begin{cases} 0, & y(\frac{\chi_2\psi_6}{L(t)} - a_0) < 0, \\ \frac{y(\frac{\chi_2\psi_6}{L(t)} - a_0)}{2a_0\alpha}, & 0 \leqslant y(a_0 - \frac{\chi_2\psi_6}{L(t)}) \leqslant 2a_0\alpha, \\ 1, & 2a_0\alpha < y(\frac{\chi_2\psi_6}{L(t)} - a_0); \end{cases} \end{aligned} \qquad (12)$$

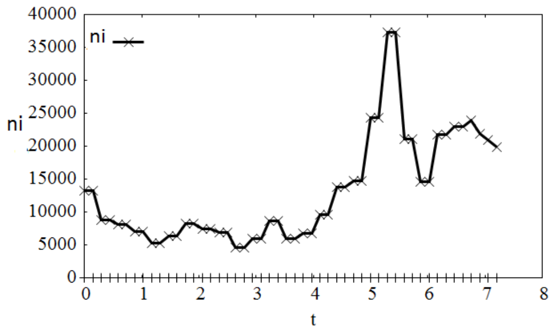

Рис. 1. $s(t)$

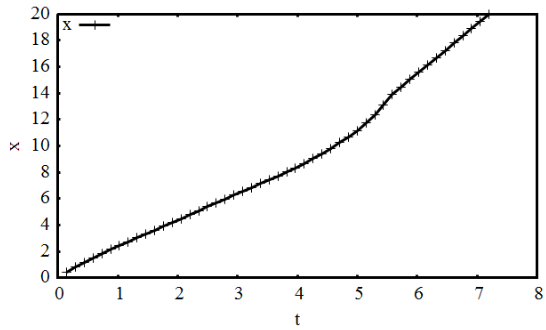

Рис. 2. $x(t)$

Управление ξ^* из (11) удобно находить численно, учитывая неоклассические условия на функцию $U(c)$ [3]. Для численного решения краевой задачи (1),(2),(4),(8)-(12), применялся метод продолжения по параметру [12]. По решению краевой задачи восстанавливаются соответствующие значения управлений и траекторий. Вычисленные значения функционала сравниваются

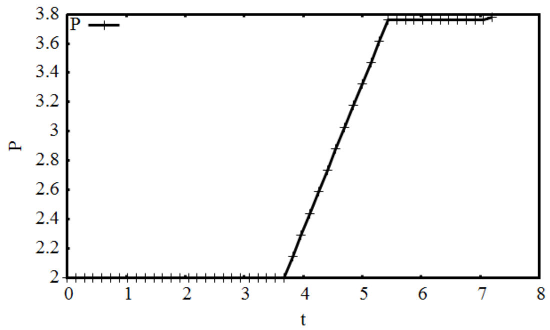

Рис. 3. $P(t)$

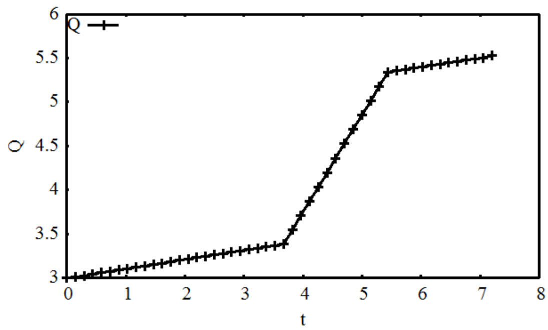

Рис. 4. $Q(t)$

с приближенным оптимальным значением критерия Φ_1, найденным из расчета множества достижимости системы (1)-(3) [13] по сетке $T \in [\frac{\sqrt{Q_0^2+8x_1}-Q_0}{4}, \frac{x_1}{P_0}]$. В случае близости вычисленного значения критерия качества и его значения, найденного по области достижимости, управление относилось к числу достоверных приближений оптимального управления. В случае получения значения функционала, отличающегося более чем на заданную величину отклонения от приближенного оптимального значения, корректировалось начальное приближение краевой задачи.

5. Вычисление оптимального управления для конкретных параметров.

Приведем результаты расчета экстремальных управлений и траекторий для модели (1) - (3), выполненных с применением подхода, описанного в п.4 при следующих параметрах: $x_1 = 20$, $P_0 = 2$, $Q_0 = 3$, $m = 1$, $p = 5$, $\nu = 0.1$, $\mu = 0.1$, $\chi_1 = 0.1$, $\chi_2 = 0.1$, $\rho = 0.03$, $f(k) = k^{0.3}$, $L_0 = 2 * 10^3$, $U(c) = \sqrt{c}$, $\nu_1 = 0.01$, $\delta = 0.15$, $A = 1$, $\alpha = 0.02$, функции $s(t)$ соответствующей ценам на никель, приведенной на рис 1. На рис 2-12 приведены соответствующие экстремальные управления и траектории. Для рассматриваемых параметров $T = 7.202$, $y(T) = 61606.703$.

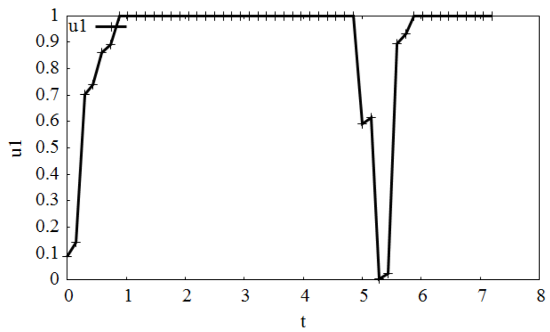

Рис. 5. $u1(t)$

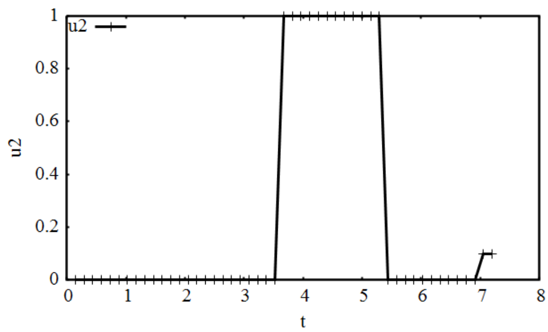

Рис. 6. $u2(t)$

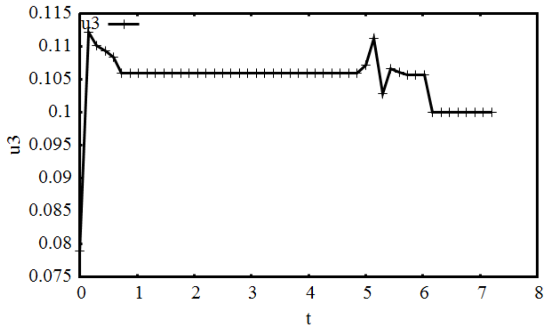

Рис. 7. $u3(t)$

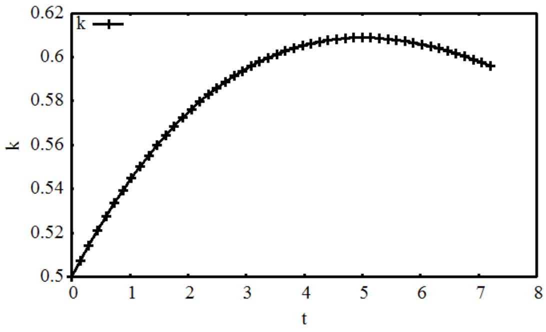

Рис. 8. $k(t)$

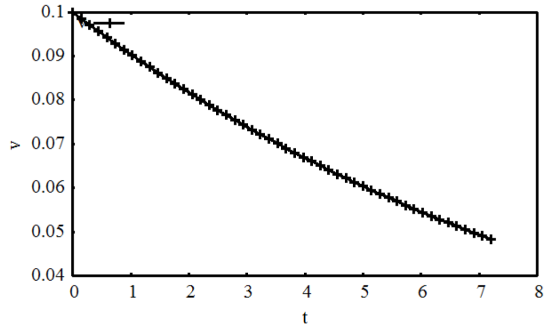

Рис. 9. $v(t)$

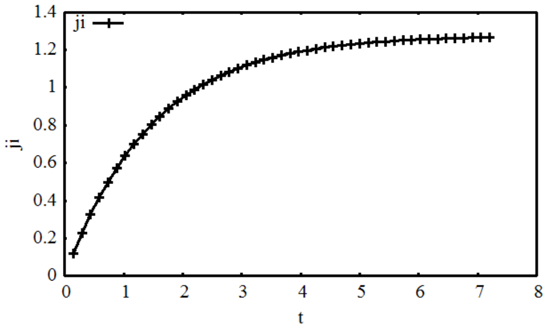

Рис. 10. $J(t)$

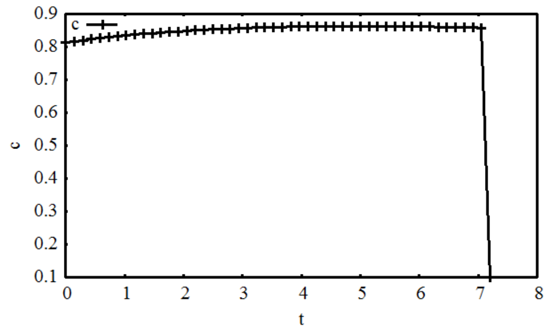

Рис. 11. $c(t)$

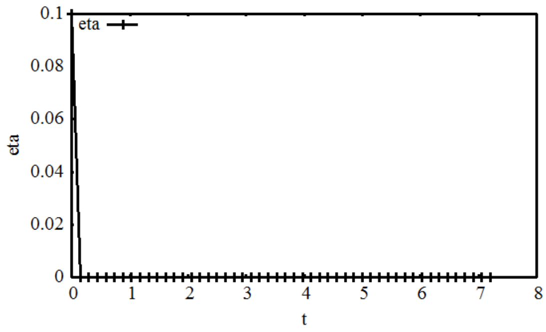

Рис. 12. $\eta(t)$

Список литературы

1. **Ашманов С.А.** Введение в математическую экономику. — М.:Наука, 1984. - 293 с.
2. **Аллен Р.** Математическая экономия. — М.:Изд-во иностр.лит., 1963. - 667 с.
3. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.:Айрис Пресс, 2002. - 565 с.
4. **Колемаев В.А.** Математическая экономика. — М.:Юнити, 1998. - 240 с.
5. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов . — М.:Наука, 1961. - 391 с.
6. **Тихонов А.Н.** О методах регуляризации задач оптимального управления. Доклады Академии наук СССР. — 1965, т.162, №4, с.763-766.
7. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации.М.Факториал Пресс: 2002. - 820 с.
8. **Григоренко Н.Л. Камзолкин Д.В. Лукьянова Л.Н.** Решение одной задачи оптимального управления. Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМК МГУ имени Ломоносова, Выпуск 1,М: МАКС Пресс, 2005, С.137-144
9. **Григоренко Н.Л. Камзолкин Д.В. Лукьянова Л.Н. Пивоварчук Д.Г.** О задаче оптимального управления с интегральным функционалом от рациональной функции управления // Дифференциальные уравнения, Т.45, № 11, 2009, С.1586-1600.
10. **Аввакумов С.Н. Киселев Ю.Н. Орлов М.В.** Исследование одномерной оптимизационной модели MDI. Бесконечный горизонт. Конечный горизонт. Проблемы динамического управления: Сборник научных трудов факультета ВМК МГУ имени Ломоносова, Выпуск 1, М: МАКС Пресс, 2005, С.111-136
11. **Киселев Ю.Н. Аввакумов С.Н. Орлов М.В.** Закон гиперболического тангенса при синтезировании оптимального управления в одной нелинейной модели с дисконтированием // Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42. №11. с.1490-1506
12. **Аввакумов С.Н.,Киселев Ю.Н.** Некоторые алгоритмы оптимального управления // Труды ИММ УрО РАН, том 12, № 2, с. 3-17
13. **Тарасьев А.М. Ушаков В.Н. Хрипунов А.П.** О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления. // Тр.ИММ УрО РАН, 1992, 1, pp. 160-177.