

Раздел II. Численные методы

А.В. Гулин

ТЕСТОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ*

Введение. Рассматриваются разностные схемы для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) &= 0, \quad \gamma \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma > 1$ – заданный параметр. При тестировании и апостериорном анализе погрешности часто используется метод пробных функций (см., например, [1, с. 143]), состоящий в том, что по заданному решению (пробная или тестовая функция) находится правая часть уравнения (1) и полученная дифференциальная задача решается разностным методом. В результате мы получаем возможность сопоставить решения дифференциальной и разностной задач и выяснить, в частности, порядок точности разностной схемы при измельчении сетки. Для задач с нелокальными граничными условиями метод пробных функций использовался, например, в работе [2], где рассматривались схемы повышенного порядка точности.

В настоящей работе предложено и изучено два типа тестовых функций, характерных для задачи (1).

При решении (1) с $f(x,t) = 0$ методом разделения переменных возникает задача на собственные значения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad X(0) = 0, \quad \gamma X'(0) = X'(1). \quad (2)$$

Спектр задачи (2) зависит от параметра γ и определяется формулами

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \psi^2, \quad \psi = \arccos \gamma, \\ \lambda_{2k-1} &= (2\pi k - \psi)^2, \quad \lambda_{2k} = (2\pi k + \psi)^2, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00728)

Известно, что если $1 < \gamma < \gamma_+ = \text{ch}(2\pi)$, то существует единственное собственное значение $\lambda_0 = \psi^2$, расположенное в левой полуплоскости. В этом случае гармоника $X^{(0)}(x)$, отвечающая собственному значению λ_0 , неограниченно возрастает со временем.

Аппроксимируем задачу (1) разностной схемой с весами

$$\begin{aligned} y_{t,i}^n - y_{\bar{x},i}^{(\sigma)} &= 0, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad n=0, 1, \dots, \\ y_i^0 &= \varphi(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad \frac{h}{2} y_{t,N}^n + y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} - \mathcal{Y}_{x,0}^{(\sigma)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначено $\omega_h = \{x_i = ih\}_{i=0}^N$, $\omega_\tau = \{t_n = n\tau\}_{n=0}^K$, $y_i^n = y(x_i, t_n)$,

$$y_i^{(\sigma)} = \sigma y_i^{n+1} + (1-\sigma)y_i^n, \quad y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau},$$

$$y_{\bar{x},i}^n = \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h}, \quad y_{x,i}^n = \frac{y_{i+1}^n - y_i^n}{h}.$$

Обзор работ по разностным схемам для задачи (1) имеется в [3], [4], [5]. Основной оператор A разностной схемы (3) определяется как

$$\begin{aligned} (Ay)_i &= -y_{\bar{x},i}, \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad y_0 = 0, \\ (Ay)_N &= \frac{2}{h}(y_{\bar{x},N} - \mathcal{Y}_{x,0}). \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим $\alpha = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$, $a = \text{ch}(h\alpha)$, $b = \text{sh}(h\alpha)$, $\psi = i\alpha$, откуда $\gamma = \text{ch}(\alpha)$. Задача на собственные значения для оператора (4)

$$\begin{aligned} \mu_{\bar{x},j} + \lambda \mu_j &= 0, \quad j=1, 2, \dots, N-1, \quad \mu_0 = 0, \\ \frac{2}{h}(\lambda \mu_{x,0} - \mu_{\bar{x},N}) + \lambda \mu_N &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

при $\gamma > 1$ имеет решение (см. [3, с. 206])

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{4}{h^2} \text{sh}^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right), \quad \mu^{(0)}(x_j) = \text{sh}(\alpha x_j), \\ \lambda_{2k-1} &= \frac{4}{h^2} \sin^2((\pi k - 0.5\psi)h), \quad \mu^{(2k-1)}(x_j) = \sin((2\pi k - \psi)x_j), \\ \lambda_{2k} &= \frac{4}{h^2} \sin^2((\pi k + 0.5\psi)h), \quad \mu^{(2k)}(x_j) = \sin((2\pi k + \psi)x_j). \end{aligned} \quad (6)$$

Потребуется следующие выражения для действительных и мнимых частей собственных значений и их модулей:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_{2k-1} &= \operatorname{Re} \lambda_{2k} = 2h^{-2}(1 - a \cos(2\pi kh)), \\ \operatorname{Im} \lambda_{2k-1} &= -\operatorname{Im} \lambda_{2k} = -2h^{-2}b \sin^2(2\pi kh), \\ |\lambda_{2k-1}| &= |\lambda_{2k}| = 2h^{-2}(a - \cos(2\pi kh)). \end{aligned} \quad (7)$$

В дальнейшем предполагаем, что

$$1 < \gamma < \gamma_+ = \operatorname{ch} \left(h^{-1} \ln \left(\frac{1 + \sin(2\pi h)}{\cos(2\pi h)} \right) \right). \quad (8)$$

При условии (8) существует только одно собственное значение разностной задачи (5), расположенное в левой полуплоскости (см. [3, с. 213]). Обозначим

$$\alpha_+ = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{1 + \sin(2\pi h)}{\cos(2\pi h)} \right) = 2\pi + \frac{4\pi^3}{3} h^2 + O(h^4).$$

Если выполнено условие (8), то $1 < \alpha < \alpha_+$ и $1 < a < a_+ = \cos^{-1}(2\pi h)$.

1.1. Тестовая функция $V(x, t)$. В качестве тестового решения возьмем функцию

$$V(x, t) = \operatorname{sh}(\alpha x) e^{\alpha^2 t}, \quad \alpha = \ln \left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right), \quad (9)$$

которая является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad V(x, 0) = \operatorname{sh}(\alpha x), \\ V(0, t) &= 0, \quad \gamma \frac{\partial V}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(1, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Основным свойством данной тестовой функции является положительность и монотонное возрастание как функции x при каждом фиксированном t . Справедливы неравенства

$$0 = V(0, t) \leq V(x, t) \leq V(1, t) = \operatorname{sh}(\alpha) e^{\alpha^2 t} = \sqrt{\gamma^2 - 1} e^{\alpha^2 t}.$$

Аппроксимируем задачу (10) разностной схемой (3) с начальными данными $\varphi(x_i) = \operatorname{sh}(\alpha x_i)$. Решением разностной задачи является сеточная функция

$$y_i^n = \operatorname{sh}(\alpha x_i) q^n, \quad x_i = ih, \quad t_n = n\tau, \quad (11)$$

где

$$q = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_0^{(h)}}{1 + \sigma\tau\lambda_0^{(h)}}, \quad \lambda_0^{(h)} = -\frac{4\text{sh}^2(0.5\alpha h)}{h^2}, \quad \alpha = \ln\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right). \quad (12)$$

Сопоставим полученное разностное решение с решением дифференциальной задачи (10). Обозначим

$$V(x, t) = v(x)c(t), \quad v(x) = \text{sh}(\alpha x), \quad c(t) = e^{\alpha^2 t},$$

$$Y(x_i, t_n) = y(x_i)q^n, \quad y(x_i) = \text{sh}(\alpha x_i), \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_0^{(h)}}{1 + \sigma\tau\lambda_0^{(h)}}.$$

Прежде всего, замечаем, что $v(x_i) = y(x_i)$, то есть пространственные составляющие дифференциального и разностного решений совпадают. Существенное отличие, зависящее от параметров схемы, имеется в поведении временных составляющих.

1.2. Погрешность на функции $V(x, t)$. Нетрудно видеть, что при измельчении сетки решение $Y(x_i, t_n) = \text{sh}(\alpha x_i)q^n$ разностной задачи сходится к решению $V(x, t) = \text{sh}(\alpha x)e^{\alpha^2 t}$ исходной дифференциальной задачи. Действительно, зафиксируем точки $x = x_i = ih$ и $t = t_n = n\tau$ и устремим шаги h и τ к нулю. Тогда сразу получим, что $\text{sh}(\alpha x) = \text{sh}(\alpha x_i)$, и остается доказать, что $q^n = q^{t/\tau} \rightarrow e^{\alpha^2 t}$. Запишем q в виде

$$q = 1 + \frac{4\tau(\text{sh}^2(0.5\alpha h)/h^2)}{1 - 4\sigma\tau(\text{sh}^2(0.5\alpha h)/h^2)} \quad (13)$$

и предположим, что σ не зависит от τ и h . Тогда при фиксированном τ получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} q^{t/\tau} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{4\tau(\text{sh}^2(0.5\alpha h)/h^2)}{1 - 4\sigma\tau(\text{sh}^2(0.5\alpha h)/h^2)} \right)^{t/\tau} = \left(1 + \frac{\tau\alpha^2}{1 - \sigma\tau\alpha^2} \right)^{t/\tau}.$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\tau\alpha^2}{1 - \sigma\tau\alpha^2} \right)^{t/\tau} = e^{\alpha^2 t},$$

что и требовалось. Более детальные выкладки, основанные на разложении в ряд по степеням τ и h , приводят к равенству

$$q^{t/\tau} = e^{\alpha^2 t} + \tau \left(\sigma - \left(\frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \right) \right) e^{\alpha^2 t} \alpha^4 t + O(\tau^2 + h^4),$$

откуда получим

$$Y(x_i, t_n) - V(x_i, t_n) = \tau(\sigma - \sigma_*) \operatorname{sh}(\alpha x_i) e^{\alpha^2 t_n} \alpha^4 t_n + O(\tau^2 + h^4), \quad \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}.$$

Погрешность разностной схемы на функции $V(x, t)$ определяется как сеточная функция

$$Z(x_i, t_n) = Y(x_i, t_n) - V(x_i, t_n) = \operatorname{sh}(\alpha x_i) (q^n - e^{\alpha^2 t_n}).$$

Здесь

$$q = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_0^{(h)}}{1 + \sigma\tau\lambda_0^{(h)}} = 1 + \frac{4\kappa \operatorname{sh}^2(0.5\alpha h)}{1 - 4\sigma\kappa \operatorname{sh}^2(0.5\alpha h)}, \quad \kappa = \frac{\tau}{h^2}.$$

Потребуем, чтобы

$$1 - 4\sigma\kappa \operatorname{sh}^2(0.5\alpha h) > 0, \quad (14)$$

тогда $q > 1$. При неположительных σ условие (14) выполнено. При $\sigma > 0$ и фиксированных $\kappa > 0$ это условие выполняется при всех достаточно малых h . Поскольку $|Z(x_i, t_n)| = \operatorname{sh}(\alpha x_i) |q^n - e^{\alpha^2 t_n}|$ является монотонно возрастающей функцией x при каждом t и $\max_{0 \leq i \leq N} |Z(x_i, t_n)| = \operatorname{sh}(\alpha) |q^n - e^{\alpha^2 t_n}|$, достаточно рассмотреть временную составляющую погрешности, то есть функцию $z_n = q^n - e^{\alpha^2 t_n}$. Обозначая $t_n = t$, получаем $n = t/\tau$ и, тем самым, приходим к функции $z(t) = q^{t/\tau} - e^{\alpha^2 t}$, которую будем рассматривать как функцию непрерывного аргумента $t \geq 0$. Функция $z(t)$ зависит параметрически от σ , α , τ и h . Погрешность $z(t) \equiv 0$, если $q = e^{\alpha^2 \tau}$, то есть

$$\frac{1 + 4(1 - \sigma)\kappa \operatorname{sh}^2(0.5\alpha h)}{1 - 4\sigma\kappa \operatorname{sh}^2(0.5\alpha h)} = e^{\alpha^2 \kappa h^2}.$$

Разрешая это уравнение относительно σ , получим

$$\sigma = \sigma_1(\alpha, \kappa, h) = \frac{1}{4\kappa \operatorname{sh}^2(0.5\alpha h)} - \frac{1}{e^{\alpha^2 \kappa h^2} - 1}. \quad (15)$$

Заметим, что при $\sigma = \sigma_1(\alpha, \kappa, h)$ условие (14) выполнено. Если $\sigma < \sigma_1$, то $z(t, \alpha, \sigma, \kappa, h) < 0$, то есть разностное решение приближается снизу к решению дифференциальной задачи при измельчении сетки. Если же $\sigma > \sigma_1$, то $z(t, \alpha, \sigma, \kappa, h) > 0$ (приближение сверху).

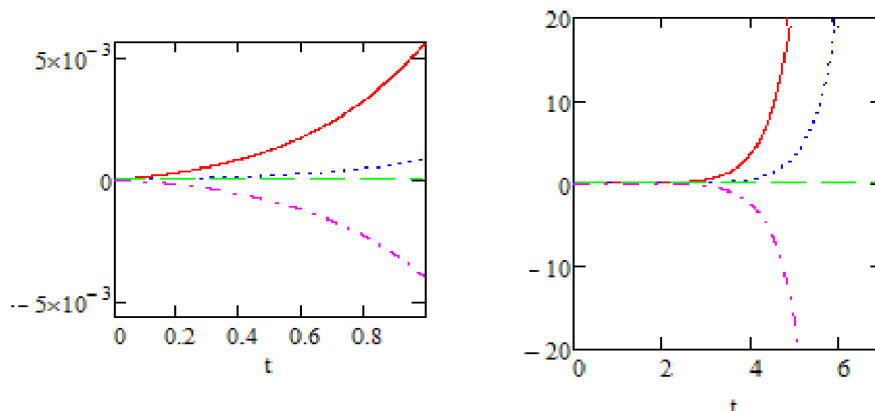


Рис. 1. Зависимость погрешности $z(t, \alpha, \sigma, \kappa, h)$ от времени.

На рис. 1 изображены графики зависимости от времени погрешности $z(t, \alpha, \sigma, \kappa, h)$ при $\alpha = 1.3$, $\kappa = 1$, $h = 1/40$ и различных σ , а именно (сверху вниз), $\sigma = 1$, $\sigma = 0.5$, $\sigma = \sigma_1 = 0.417$ и $\sigma = 0$.

1.3. Численные иллюстрации. В следующих вариантах приводятся значения функции $Z(t)$, вычисленной по формуле

$$Z(t) = \text{sh}(\alpha)(q^{1/\tau} - e^{\alpha^2 t}), \quad \alpha = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}) \quad (16)$$

для различных моментов времени t и некоторых значений весового множителя σ . Величина $Z(t)$ представляет собой максимальную погрешность разностного решения на функции $V(x, t) = \text{sh}(\alpha x)e^{\alpha^2 t}$. Отметим, что погрешность $Z(t)$ определяется величиной q (см. (13)), зависящей от параметров α , κ , h и σ . Приведем значения q для рассмотренных ниже вариантов.

$\gamma = 2$		$\gamma = 100$	
σ	q	σ	q
0	1.00108408	0	1.017570
$\sigma_1 = 0.417$	1.00108457	$\sigma_1 = 0.415$	1.017700
0.5	1.00108467	0.5	1.017726
1	1.00108526	1	1.017884

Важной характеристикой нестационарных расчетов, проводимых с большими числами, является максимально достижимый момент времени T_∞ . Момент T_∞ зависит от параметров задачи, но определяется в основном величиной машинной бесконечности M_∞ , допускаемой данным компьютером. Проведение расчетов оказывается возможным только до того момента времени T_∞ , пока максимальная вычисляемая величина не превосходит M_∞ . В рассмотренных ниже примерах такой максимально вычисляемой величиной является значение $Y(1,t) = \text{sh}(\alpha)q^{t/(kh^2)}$, поэтому максимально достижимый момент времени находится из уравнения $\text{sh}(\alpha)q^{T_\infty/(kh^2)} = M_\infty$ и равен

$$T_\infty = T_\infty(\alpha, \sigma, \kappa, h, m) = \frac{\kappa h^2 \ln(10^m \text{sh}^{-1}(\alpha))}{\ln(q(\alpha, \sigma, \kappa, h))}.$$

Здесь $10^m = M_\infty$ – машинная бесконечность.

Следующая таблица содержит значения T_∞ для рассмотренных ниже вариантов 1 и 2. Везде $\kappa = 1$, $h = 1/40$, $m = 300$.

$\gamma = 2$		$\gamma = 100$	
σ	T_∞	σ	T_∞
0	398.147	0	24.621
$\sigma_1 = 0.417$	397.968	$\sigma_1 = 0.415$	24.443
0.5	397.932	0.5	24.407
1	397.716	1	24.193

Таким образом, в случае $\gamma = 2$ расчеты по схеме (3) можно проводить до $t \approx 400$, а в случае $\gamma = 100$ только до $t \approx 25$.

Вариант 1. Задавались параметры $\gamma = 2$, $\kappa = 1$, $N = 40$ и по ним вычислялись значения $\alpha = 1.317$, $\tau = 0.000625$. Для трех моментов времени $t = 1$, $t = 10$ и $t = 100$ по формуле (16) находилась максимальная погрешность. Результаты вычислений при различных σ содержатся в приведенной ниже таблице.

σ	0	$\sigma_1 = 0.417$	0.5	1
Z(1)	-0.007679	$-1.555 \cdot 10^{-12}$	0.001539	0.011
Z(10)	$-4.601 \cdot 10^5$	$-9.351 \cdot 10^{-5}$	$9.262 \cdot 10^4$	$6.511 \cdot 10^5$
Z(100)	$-2.744 \cdot 10^{74}$	$-5.776 \cdot 10^{64}$	$5.761 \cdot 10^{73}$	$4.228 \cdot 10^{74}$

Вариант 2. То же, что и в предыдущем варианте, но $\gamma = 100$ ($\alpha = 5.298$). В случае $t = 25$, $\sigma = 1$ произошло переполнение при вычислении разностного решения. Провести расчеты при $t \geq 26$ оказалось невозможным из-за переполнений.

σ	0	$\sigma_1 = 0.415$	0.5	1
Z(1)	$-2.856 \cdot 10^{13}$	10.888	$6.632 \cdot 10^{12}$	$5.248 \cdot 10^{13}$
Z(10)	$-7.138 \cdot 10^{123}$	$5.445 \cdot 10^{111}$	$4.263 \cdot 10^{123}$	$1.426 \cdot 10^{125}$
Z(25)	$-6.082 \cdot 10^{306}$	$1.086 \cdot 10^{295}$	$1.128 \cdot 10^{307}$	–

Данные, приведенные в таблицах вариантов 1 и 2, получены в результате вычислений по явной формуле (16). В идеале те же самые значения должны получиться и в том случае, когда приближенное решение находится с помощью разностной схемы (3). Однако на самом деле так получается далеко не всегда. Прежде всего, необходимо выполнение условия устойчивости разностной схемы. Например, расчеты по явной схеме, которая устойчива при условии $\kappa \leq 0.5$, не удастся провести в случае $\kappa = 1$ из-за переполнений, возникающих в процессе счета. Однако и при соблюдении условий устойчивости погрешности нарастают настолько быстро, что приходится прекращать счет гораздо раньше теоретического предельного момента T_∞ . Рассмотрим, например, абсолютно устойчивую чисто неявную ($\sigma = 1$) разностную схему. Обозначая $\delta y(t) = \max_{1 \leq i \leq N} (y(x_i, t) - Y(x_i, t))$, сопоставим решение $y(x_i, t)$, полученное по разностной схеме, с аналитическим решением $Y(x_i, t)$. Результаты приведены в таблице ниже.

$$\gamma = 2, \quad \sigma = 1, \quad \kappa = 1, \quad h = 1/40$$

t	1	10	15	25
$\delta y(t)$	$5.684 \cdot 10^{-13}$	$3.439 \cdot 10^{-5}$	0.302	$1.739 \cdot 10^7$

В данном случае $T_\infty \approx 400$, однако погрешность сильно нарастает уже после $t = 15$. Гораздо быстрее эффект накопления погрешности проявляется в случае $\gamma = 100$, когда $T_\infty \approx 24$.

$$\gamma = 100, \quad \sigma = 1, \quad \kappa = 1, \quad h = 1/40$$

t	1	1.1	2	3
$\delta y(t)$	$-9.766 \cdot 10^{-4}$	-0.021	$-3.557 \cdot 10^9$	$-1.195 \cdot 10^{22}$

Отмеченное несовпадение расчетных и теоретических данных можно объяснить тем, что внесенная в начальный момент незначительная погрешность испытывает со временем существенный рост вследствие того, что $q > 1$. Оценим такую погрешность.

Обозначим через $Y_n = (Y(x_1, t_n) Y(x_2, t_n) \cdots Y(x_N, t_n))^T$ вектор с компонентами $Y(x_i, t_n) = \text{sh}(\alpha x_i) q^n$. Справедливо равенство $Y_{n+1} = q Y_n$. Пусть $y_n = (y(x_1, t_n) y(x_2, t_n) \cdots y(x_N, t_n))^T$ — решение разностной задачи (3) в момент $t = t_n$. Если в разностной схеме в качестве начальных данных задать гармонику $y(x_i, 0) = \text{sh}(\alpha x_i)$, то получим, что $y_{n+1} = q y_n$. Таким образом, погрешность $z_n = y_n - Y_n$ удовлетворяет уравнению $z_{n+1} = q z_n$ и, следовательно, $z_n = q^n z_0$, причем $\|z_n\| = |q|^n \|z_0\|$. Предположим теперь, что $\|z_0\|$ равна не нулю, а некоторому малому числу ε и найдем такое значение $t = t_\infty$, при котором $\|z_n\|$ равна заданному числу $r > 0$. Учитывая, что $n = t / (\kappa h^2)$, приходим к уравнению $q^{t / (\kappa h^2)} \varepsilon = r$, решением которого является

$$t_\infty = \frac{\kappa h^2}{\ln q} \ln \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) = \frac{\ln(r / \varepsilon)}{\ln(10^{300} / \text{sh } \alpha)} T_\infty.$$

В частности, полагая $r = 1$ и $\varepsilon = 10^{-12}$, получим $t_\infty \approx 27.631 \ln^{-1}(10^{300} / \text{sh } \alpha) T_\infty$. В этом предположении получаем $t_\infty \approx 15.92$ для варианта 1 ($\gamma = 2, \sigma = 1$) и $t_\infty \approx 0.97$ для варианта 2 ($\gamma = 100, \sigma = 1$).

2.1. Тестовая функция $W(x, t)$. Выпишем следующую за λ_0 пару комплексно сопряженных собственных значений λ_1 и λ_2 задачи (1) и соответствующие собственные функции:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (2\pi - \psi)^2, & X^{(1)}(x) &= \sin((2\pi - \psi)x), \\ \lambda_2 &= (2\pi + \psi)^2, & X^{(2)}(x) &= \sin((2\pi + \psi)x), \\ \psi &= i\alpha, & \alpha &= \text{arcch } \gamma = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}). \end{aligned}$$

Разделяя действительные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (4\pi^2 - \alpha^2) - 4\pi\alpha i, & X^{(1)}(x) &= \sin(2\pi x) \text{ch}(\alpha x) - i \cos(2\pi x) \text{sh}(\alpha x), \\ \lambda_2 &= (4\pi^2 - \alpha^2) + 4\pi\alpha i, & X^{(2)}(x) &= \sin(2\pi x) \text{ch}(\alpha x) + i \cos(2\pi x) \text{sh}(\alpha x). \end{aligned}$$

Определим функции

$$\begin{aligned} V_1(x,t) &= e^{-\lambda_1 t} X^{(1)}(x), \quad V_2(x,t) = e^{-\lambda_2 t} X^{(2)}(x), \\ W(x,t) &= 0.5(V_1(x,t) + V_2(x,t)) = \operatorname{Re}(e^{-\lambda_1 t} X^{(1)}(x)). \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} W(x,t) &= e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t} \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(4\pi\alpha t) + \\ &+ e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t} \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(4\pi\alpha t) \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем, что функция $W(x,t)$ является решением задачи (1) с начальными данными $\varphi(x) = W(x,0) = \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x)$. Действительно,

$$W(0,t) = \operatorname{Re}(e^{-\lambda_1 t} X^{(1)}(0)) = 0,$$

так что условие на левой границе выполнено. Далее, из тождества

$$\frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = \operatorname{Re}\left(e^{-\lambda_1 t} \frac{dX^{(1)}(x)}{dx}\right)$$

следует, что

$$\gamma \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial W(1,t)}{\partial x} = \operatorname{Re}\left(e^{-\lambda_1 t} \left(\gamma \frac{dX^{(1)}(0)}{dx} - \frac{dX^{(1)}(1)}{dx}\right)\right).$$

Поскольку собственная функция $X^{(1)}(x)$ удовлетворяет нелокальному граничному условию, отсюда получим, что такому же условию при каждом t удовлетворяет и тестовая функция $W(x,t)$. Наконец, выполнено и основное уравнение

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} = -\operatorname{Re}\left(e^{-\lambda_1 t} \left(\gamma \frac{d^2 X^{(1)}(x)}{dx^2} + \lambda_1 X^{(1)}(x)\right)\right) = 0.$$

Функция $W(x,t)$ представлена в виде произведения

$$\begin{aligned} W(x,t,\alpha) &= r(t,\alpha)w(x,t,\alpha), \quad r(t,\alpha) = e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t}, \\ w(x,t,\alpha) &= \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(4\pi\alpha t) + \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(4\pi\alpha t). \end{aligned} \quad (19)$$

Первый множитель $r(t,\alpha)$ является положительным и свидетельствует о высокой скорости убывания $W(x,t)$ со временем. Второй множитель $w(x,t,\alpha)$ характеризует форму кривой $W(x,t)$ как функции $x \in [0, 1]$ при каждом фиксированном значении t . Этот множитель определяет, в частности, максимумы и минимумы функции $W(x,t)$. Графики функции $w(x,t,\alpha)$ как

функции x приведены на рис. 2, где положено $t = 1$, $\alpha = 1.5$ (штриховая линия) и $\alpha = 3$ (пунктирная линия). Отметим основные свойства функции $w(x, t, \alpha)$. При каждом t выполнены граничные условия

$$w(0, t, \alpha) = 0, \quad \gamma \frac{\partial w(0, t, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial w(1, t, \alpha)}{\partial x}.$$

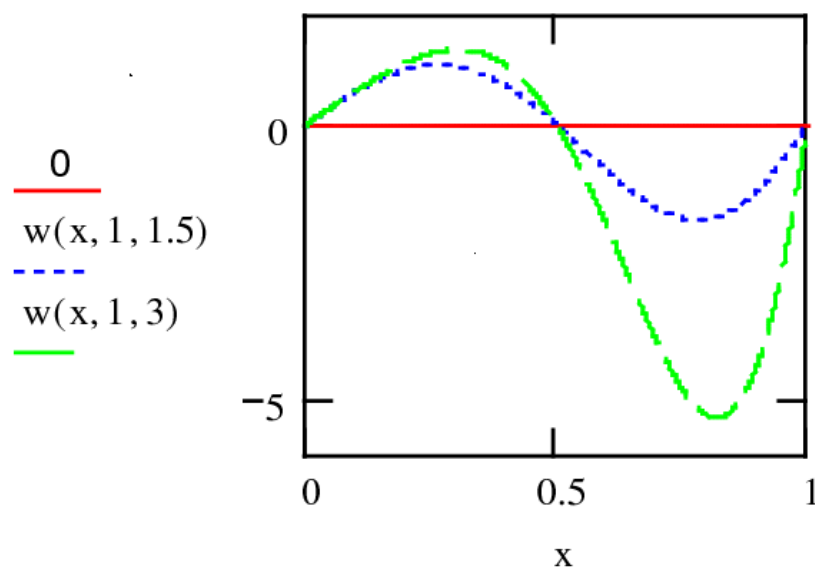


Рис. 2. Функция $w(x, t, \alpha)$ при $t = 1$, $\alpha = 1.5$ и $\alpha = 3$.

При этом $w(1, t, \alpha) = \sqrt{\gamma^2 - 1} \sin(4\pi\alpha t)$. Представим функцию $w(x, t, \alpha)$ в виде

$$w(x, t, \alpha) = r(x, \alpha) \sin(4\pi\alpha t + \varphi(x, \alpha)),$$

$$r(x, \alpha) = \sqrt{\text{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)}, \quad (20)$$

где

$$\sin \varphi(x, \alpha) = \frac{\sin(2\pi x) \text{ch}(\alpha x)}{r(x, \alpha)}, \quad \cos \varphi(x, \alpha) = \frac{\cos(2\pi x) \text{sh}(\alpha x)}{r(x, \alpha)}.$$

Из этой записи следует, что при фиксированном x функция $w(x, t, \alpha)$ может принимать в зависимости от t любое значение из сегмента $-r(x, \alpha) \leq w(x, t, \alpha) \leq r(x, \alpha)$, в том числе и нулевое значение.

Так, в примерах, приведенных на рис. 2, где $t = 1$, $\alpha = 1.5$ и $\alpha = 3$, имеем

$$\sin(4\pi\alpha t + \varphi(x, \alpha)) = \sin(4\pi\alpha + \varphi(x, \alpha)) = \sin(\varphi(x, \alpha)) = \frac{\sin(2\pi x) \text{ch}(\alpha x)}{r(x, \alpha)},$$

следовательно, $w(x, t, \alpha) = 0$ в тех случаях, когда $x = 0.5$, или $x = 1$. Максимально достижимым является значение

$$\max_{t \geq 0, 0 \leq x \leq 1} |w(x, t, \alpha)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \sqrt{\text{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)}.$$

Для функции $r(x, \alpha) = \sqrt{\text{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)}$ имеем $r(0, \alpha) = 0$, $r(1, \alpha) = \text{sh} \alpha = \sqrt{\gamma^2 - 1}$ и $r(x, \alpha) > 0$, если $0 < x \leq 1$. Далее, неравенство

$$\sqrt{\text{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)} \leq \sqrt{\text{sh}^2(\alpha) + 1} = \text{ch}(\alpha) = \gamma \quad (21)$$

приводит к оценке $\max_{t \geq 0, 0 \leq x \leq 1} |w(x, t, \alpha)| \leq \gamma$. Заметим, что оценка (21), хотя и не является точной, но близка к ней. Об этом свидетельствуют следующие вычисления, проведенные с различными допустимыми γ , $\alpha = \ln(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})$ при шаге $h = 1/40$ по переменной x .

γ	1	40.114	79.228	118.343
$\max_{0 \leq x \leq 1} r(x, \alpha)$	1	40.102	79.222	118.338

γ	157.457	196.571	235.685	274.799
$\max_{0 \leq x \leq 1} r(x, \alpha)$	157.453	196.568	235.683	274.797

2.2. Сеточная тестовая функция $W_h(x, t)$. Обозначим через $W_h(x, t)$ сеточную функцию, являющуюся решением разностной задачи (3) с начальным условием

$$\varphi(x_i) = W(x_i, 0) = \sin(2\pi x_i) \text{ch}(\alpha x_i).$$

Построим в явном виде выражение для $W_h(x, t)$. Рассмотрим функции

$$V_{1,h}(x_j, t_n) = q_1^n \mu^{(1)}(x_j), \quad V_{2,h}(x_j, t_n) = q_2^n \mu^{(2)}(x_j),$$

где

$$q_1 = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_1^{(h)}}{1 + \sigma\tau\lambda_1^{(h)}}, \quad q_2 = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_2^{(h)}}{1 + \sigma\tau\lambda_2^{(h)}},$$

и определим

$$W_h(x_j, t_n) = \text{Re}(q_1^n \mu^{(1)}(x_j)) = 0.5(V_{1,h}(x_j, t_n) + V_{2,h}(x_j, t_n)). \quad (22)$$

Покажем, что функция (22) является решением задачи (3) с начальным условием $\varphi(x_i) = W(x_i, 0)$. Начальное условие выполнено, поскольку из (22) сле-

дует, что $W_h(x_j, 0) = \operatorname{Re}(\mu^{(1)}(x_j)) = W(x_j, 0)$. Из равенства $\mu^{(1)}(0) = 0$ следует, что выполнено и граничное условие $W_h(0, t_n) = 0$. Проверим выполнение не-локального граничного условия. Из определения (22) имеем

$$\frac{W_h(x_j, t_{n+1}) - W_h(x_j, t_n)}{\tau} = \operatorname{Re}\left(q_1^n \frac{q_1 - 1}{\tau} \mu^{(1)}(x_j)\right),$$

$$\left(W_h(x_j, t_n)\right)_{\bar{x}} = \operatorname{Re}\left(q_1^n \mu_{\bar{x}, j}^{(1)}(x_j)\right), \quad \left(W_h(x_j, t_n)\right)_x = \operatorname{Re}\left(q_1^n \mu_{x, j}^{(1)}(x_j)\right).$$

Поэтому

$$\left(\frac{-\gamma(W_h(x, t_n))_{x,0} + (W_h(x, t_n))_{\bar{x},N}}{0.5h}\right)^{(\sigma)} = \operatorname{Re}\left(q_1^n \frac{-\gamma\mu_{x,0}^{(1)} + \mu_{\bar{x},N}^{(1)}}{0.5h}\right) = 0.$$

Аналогично проверяется выполнение основного разностного уравнения (3). Получим явное выражение для функции (22). Для этого представим множитель q_1 в виде

$$q_1 = \rho e^{i\phi}, \quad \rho = |q_1|, \quad \cos\phi = \frac{\operatorname{Re} q_1}{|q_1|}, \quad \sin\phi = \frac{\operatorname{Im} q_1}{|q_1|}. \quad (23)$$

Кроме того заметим, что

$$\mu^{(1)}(x_j) = \sin(2\pi x_j) \operatorname{ch}(\alpha x_j) - i \cos(2\pi x_j) \operatorname{sh}(\alpha x_j).$$

Отсюда следует, что в подробной записи функция (22) имеет вид

$$W_h(x_j, t_n) = \rho^n \left[\sin(2\pi x_j) \operatorname{ch}(\alpha x_j) \cos(n\phi) + \cos(2\pi x_j) \operatorname{sh}(\alpha x_j) \sin(n\phi) \right]. \quad (24)$$

Тем самым, функция $W_h(x_j, t_n)$ представлена в виде произведения

$$W_h(x_j, t_n) = r_h(t_n) w_h(x_j, t_n), \quad r_h(t_n) = |q_1|^n, \quad (25)$$

$$w_h(x_j, t_n) = \sin(2\pi x_j) \operatorname{ch}(\alpha x_j) \cos(n\phi) + \cos(2\pi x_j) \operatorname{sh}(\alpha x_j) \sin(n\phi).$$

Здесь

$$q_1 = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_1^{(h)}}{1 + \sigma\tau\lambda_1^{(h)}},$$

$$\lambda_1^{(h)} = \frac{2(1 - a \cos(2\pi h))}{h^2} - i \frac{2b \sin(2\pi h)}{h^2}, \quad a = \operatorname{ch}(\alpha h), \quad b = \operatorname{sh}(\alpha h)$$

и угол ϕ определен согласно (23). В отличие от $W(x, t, \alpha)$ функция $W_h(x_j, t_n)$ зависит и от параметров сетки: τ , h , n и σ . Полагая $t = t_n = n\tau$,

$\kappa = \tau / h^2$, получим $n = t / (\kappa h^2)$. В качестве независимых параметров будем использовать в дальнейшем параметры t, α, h, κ . Например, вместо $|q_1|^n$ будем записывать, там где это необходимо, $|q_1(\alpha, \kappa, h, \sigma)|^{t / (\kappa h^2)}$.

Выпишем решение дифференциальной задачи

$$\begin{aligned} W(x, t, \alpha) &= r(t, \alpha)w(x, t, \alpha), \quad r(t, \alpha) = e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t}, \\ w(x, t, \alpha) &= \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(4\pi\alpha t) + \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(4\pi\alpha t). \end{aligned} \quad (26)$$

Соответствующее решение разностной задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} W_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= r_h(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma), \\ r_h(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= \rho^{t / (\kappa h^2)}(\alpha, \kappa, h, \sigma), \\ w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(n\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)) + \\ &+ \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(n\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(q_1)}{\operatorname{Re}(q_1)}\right), \quad (28)$$

$$\operatorname{Re}(q_1) = \frac{1 + 2(2\sigma - 1)(1 - \operatorname{ch}(h\alpha) \cos(2\pi h))\kappa + 4\sigma(\sigma - 1)(\operatorname{ch}(h\alpha) - \cos(2\pi h))^2 \kappa^2}{1 + 4\sigma(1 - \operatorname{ch}(h\alpha) \cos(2\pi h))\kappa + 4\sigma^2(\operatorname{ch}(h\alpha) - \cos(2\pi h))^2 \kappa^2},$$

$$\operatorname{Im}(q_1) = \frac{2 \operatorname{sh}(h\alpha) \sin(2\pi h) \kappa}{1 + 4\sigma(1 - \operatorname{ch}(h\alpha) \cos(2\pi h))\kappa + 4\sigma^2(\operatorname{ch}(h\alpha) - \cos(2\pi h))^2 \kappa^2},$$

$$\begin{aligned} \rho(\alpha, \kappa, h, \sigma) &= |q_1| = \\ &= \left(\frac{1 + 4(\sigma - 1)(1 - a(\alpha h) \cos(2\pi h))\kappa + 4(\sigma - 1)^2 (a(\alpha h) - \cos(2\pi h))^2 \kappa^2}{1 + 4\sigma(1 - a(\alpha h) \cos(2\pi h))\kappa + 4\sigma^2 (a(\alpha h) - \cos(2\pi h))^2 \kappa^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Назовем разность $z(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) = w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) - w(x, t, \alpha)$ пространственной составляющей, а отношение $R = r_h / r$ – временной составляющей погрешности. Ввиду разномасштабности величин оцениваем отдельно пространственную и временную компоненты погрешности. Величина времен-

ной погрешности характеризует точность убывания по времени рассматриваемого решения. Пространственная погрешность характеризует, насколько точно передает разностное решение форму исходной кривой искомого решения (нули, максимумы и минимумы и т. п.).

При вычислении функции $W_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ надо иметь в виду, что функция быстро убывает со временем и, начиная с некоторого момента $t = T_0$, ее значение становится меньше машинного нуля M_0 . Проводить расчеты при $t > T_0$ не имеет смысла. То же самое замечание относится и к исходной тестовой функции $W(x, t, \alpha)$.

Представим $W(x, t, \alpha)$ в виде

$$W(x, t, \alpha) = e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t} w(x, t, \alpha),$$

$$w(x, t, \alpha) = \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(4\pi \alpha t) + \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(4\pi \alpha t)$$

и учтем, что $\max_t |w(x, t, \alpha)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)}$. Максимально допустимый момент времени $t = T_0$ для функции $W(x, t, \alpha)$ определим как корень уравнения $e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t} \max_t |w(1, t, \alpha)| = M_0$. Решая это уравнение, получим

$$T_0 = T_0(\gamma) = \frac{1}{4\pi^2 - \ln^2(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})} \ln\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{M_0}\right).$$

Если $M_0 = 10^{-300}$, то $T_0(2) \approx 18$, $T_0(100) \approx 61$.

2.3. Временная составляющая погрешности. Изучим зависимость от h временной составляющей погрешности

$$R(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) = \frac{r_h(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)}{r(t, \alpha)}.$$

На рис. 3 (левый рисунок) представлены типичные графики зависимости от t функции $R(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ при различных значениях весового множителя σ (снизу вверх $\sigma = 0$, $\sigma = \sigma_* = 0.5 - 1/(12\kappa)$, $\sigma = 0.5$ и $\sigma = 1$). Здесь положено $N = 40$, $\alpha = 1.1$, $\kappa = 1$.

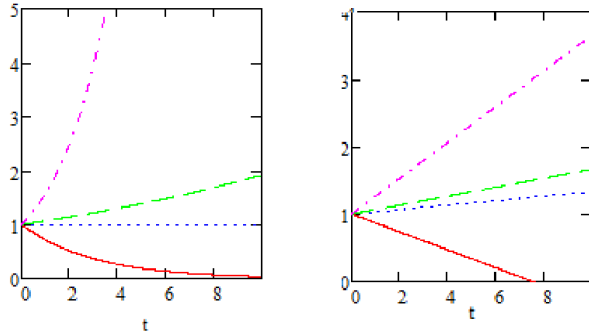


Рис. 3. Функции $R(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ (слева) и $P(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ (справа) при различных σ .

Видно, что отклонение графиков погрешности от идеального значения $R \equiv 1$ существенно увеличивается со временем. Менее всего отклоняется от 1 график погрешности схемы повышенного порядка точности (см. [1], с. 262), когда $\sigma = \sigma_*$. График погрешности явной схемы ($\sigma = 0$) расположен ниже 1. Это означает, что при измельчении сетки решение разностной задачи приближается снизу к решению дифференциальной задачи. Для остальных рассмотренных значений σ имеет место приближение сверху.

Качественно поведение погрешности можно пояснить, рассматривая разложение функции $R(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ по степеням малого параметра h :

$$R(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) = P(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) + O(h^4), \quad (29)$$

где

$$P(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) = 1 + \frac{h^2 t}{12} \left[(4\pi^2 - \alpha^2 + 4\pi\alpha)(4\pi^2 - \alpha^2 - 4\pi\alpha)[6(2\sigma - 1)\kappa + 1] \right]. \quad (30)$$

На рис. 3 (правый рисунок) представлены графики зависимости от t функции $P(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ при тех же параметрах, что и ранее. Отметим, что $P(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ является линейной функцией t и непригодна для приближения $R(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ в случае больших времен.

2.4. Пространственная составляющая погрешности. Рассмотрим пространственную составляющую погрешности

$$z(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) = w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) - w(x, t, \alpha).$$

Графики функций $w(x, t, \alpha)$ (сплошная линия) и $w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ (пунктирная линия) как функций x приведены на рис. 4, где положено $t = 1$, $\alpha = 2$, $\kappa = 1$, $\sigma = 1$. На левом рисунке $h = 1/30$ и на правом – $h = 1/40$.

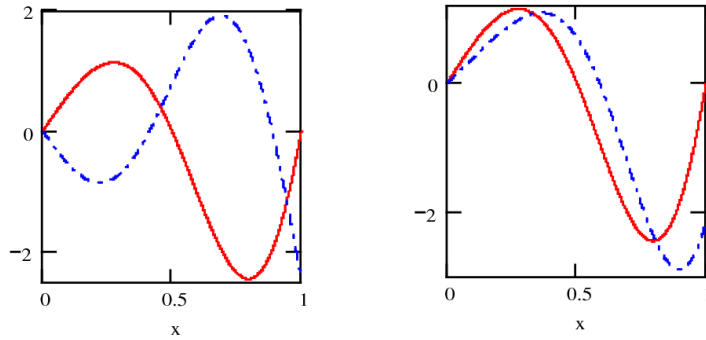


Рис. 4. Функции $w(x, t, \alpha)$ (сплошная линия) и $w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ (пунктир) при $h = 1/30$ и $h = 1/40$.

Для сравнения на рис. 5 приведены графики "полных" тестовых функций

$$W(x, t, \alpha) = e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t} [\sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) \cos(4\pi \alpha t) + \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) \sin(4\pi \alpha t)]$$

и $W_h(x_j, t_n) = \rho^n [\sin(2\pi x_j) \operatorname{ch}(\alpha x_j) \cos(n\phi) + \cos(2\pi x_j) \operatorname{sh}(\alpha x_j) \sin(n\phi)]$ при тех же значениях параметров. Сопоставление рисунков 4 и 5 подтверждает, что функция $w(x, t, \alpha)$ определяет форму кривой $W(x, t, \alpha)$, а функция $e^{-(4\pi^2 - \alpha^2)t}$ – ее масштаб. Аналогичный вывод можно сделать и относительно сеточных функций w_h и W_h .

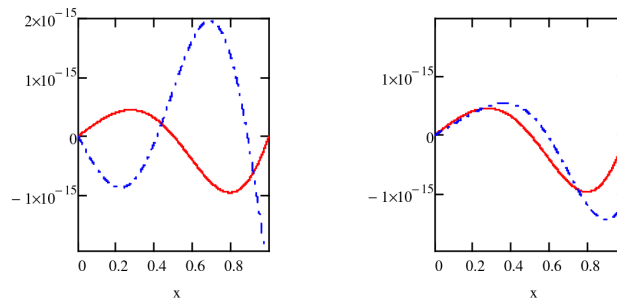


Рис. 5. Функции $W(x, t, \alpha)$ (сплошная линия) и $W_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ (пунктир). Здесь $t = 1$, $\alpha = 2$, $\kappa = 1$, $\sigma = 1$. На левом рисунке $h = 1/30$ и на правом – $h = 1/40$.

Рисунок 4 демонстрирует сильную зависимость формы кривой $w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ от шага сетки h . На левом рисунке 4 графики кривых $w(x, t, \alpha)$ и $w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ находятся как бы в противофазе. Иначе говоря, переход от исходной функции w к сеточной функции w_h вносит существен-

ную фазовую погрешность. Происхождение такой погрешности выясняется при сопоставлении аналитических выражений функций $w(x, t, \alpha)$ и $w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ (см. (26), (27)). Отличие состоит только в том, что функция w_h вместо аргумента $4\pi\alpha t$ содержит аргумент $n\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)$. Фазовая погрешность отсутствует, когда эти величины равны, то есть когда отношение

$$\Phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) = \frac{n(\tau, h, \kappa)\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)}{4\pi\alpha t} = \frac{\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)}{4\pi\alpha \kappa h^2} \quad (31)$$

равно 1. Таким образом, функцию $\Phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)$ можно считать характеристикой фазовой погрешности.

Приведем разложение $\Phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)$ по степеням h при фиксированных остальных аргументах. Из явных представлений для $\operatorname{Re} q_1$ и $\operatorname{Im} q_1$ (см. (28)) следует, что

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) &= \operatorname{arctg}(a/b), \quad a = 2 \operatorname{sh}(h\alpha) \sin(2\pi h) \kappa, \quad b = 1 + \\ &+ 2(2\sigma - 1)(1 - \operatorname{ch}(h\alpha) \cos(2\pi h)) \kappa + 4\sigma(\sigma - 1)(\operatorname{ch}(h\alpha) - \cos(2\pi h))^2 \kappa^2. \end{aligned}$$

Разлагая по степеням h , получим

$$\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) = 4\kappa\alpha\pi h^2 - \frac{2\kappa\alpha\pi(4\pi^2 - \alpha^2)[6(2\sigma - 1)\kappa + 1]}{3} h^4 + O(h^6)$$

и, тем самым,

$$\Phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) = \frac{\phi(\alpha, \kappa, h, \sigma)}{4\pi\alpha \kappa h^2} = 1 - \frac{(4\pi^2 - \alpha^2)[6(2\sigma - 1)\kappa + 1]}{6} h^2 + O(h^4).$$

Возвращаясь к примерам, представленным на рис. 4, когда $\alpha = 2$, $\kappa = 1$, $\sigma = 1$, получим с точностью до $O(h^4)$, что $\Phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) = 0.954$ при $h = 1/30$ и $\Phi(\alpha, \kappa, h, \sigma) = 0.974$ при $h = 1/40$. Для функции $w(x, t, \alpha)$ множитель $\cos(4\pi\alpha)$ равен 1, а для сеточной функции $w_h(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)$ аналогичный множитель $\cos(n\phi)$ равен 0.403 и 0.796 при $h = 1/30$ и $h = 1/40$ соответственно.

2.5. Максимальное значение пространственной погрешности. Из выражений для w и w_h получим

$$\begin{aligned} z(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= w_h - w = \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x) [\cos(n\phi) - \cos(4\pi\alpha)] + \\ &+ \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x) [\sin(n\phi) - \sin(4\pi\alpha)]. \end{aligned}$$

Обозначая временно $a = \sin(2\pi x) \operatorname{ch}(\alpha x)$, $b = \cos(2\pi x) \operatorname{sh}(\alpha x)$, запишем z в виде

$$z = 2 \sin\left(\frac{n\phi - 4\pi\alpha t}{2}\right) \left[-a \sin\left(\frac{n\phi + 4\pi\alpha t}{2}\right) + b \cos\left(\frac{n\phi + 4\pi\alpha t}{2}\right) \right].$$

Применяя к выражению в квадратных скобках элементарное преобразование

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = B / A,$$

получим

$$z = 2\sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(\frac{n\phi - 4\pi\alpha t}{2}\right) \sin(\theta - \psi),$$

где

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \psi = \frac{n\phi + 4\pi\alpha t}{2}.$$

Таким образом, выражение для погрешности z представлено в виде произведения

$$z(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) = z_1(x, \alpha) z_2(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) z_3(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} z_1(x, \alpha) &= 2\sqrt{\operatorname{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)}, \\ z_2(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= \sin\left(\frac{n(t, \kappa, h)\phi(\alpha, \kappa, h, \omega) - 4\pi\alpha t}{2}\right), \\ z_3(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= \sin(\theta(x, \alpha) - \psi(t, \alpha, \kappa, h, \sigma)), \\ \psi(t, \alpha, \kappa, h, \sigma) &= \frac{n(t, \kappa, h)\phi(\alpha, \kappa, h, \omega) + 4\pi\alpha t}{2}, \\ \phi(\alpha, \kappa, h, \omega) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im} q_1}{\operatorname{Re} q_1}\right). \end{aligned}$$

Из представления (32) следует, что

$$|z(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)| \leq z_1(x, \alpha), \quad (33)$$

то есть при любых значениях переменных t , h , κ , σ максимум модуля погрешности z не превосходит $z_1(x, \alpha)$. Далее попытаемся найти или оценить

$$\max_{0 \leq x \leq 1} z_1(x, \alpha).$$

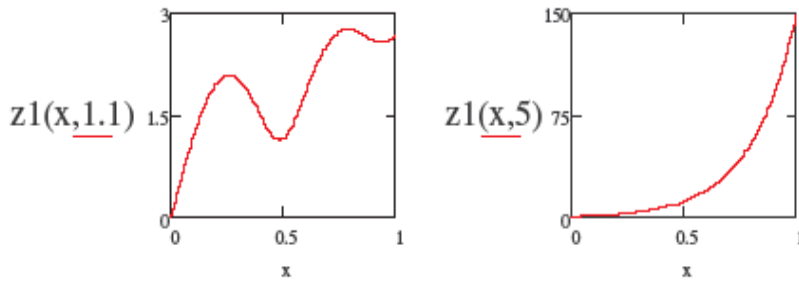


Рис. 6. Функция $z_1(x, \alpha)$ при $\alpha = 1.1$ и $\alpha = 5$.

Графики функции $z_1(x, \alpha)$ при $\alpha = 1.1$ и $\alpha = 5$ представлены на рис. 6. Принципиальным отличием является монотонное возрастание функции $z_1(x, \alpha)$ при достаточно больших α .

Исследуем $z_1(x, \alpha)$ как функцию $x \in [0, 1]$ при фиксированном значении $\alpha > 0$. Сразу видно, что $z_1(x, \alpha)$ обращается в нуль только в точке $x = 0$, в остальных точках $z_1(x, \alpha) > 0$.

Покажем, что $z_1(x, \alpha)$ является монотонно возрастающей функцией x , начиная с некоторого α . Знак производной

$$\frac{dz_1(x, \alpha)}{dx} = \frac{\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) + 2\pi \sin(4\pi x)}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\alpha x) + \sin^2(2\pi x)}}$$

совпадает со знаком функции $p_1(x, \alpha) = \alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) + 2\pi \sin(4\pi x)$. Оказывается, что при малых α функция $p_1(x, \alpha)$ имеет нули на интервале $0 < x < 1$, а начиная с некоторого $\alpha = \alpha_{cr}$ – не имеет. Найдём это критическое значение α . Будем решать уравнение

$$\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) = -2\pi \sin(4\pi x) \tag{34}$$

графически.

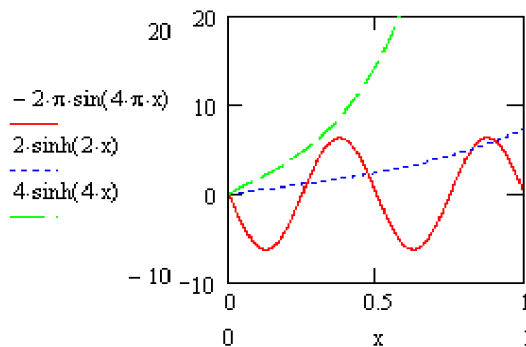


Рис. 7. Графическое решение уравнения (34) в случае $\alpha = 2$ и $\alpha = 4$.

На рис. 7 сплошной линией изображен график функции, расположенной в правой части уравнения (34), пунктирной и штриховой линией – графики функции $\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x)$ при $\alpha = 2$ и $\alpha = 4$ соответственно. Видно, что при $\alpha = 2$ имеется несколько корней уравнения (34), а при $\alpha = 4$ корней нет.

В критической точке (x_{cr}, α_{cr}) имеет место касание кривых $y = \alpha \operatorname{sh}(2\alpha x)$ и $y = -2\pi \sin(4\pi x)$. Поэтому критическая точка находится как корень нелинейной системы двух уравнений

$$\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) = -2\pi \sin(4\pi x), \quad \frac{d(\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x))}{dx} = \frac{d(-2\pi \sin(4\pi x))}{dx},$$

то есть системы

$$\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) = -2\pi \sin(4\pi x), \quad \alpha^2 \operatorname{ch}(2\alpha x) = -4\pi^2 \cos(4\pi x). \quad (35)$$

Отсюда следует, в частности, что $\cos(4\pi x_{cr}) < 0$, $\sin(4\pi x_{cr}) < 0$. Сведем систему (35) к одному нелинейному уравнению.

Замечая, что

$$\frac{\alpha^2}{4\pi^2} = \frac{\sin^2(4\pi x)}{\operatorname{sh}^2(2\alpha x)} = -\frac{\cos(4\pi x)}{\operatorname{ch}(2\alpha x)},$$

приходим к уравнению

$$\frac{1 - \cos^2(4\pi x)}{\operatorname{ch}^2(2\alpha x) - 1} = -\frac{\cos(4\pi x)}{\operatorname{ch}(2\alpha x)}.$$

Разрешая это уравнение относительно $\operatorname{ch}(2\alpha x)$, получаем два решения,

$$\operatorname{ch}(2\alpha x) = \cos(4\pi x), \quad \operatorname{ch}(2\alpha x) = -\frac{1}{\cos(4\pi x)},$$

из которых только второе решение может удовлетворять исходной системе (35). Подставляя второе решение в систему (35), получим эквивалентную систему

$$\alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) = -2\pi \sin(4\pi x), \quad \alpha = -2\pi \cos(4\pi x). \quad (36)$$

Подставляя $\alpha = -2\pi \cos(4\pi x)$ в первое уравнение системы (36), получаем уравнение

$$\sin(4\pi x) + \cos(4\pi x) \operatorname{sh}[4\pi x \cos(4\pi x)] = 0, \quad (37)$$

содержащее только x . После того, как найден корень $x = x_{cr}$ уравнения (37), критическое значение α_{cr} досчитывается по формуле

$$\alpha_{cr} = -2\pi \cos(4\pi x_{cr}). \quad (38)$$

В процессе счета надо следить за тем, чтобы знак $\cos(4\pi x_{cr})$ был отрицательным. Уравнение (37) имеет два корня $x = x_{cr}$ на отрезке $[0, 1]$. Из них следует выбрать то значение, которому соответствует большее значение α_{cr} . Численные расчеты показывают, что $x_{cr} \approx 0.344$, $\alpha_{cr} \approx 2.369$.

Рассмотрим функцию

$$p_1(x, \alpha) = \alpha \operatorname{sh}(2\alpha x) + 2\pi \sin(4\pi x), \quad (39)$$

определяющую знак производной $dz_1(x, \alpha)/dx$. Если $\alpha > \alpha_{cr}$, то $p_1(x, \alpha)$ сохраняет знак на полуинтервале $(0, 1]$. Поскольку $p_1(1, \alpha) = \alpha \operatorname{sh}(2\alpha) > 0$, функция $p_1(x, \alpha)$ положительна.

Таким образом, если $\alpha > \alpha_{cr} \approx 2.369$, то $z_1(x, \alpha)$ возрастает на полуинтервале $0 < x \leq 1$ и достигает своего максимального значения в точке $(1, \alpha)$,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} z_1(x, \alpha) = z_1(1, \alpha) \alpha = 2 \operatorname{sh} \alpha = 2\sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

Отсюда и из неравенства (33) следует, что при $\alpha > \alpha_{cr} \approx 2.369$ справедлива оценка

$$|z(x, t, \alpha, \kappa, h, \sigma)| \leq 2 \operatorname{sh} \alpha = 2\sqrt{\gamma^2 - 1}. \quad (40)$$

Если $\alpha < \alpha_{cr}$, то максимальное значение $z_1(x, \alpha)$ может достигаться как внутри отрезка $[0, 1]$, так и на границе $x = 1$. Численные расчеты показывают, что при $\alpha < 1.15$ максимум достигается внутри отрезка $[0, 1]$, а при $\alpha > 1.15$ – на границе. В следующей таблице приведены значения $M(\alpha) = \max_{0 \leq x \leq 1} z_1(x, \alpha)$ для различных α .

α	γ	$M(\alpha)$	α	γ	$M(\alpha)$
1.10	1.669	2.759	2.0	3.762	7.254
1.11	1.682	2.775	2.1	4.144	8.044
1.12	1.696	2.791	2.2	4.568	8.914
1.13	1.709	2.808	2.3	5.037	9.874
1.14	1.723	2.825	2.369	5.39	10.593
1.15	1.737	2.842	2.4	5.557	10.932

Проведение расчетов и построение графиков реализовано в системе MathCAD (см. [6]).

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. Изд. 3, М.: Наука, 1989.
2. Sun Zhi-Zhong. A high order difference scheme for a nonlocal boundary value problem for the heat equation. Computational methods in applied mathematics. 2001. Vol. 1. № 4. P. 398 – 414.
3. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Разностные схемы для нестационарных нелокальных задач. М.:Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010.
4. Ionkin N.I. A problem for the heat conduction equation with nonclassical (nonlocal) boundary condition (in Russian) Budapest: Numerikus Modzerek, Preprint No. 14, 1979.
5. Gulin A.V. Asymptotic stability of nonlocal difference schemes. Journal of Numerical and Applied Mathematics, N 2 (105), 2011, pp. 34-43.
6. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MathCAD 7.0 в математике, физике и в Internet. М.: Нолидж, 1998, 352 с.