А.В. Гулин, А.Ю. Мокин

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СЕМЕЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ВЕСАМИ [1]

Введение

Для дифференциальной задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<1,\ 0<t\leqslant T,\quad u(x,0)=u_0(x),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\&u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)+\alpha u(1,t),\quad 0<t\leqslant T\end{aligned}\tag{1}$$

расматривается семейство разностных схем с весами

$$\begin{aligned}&\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\sigma\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\sigma)\frac{y_{i+1}^n-2y_i^n+y_{i-1}^n}{h^2},\\&\qquad i=1,2,\ldots,N-1,\quad n=0,1,\ldots,M-1,\\&\frac{y_N^{n+1}-y_N^n}{\tau}=2h^{-1}\sigma\left[\frac{y_1^{n+1}-y_0^{n+1}}{h}-\frac{y_N^{n+1}-y_{N-1}^{n+1}}{h}-\alpha y_N^{n+1}\right]+\\&+2h^{-1}(1-\sigma)\left[\frac{y_1^n-y_0^n}{h}-\frac{y_N^n-y_{N-1}^n}{h}-\alpha y_N^n\right],\ n=0,1,\ldots,M-1,\\&y_0^k=0,\quad k=0,1,\ldots,M,\qquad y_i^0=u_0(x_i),\quad i=1,2,\ldots,N.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь на множестве $\Pi=\{(x,t):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ введена сетка $\omega_{h,\tau}=\omega_h\times\omega_\tau$, где $\omega_h=\{x_i=ih,\ i=1,2,\ldots,N,\ h=1/N\}$, $\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,2,\ldots,M,\ \tau=T/M\}$. Функция $y_i^n=y(x_i,t_n)$ определена на сетке $\omega_{h,\tau}$. Весовой множитель $\sigma\geqslant 0$.

Основная особенность задачи (1) заключается в нелокальном краевом условии, содержащем параметр α. В дальнейшем предполагается, что $\alpha\geqslant 0$.

При $\alpha=0$ задача (1) и соответствующие схемы с весами (2) изучались ранее. В частности, в [1] получены условия устойчивости разностных схем в специально построенной сеточной норме. Там же доказана эквивалентность данной нормы и сеточной среднеквадратической нормы с константами, не зависящими от выбора $h>0$. Показано, что

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 07-01-00674, НШ-2726.2008.1).

достаточное условие устойчивости схемы (2) при $\alpha = 0$ совпадает с необходимым и имеет вид

$$\tau(\sigma - 0.5) \geqslant -h^2/4. \tag{3}$$

В настоящей работе для каждого $\alpha > 0$ построена сеточная норма, в которой разностная схема (2) устойчива, причём для чётных N и $\alpha > 0$, а также для нечётных N и $\alpha \geqslant 2$ необходимое условие устойчивости совпадает с достаточным и имеет хорошо известный вид (см. [2], [3]): $\tau(\sigma - 0.5) \geqslant -1/\lambda_{\max}$. Полученное достаточное условие устойчивости для случая нечётного N и $0 < \alpha < 2$ имеет вид (3) и накладывает несколько более жесткие требования, чем необходимое условие.

При каждом фиксированном $\alpha > 0$ доказана эквивалентность построенной нормы и сеточной среднеквадратической нормы с константами, не зависящими от выбора $h > 0$. Следствием эквивалентности норм является устойчивость разностной схемы (2) в сеточной среднеквадратической норме. **1. Спектральная задача для разностного оператора.** Пусть H – линейное пространство функций, заданных на сетке ω_h, снабжённое скалярным произведением

$$(u, v] = \sum_{j=1}^{N-1} hu(x_j)v(x_j) + 0.5hu(x_N)v(x_N) \tag{4}$$

и сеточной среднеквадратической нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y]}$.

Рассмотрим линейный оператор A, действующий в пространстве H согласно равенствам

$$(Ay)_i = -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$(Ay)_N = \frac{2}{h}\left[\frac{y_N - y_{N-1}}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha y_N\right], \; y_0 = 0.$$

Определим при каждом натуральном n сеточную функцию $y^n(x_i) = y_i^n$,
$i = 1, 2, \ldots, N$. Тогда разностную схему (2) можно представить в операторном виде

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} + \sigma A y^{n+1} + (1 - \sigma) A y^n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, M-1,$$
$$y^0 = u_0(x_i), \; i = 1, 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Как показано в [2], любая двухслойная разностная схема может быть представлена в каноническом виде

$$B\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}+Ay^n=0, \quad n=0,1,\dots,M-1. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что для схемы (5) оператор $B=E+\tau\sigma A$.

Проблема существования, единственности и устойчивости решения задачи (5) может быть изучена, опираясь на спектральные свойства оператора A. В связи с этим рассмотрим задачу на собственные значения

$$Av=\lambda v, \quad v=v(x_i),$$

которая в индексной форме имеет вид

$$v_{i+1}-(2-\lambda h^2)v_i+v_{i-1}=0, \quad i=1,2,\dots,N-1, \tag{7}$$
$$(1+\alpha h-0.5\lambda h^2)v_N-v_{N-1}-v_1=0, \quad v_0=0. \tag{8}$$

Подставляя общее решение сеточного уравнения (7) при $\lambda\neq 0, \lambda\neq 4h^{-2}$ в граничные условия (8) получим, что собственное число и соответствующая собственная функция оператора A имеют вид

$$\lambda=(2-q-1/q)h^{-2}, \quad v(x_k)=q^k-q^{-k},\ k=1,2,\dots,N, \tag{9}$$

где $q\in C$ – корень уравнения

$$(q^N-1)[2q(q^{N-2}+1)-(q+1/q+2\alpha h)(q^N+1)]=0.$$

Данное уравнение эквивалентно совокупности двух

$$q^N=1, \quad 2q(q^{N-2}+1)-(q+1/q+2\alpha h)(q^N+1)=0. \tag{10}$$

В результате решения первого уравнения из совокупности (10) приходим к серии собственных значений и собственных функций

$$\lambda_k^{(1)}=4h^{-2}\sin^2\pi kh, \quad v_k^{(1)}(x)=\sin 2\pi kx,\ x\in\omega_h, \tag{11}$$

где $k=1,2,\dots,0.5(N-1)$ при нечётном N и $k=1,2,\dots,0.5N-1$ при чётном N. В дальнейшем будем использовать обозначение $m=0.5(N-1)$, N – нечетное и $m=0.5N$ в противном случае.

Второе из уравнений (10) в результате замены $q=\exp(iz)$, $z\in C$, $-\pi<\mathrm{Re}(z)\leqslant\pi$ принимает вид

$$\mathrm{ctg}0.5\mathrm{Nz}=\mathrm{N}\alpha^{-1}\sin\mathrm{z}. \tag{12}$$

Очевидно, что если z_0 – решение уравнения (12), то $-z_0$ также является решением, но этим двум решениям, согласно равенствам (9), отвечает одно и то же собственное значение и собственная функция. Поэтому уравнение (12) достаточно рассмотреть для $z:\ \mathrm{Re}(z) \in [0, \pi]$.

Совершив в уравнении (12) замену $z = 2h\phi$, $0 < \phi < 0.5\pi N$, получим

$$\mathrm{ctg}\phi = (\alpha \mathrm{h})^{-1} \sin 2\phi \mathrm{h}, \quad 0 < \phi < 0.5\pi \mathrm{N}. \tag{13}$$

Без доказательства сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *При любых $\alpha > 0$, $h = 1/N > 0$ уравнение (13) имеет m корней $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{m-1}$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\pi k < \phi_k < 0.5\pi + \pi k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

При $N = 2m+1$, $0 < \alpha < 2$ уравнение (13) дополнительно имеет корень $\phi_m \in (\pi m, 0.5\pi + \pi m)$.

Теорема 1 позволяет построить вторую серию собственных значений и собственных функций

$$\lambda_k^{(2)} = 4h^{-2} \sin^2 \phi_k h, \quad v_k^{(2)}(x) = \sin 2\phi_k x,\ x \in \omega_h, \tag{14}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, m$ при $N = 2m+1$, $0 < \alpha < 2$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ при остальных $\alpha > 0$, натуральных N.

Следует подчеркнуть, что величина $\lambda_m^{(2)}$ и функция $v_m^{(2)}(x)$ определены равенствами (14) только для нечётных N при $0 < \alpha < 2$.

В результате замены $z = \pi + 2ih\phi$, $\phi > 0$ в уравнении (12) получим, что оператор A при $N = 2m, \alpha > 0$, а также при $N = 2m+1, \alpha > 2$ обладает собственным значением и собственной функцией

$$\lambda_m^{(2)} = 4h^{(-2)} \cosh^2 \Phi h,\ v_m^{(2)}(x_j) = (-1)^j (\sinh 2\Phi)^{-1} \sinh 2\Phi x_j, \tag{15}$$

где Φ – положительный корень уравнения $\alpha h \coth \phi = \sinh 2\phi h$ при четном N, $\alpha > 0$ и $\alpha h \tanh \phi = \sinh 2\phi h$ при нечётном N, $\alpha > 2$.

Подставляя общее решение сеточного уравнения (7) при $\lambda = 4h^{-2}$ в краевые условия (8) получим, что оператор A при $N = 2m+1$, $\alpha = 2$ имеет собственное значение и собственную функцию

$$\lambda_m^{(2)} = 4h^{-2}, \qquad v_m^{(2)}(x_j) = (-1)^j x_j. \tag{16}$$

Заметим, что все собственные значения, полученные ранее, вещественные и положительные. Кроме того, справедлива

Теорема 2. *Числа* $\lambda_k^{(1)}, k = 1, 2, \ldots, m$, $\lambda_k^{(2)}, k = 0, 1, 2, \ldots, m$, *определённые равенствами (11),(14)-(16), попарно различны и удовлетворяют неравенствам*

$$0 < \lambda_{k-1}^{(2)} < \lambda_k^{(1)} < \lambda_k^{(2)} < 4h^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\lambda_{m-1}^{(2)} < \lambda_m^{(1)} < \lambda_m^{(2)} < 4h^{-2}, \quad N = 2m+1,\ 0 < \alpha < 2,$$

$$\lambda_{m-1}^{(2)} < \lambda_m^{(1)} < 4h^{-2} \leqslant \lambda_m^{(2)}, \quad N = 2m+1,\ \alpha \geqslant 2,$$

$$\lambda_m^{(2)} > 4h^{-2}, \quad N = 2m,\ \alpha > 0.$$

Доказательство. Неравенство $\lambda_m^{(2)} > 4h^{-2}$ при $N = 2m+1$, $\alpha > 2$, а также $N = 2m$, $\alpha > 0$ вытекает непосредственно из равенств (15).

Далее из теоремы 1 следует, что $0 \leqslant \pi kh < \phi_k h < \pi(k+1)h \leqslant 0.5\pi$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, а также $\pi mh < \phi_m h < 0.5\pi$ для $0 < \alpha < 2, N = 2m+1$. Поэтому справедливы неравенства $0 \leqslant \sin\pi kh < \sin\phi_k h < \sin\pi(k+1)h$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ и $\sin\pi mh < \sin\phi_m h$ при $0 < \alpha < 2$, $N = 2m+1$. Отсюда и из равенств (11),(14) получаются требуемые оценки на собственные значения.

Следствие. *Система собственных функций оператора A линейно независима и образует базис пространства H при любом натуральном N и $\alpha > 0$.*

Наряду с оператором A рассмотрим сопряжённый к нему в смысле скалярного произведения (4), который определяется равенствами

$$\begin{aligned}
\left(A^*v\right)_i &= -h^{-2}\left(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
\left(A^*v\right)_N &= 2h^{-1}\left((v_N - v_{N-1})/h + \alpha v_N\right), \quad v_0 = v_N.
\end{aligned}$$

Действуя аналогично случаю оператора A, вычислим собственные значения и собственные функции оператора A^*. В результате получим, что сопряжённый оператор обладает теми же собственными значениями, что и оператор A, соответствующие собственные функции имеют вид

$$\lambda_k^{(1)} = 4h^{-2}\sin^2 \pi kh, \qquad f_k^{(1)}(x) = \cos(2\pi kx + \psi_k),$$

$$\psi_k = \arctan\left[\frac{\alpha h}{\sin(2\pi kh)}\right], \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots m-1 \ (N = 2m,\ \alpha > 0), \\ k = 1, 2, \dots m \ (N = 2m+1,\ \alpha > 0), \end{array}$$

$$\lambda_k^{(2)} = 4h^{-2}\sin^2 \phi_k h, \quad f_k^{(2)}(x) = \cos\big(\phi_k(1-2x)\big),$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1 \quad (N = 2m+1,\ \alpha \geqslant 2,\ N = 2m,\ \alpha > 0),$$

$$k = 0, 1, \dots, m \qquad (N = 2m+1,\ 0 < \alpha < 2), \tag{17}$$

$$\lambda_m^{(2)} = 4h^{-2}\cosh^2 \Phi h,$$

$$f_m^{(2)}(x_j) = (-1)^j \cosh \Phi(1-2x_j), \quad N = 2m,\ \alpha > 0,$$

$$f_m^{(2)}(x_j) = (-1)^j \sinh \Phi(1-2x_j), \quad N = 2m+1,\ \alpha > 2,$$

$$\lambda_m^{(2)} = 4h^{-2}, \ f_m^{(2)}(x_j) = (-1)^j(1-2x_j),\ N = 2m+1,\ \alpha = 2.$$

Собственные функции оператора A^* образуют базис пространства H при любом натуральном N и $\alpha > 0$.

Отметим, что, как показано в [1], при $\alpha = 0$ оператор A имеет лишь $m+1$ различных собственных значений $\lambda_k = 4h^{-2}\sin^2 \pi kh$, $k = 0, 1, \dots, m$. Каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до ненулевого множителя собственная функция

$$u_0(x) = x, \quad u_{2k}(x) = \sin 2\pi kx, \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, m-1\,(N = 2m), \\ k = 1, 2, \dots, m\,(N = 2m+1), \end{array}$$

собственному значению $\lambda_m = 4h^{-2}\,(N = 2m)$ отвечает функция $u_{2m-1}(x_j) = (-1)^j x_j$. Каждой паре (λ_k, u_{2k}) отвечает присоединённая функция $u_{2k-1}(x) = x\cos 2\pi kx$, которая является решением задачи $Au = \lambda_k u + p_k u_{2k}$, где $p_k = 2h^{-1}\sin 2\pi kh$. Здесь $k = 1, 2, \dots, m-1$ при $N = 2m$ и $k = 1, 2, \dots, m$ при $N = 2m+1$.

Совокупность корневых функций $U = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_{N-1}(x)\}$ образует базис пространства H при любом натуральном N.

Собственные и присоединённые функции сопряжённого оператора при $\alpha = 0$ имеют вид (см. [1])

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = 0, \qquad\qquad u_0^*(x) = 2,\\
&\lambda_k = 4h^{-2}\sin^2\pi kh, \ \ u_{2k-1}^*(x) = 4\cos 2\pi kx, \ \ u_{2k}^*(x) = 4(1-x)\sin 2\pi kx,\\
&k = 1, 2, \ldots, m-1 \ (N = 2m), \quad k = 1, 2, \ldots, m \ (N = 2m+1),\\
&\lambda_m = 4h^{-2}, \ \ u_{2m-1}^*(x_j) = 2(-1)^j \ (N = 2m),
\end{aligned}$$

Здесь нечётными индексами занумерованы собственные функции, чётными – присоединённые функции.

Совокупность функций $U^* = \{u_0^*, u_1^*, \ldots, u_{N-1}^*\}$ образует базис пространства H, биортонормированный к базису U в смысле скалярного произведения (4), то есть $(u_i, u_j^*] = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

2. Устойчивость разностной схемы. Как было показано ранее, оператор A не имеет отрицательных собственных значений. Следовательно, при любом $\sigma \geqslant 0$ оператор B канонического представления схемы (5) невырожден, и разностная схема имеет единственное решение $y^n(x)$, $n = 1, 2, \ldots, M$ при любом выборе функции $y^0 = u_0(x)$. Перейдём к изучению устойчивости решения.

Сформулируем два определения устойчивости (см. [3]).

Определение 1. *Разностная схема (6) называется устойчивой по начальным данным в пространстве H, если существует константа $C > 0$, не зависящая от выбора $\tau, h > 0$, такая, что для любой $y^0 \in H$ справедливо неравенство $\|y^n\| \leqslant C\|y^0\|$, $n = 1, 2, \ldots$*

Наряду с сеточной среднеквадратической нормой, рассмотрим в пространстве H энергетическую норму, которая определяется равенством $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y]}$, где D – некоторый самосопряжённый и положительно определённый оператор. Пространство H, снабжённое нормой $\|\cdot\|_D$, обозначим через H_D.

Определение 2. *Разностная схема (6) называется равномерно устойчивой по начальным данным в пространстве H_D, если для любого натурального n и для любой $y^n \in H$ справедливо неравенство $\|y^{n+1}\|_D \leqslant \|y^n\|_D$.*

Известно (см. [3]), что условие равномерной устойчивости схемы (6) в пространстве H_D эквивалентно операторному неравенству $D \geqslant S^*DS$, $S = E - \tau B^{-1}A$, которое для схем с весами (5) принимает вид

$$DA + A^*D + \tau(2\sigma - 1)A^*DA \geqslant 0.$$

Основная цель настоящей работы заключается в доказательстве устойчивости по начальным данным разностной схемы (5) в пространстве H. Для этого ниже построена энергетическая норма $\|\cdot\|_D$, константы эквивалентности которой с сеточной среднеквадратической нормой не зависят от выбора $h > 0$, и доказана равномерная устойчивость рассматриваемой разностной схемы в пространстве H_D.

Рассмотрим систему сеточных функций

$$W = \{w_0(x), w_1(x), \dots, w_{N-1}(x)\},$$

определённую для каждого натурального N равенствами

$$\begin{aligned} & w_0(x) = 0.5\phi_0^{-1} v_0^{(2)}(x),\ w_{2m-1}(x) = v_m^{(2)}(x), \\ & w_{2k-1}(x) = \frac{v_k^{(2)}(x) - v_k^{(1)}(x)}{2(\phi_k - \pi k)},\ k = 1, 2, \dots, m-1, \\ & w_{2k}(x) = v_k^{(1)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, m\ (N = 2m+1), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad k = 1, 2, \dots, m-1\ (N = 2m). \end{aligned} \tag{18}$$

Система W является базисом пространства H в силу базисности системы собственных функций оператора A.

Пусть K – оператор перехода из единичного базиса в базис W, то есть оператор, матрица которого в единичном базисе имеет вид $K = (k_{ij})$, $k_{ij} = w_{j-1}(x_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Умножив слева уравнение разностной схемы (5) на оператор K^{-1} и совершив замену неизвестного $y^k = K\tilde{y}^k$, $k = 0, 1, \dots, M$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{y}^{n+1} - \tilde{y}^n}{\tau} + \sigma J \tilde{y}^{n+1} + (1-\sigma) J \tilde{y}^n = 0,\ n = 0, 1, \dots, M-1, \\ & \tilde{y}^{\,0} = K^{-1} u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $J = \operatorname{diag}\left[\lambda_0^{(2)},\ J_1,\ J_2, \dots, J_{m-1},\ J_m\right]$ при нечётном N, и $J = \operatorname{diag}\left[\lambda_0^{(2)},\ J_1,\ J_2, \dots, J_{m-1}, \lambda_m^{(2)}\right]$ при чётном N, где J_k – матрица размера 2×2 вида

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k^{(2)} & 0 \\ 0.5(\phi_k - \pi k)^{-1}\left(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}\right) & \lambda_k^{(1)} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda_m^{(2)} & 0 \\ 0 & \lambda_m^{(1)} \end{bmatrix}, \quad N = 2m+1,\ \alpha > 0.$$

Заметим, что $\|y^k\|_D = \|\tilde{y}^k\|_{\tilde{D}}$, где $\tilde{D} = K^*DK$. Поэтому условие равномерной устойчивости разностной схемы (5) в пространстве H_D эквивалентно равномерной устойчивости схемы (19) в пространстве $H_{\tilde{D}}$. Пусть $D = (hKK^*)^{-1}$, то есть $\tilde{D} = h^{-1}E$, тогда требование равномерной устойчивости схемы с весами (19) в пространстве $H_{\tilde{D}}$ эквивалентно неравенству

$$J + J^* + \tau(2\sigma - 1)J^*J \geqslant 0.$$

Данное неравенство в силу блочно – диагональной структуры оператора J равносильно системе неравенств

$$\begin{aligned} &1 + \tau\lambda_0^{(2)}(\sigma - 0.5) \geqslant 0, \quad 1 + \tau\lambda_m^{(2)}(\sigma - 0.5) \geqslant 0, \\ &J_k + J_k^T + \tau(2\sigma - 1)J_k^T J_k \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ &1 + \tau\lambda_m^{(1)}(\sigma - 0.5) \geqslant 0 \quad (N = 2m+1,\ \alpha > 0). \end{aligned} \tag{20}$$

Умножив матричное неравенство системы (20) слева на матрицу $\left(J_k^T\right)^{-1}$ и справа – на J_k^{-1}, получим эквивалентное ему неравенство

$$J_k^{-1} + \left(J_k^T\right)^{-1} + \tau(2\sigma - 1)E \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

которое, используя явный вид матрицы J_k, сводится к числовому неравенству

$$\tau(\sigma - 0.5) \geqslant \frac{-\left(\lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)}\right) + \left(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}\right)\sqrt{1 + 0.25(\phi_k - \pi k)^{-2}}}{2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}, \tag{21}$$

где $k = 1, 2, \dots, m-1$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Разностная схема (5) равномерно устойчива по начальным данным в пространстве H_D, $D = (hKK^*)^{-1}$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства (21) и*

$$\tau(\sigma - 0.5) \geqslant -1/\left(\lambda_m^{(2)}\right).$$

Основной недостаток теоремы 3 заключается в необходимости проверять условия (21), что весьма затруднительно, так как величины ϕ_k, $k = 1, 2, \dots, m-1$ являются корнями трансцендентного уравнения (13) и заранее неизвестны. Для того чтобы упростить условия устойчивости схемы (5), докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *При любом $\alpha > 0$ неравенства (21) следуют из (3).*

Доказательство. Преобразуем неравенство (21) к виду

$$\tau(\sigma - 0.5) \geqslant -\left(\lambda_k^{(2)}\right)^{-1}\left[1 - \frac{\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)}}{2\lambda_k^{(1)}}\left(\sqrt{1 + 0.25\left(\phi_k - \pi k\right)^{-2}} - 1\right)\right],$$
$$k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Достаточно доказать, что

$$1 - 0.5\left(\lambda_k^{(2)}/\lambda_k^{(1)} - 1\right)\left(\sqrt{1 + 0.25(\phi_k - \pi k)^{-2}} - 1\right) \geqslant 0.25h^2\lambda_k^{(2)},$$
$$k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Подставляя в данное неравенство явные значения величин $\lambda_k^{(1)}$, $\lambda_k^{(2)}$ (см. равенства (11), (14) соответственно), получим

$$\frac{\sin^2\phi_k h - \sin^2\pi k h}{2\sin^2\pi k h}\left(\sqrt{1 + 0.25(\phi_k - \pi k)^{-2}} - 1\right) \leqslant \cos^2\phi_k h,$$
$$k = 1, 2, \dots, m-1$$

или, что то же самое,

$$\sqrt{1 + 4(\phi_k - \pi k)^2} - 2(\phi_k - \pi k) \leqslant \frac{4\sin^2\pi k h\ \cos^2\phi_k h}{h\ \operatorname{sinc}\left(h(\phi_k - \pi k)\right)\sin\left(h(\phi_k + \pi k)\right)},$$
$$k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Здесь использовано обозначение $\operatorname{sinc} y = y^{-1}\sin y$.

Так как $0 < \phi_k - \pi k < 0.5\pi$, $k = 1, 2, \dots, m-1$ при любом натуральном N и вещественном $\alpha > 0$, то $0 < \operatorname{sinc} h(\phi_k - \pi k) < 1$, $k = 1, 2, \dots, m-1$. Отсюда и из соотношения $\sqrt{1 + 4x^2} - 2x < 1$, справедливого для всех положительных x, вытекает, что для доказательства теоремы достаточно проверить неравенство

$$h\sin\left(h(\phi_k + \pi k)\right) \leqslant 4\sin^2\pi k h\cos^2\phi_k h, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \tag{22}$$

Рассмотрим те значения k, при которых $0 < \pi k h \leqslant \pi/4$. Известно, что

$$2x\sqrt{2}/\pi < \sin x,\ 0 < x < \pi/4, \qquad \sin x < x,\ x > 0. \tag{23}$$

Неравенство (22), в силу данных соотношений, является следствием неравенства

$$\phi_k + \pi k \leqslant 16k^2\left(1 + \cos(2\phi_k h)\right), \quad k = 1, 2, \dots, \left[N/4\right].$$

Так как $\phi_k < \pi/2 + \pi k$ и, следовательно, $2\phi_k h < \pi/2 + \pi h$, $k \leqslant [N/4]$, то достаточно доказать неравенство

$$\pi/2 + 2\pi k \leqslant 16k^2(1 - \sin \pi h), \quad k = 1, 2, \ldots, [N/4],$$

справедливость которого при $0 < h \leqslant 1/6$ проверяется непосредственно.

Рассмотрим те значения k, при которых $\pi k h > \pi/4$. Заметим, что $\pi k h \leqslant \pi(m-1)h < \pi/2$. Поэтому $\sin^2 \pi k h \geqslant 0.5$, и для доказательства неравенства (22) достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{gathered} h \sin h(\phi_k + \pi k) \leqslant 2\cos^2 \phi_k h, \\ k = [N/4] + 1, [N/4] + 2, \ldots, m - 1. \end{gathered} \tag{24}$$

Воспользуемся здесь тем, что

$$\begin{gathered} \sin h(\phi_k + \pi k) = \sin h\big(\pi N - 2\pi k - (\phi_k - \pi k)\big) \leqslant \sin \pi(N - 2k)h, \\ \cos \phi_k h = \sin h\big(0.5\pi N - \pi k - (\phi_k - \pi k)\big) \geqslant \sin 0.5\pi(N - 2k - 1)h. \end{gathered}$$

Пусть $n = N - 2k$, $n = 3, 4, \ldots, m$ при нечётном N и $n = 2, 3, 4, \ldots, m - 1$ при чётном N. Неравенство (24) будет заведомо выполнено, если

$$h \sin \pi n h \leqslant 2\sin^2 0.5\pi(n-1)h.$$

Оценивая левую и правую часть данного соотношения с помощью неравенств (23), приходим к неравенству $\pi n \leqslant 4(n-1)^2$, которое справедливо для всех $n \geqslant 3$.

Таким образом, неравенство (22) доказано для всех k, исключая случай $k = m - 1$, $N = 2m$.

Подставим $k = 0.5N - 1$ в неравенство (22), в результате получим

$$h \sin h\big(2\pi - (\phi_{m-1} - \pi(m-1))\big) \leqslant 4\cos^2 \pi h \sin^2 h\big(\pi - (\phi_{m-1} - \pi(m-1))\big).$$

Так как $0 < \phi_{m-1} - \pi(m-1) < 0.5\pi$, то достаточно проверить справедливость неравенства $h \sin 2\pi h \leqslant 4\cos^2 \pi h \sin^2 0.5\pi h$, что нетрудно сделать, пользуясь соотношениями (23) и предполагая $0 < h \leqslant 1/8$.

Лемма 1 позволяет упростить условия теоремы 3.

Теорема 4. *Разностная схема (5) равномерно устойчива по начальным данным в пространстве H_D, $D = (hKK^*)^{-1}$ если её параметры удовлетворяют условию*

$$\tau(\sigma - 0.5) \geqslant -\min\big[h^2/4,\ 1/\lambda_m^{(2)}\big].$$

Следствие. *Разностная схема (5) с весовым множителем $\sigma \geqslant 0.5$ является равномерно устойчивой по начальным данным при любом выборе $\tau > 0$, $h > 0$.*

Исследуем зависимость величины $\lambda_m^{(2)}$ от шага сетки h при чётных N, $\alpha > 0$, а также при нечётных N, $\alpha > 2$.

Лемма 2. *Пусть $\Phi_1(\alpha, h)$, $\alpha > 2$, $h > 0$ – положительный корень уравнения $\alpha \tanh \phi = h^{-1} \sinh 2\phi h$, $\Phi_2(\alpha, h)$, $\alpha > 0$, $h > 0$ – положительный корень уравнения $\alpha \coth \phi = h^{-1} \sinh 2\phi h$, тогда*

$$0 < \Phi_1(\alpha, h) < \Phi_2(\alpha, h), \ \alpha > 2, h > 0,$$
$$\Phi_2(\alpha, h) < \max[\alpha, \sqrt{\alpha}], \ \alpha > 0, h > 0.$$

Доказательство. Неравенство $\Phi_1(\alpha, h) < \Phi_2(\alpha, h)$ следует из монотонности функции $\sinh y$, $y > 0$, а также из очевидного соотношения $\tanh \phi < \coth \phi$, $\phi > 0$.

Получим оценку сверху на величину Φ_2. Так как $\sinh 2\phi h > 2\phi h$, то $\Phi_2(\alpha, h) < y(\alpha)$, $h > 0$, где $y(\alpha)$ – решение уравнения $\alpha \coth y = 2y$, $y > 0$. При $\alpha \geqslant 1$ решение данного уравнения с помощью неравенства $1 + 1/y > \coth y$, $y > 0$ удобно оценить сверху решением уравнения $\alpha(1 + 1/y) = 2y$, $y > 0$, эквивалентного квадратному, положительный корень которого не превосходит числа α при $\alpha \geqslant 1$. Таким образом, $\Phi_2(\alpha, h) < \alpha$, $\alpha \geqslant 1$, $h > 0$. В случае $0 < \alpha < 1$ воспользуемся неравенством $y + 1/y > \coth y$, $y > 0$ для построения оценки сверху на $y(\alpha)$, в результате получим $\Phi_2(\alpha, h) < \sqrt{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $h > 0$.

Теорема 5. *Для равномерной устойчивости разностной схемы (5) в пространстве H_D, $D = (hKK^*)^{-1}$ достаточно, чтобы её параметры удовлетворяли условию*

$$\tau(\sigma - 0.5) \geqslant -h^2/4 \left(1 - \tanh^2 \left(h \max[\alpha, \sqrt{\alpha}\,]\right)\right). \tag{25}$$

3. Эквивалентность норм. Известно, что в конечномерном линейном пространстве любые две нормы эквивалентны. В частности, в пространстве H эквивалентными являются среднеквадратическая сеточная норма и норма $\|\cdot\|_D$, то есть существуют константы $C_1 = C_1(h) > 0$, $C_2 = C_2(h) > 0$ такие, что $C_1\|y\| \leqslant \|y\|_D \leqslant C_2\|y\|$ для любой функции $y = y(x)$, $x \in \omega_h$. Далее изучается вопрос зависимости констант эквивалентности от выбора шага сетки h. Основной результат исследования заключается в равномерной ограниченности по $h > 0$ отношения $C_2(h)/C_1(h)$ при каждом фиксированном $\alpha > 0$.

Определённая равенствами (18) система функций $W = \{w_0(x), w_1(x), \dots, w_{N-1}(x)\}$, являясь базисом пространства H, имеет единственную биортонормированную в смысле скалярного произведения (4) систему $W^* = \{w_0^*(x), w_1^*(x), \dots, w_{N-1}^*(x)\}$. Используя свойство биортогональности систем собственных функций операторов A и A^*, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
&w_0^*(x) = 2\phi_0\big(f_0^{(2)}, v_0^{(2)}\big]^{-1} f_0^{(2)}(x),\ w_{2m-1}^*(x) = \big(f_m^{(2)}, v_m^{(2)}\big]^{-1} f_m^{(2)}(x),\\
&w_{2k-1}^*(x) = 2(\phi_k - \pi k)\big(f_k^{(2)}, v_k^{(2)}\big]^{-1} f_k^{(2)}(x), k = 1, 2, \dots, m-1,\\
&w_{2k}^*(x) = \big(f_k^{(2)}, v_k^{(2)}\big]^{-1} f_k^{(2)}(x) + \big(f_k^{(1)}, v_k^{(1)}\big]^{-1} f_k^{(1)}(x), k = 1, 2, \dots, m-1,\\
&w_{2m}^*(x) = \big(f_m^{(1)}, v_m^{(1)}\big]^{-1} f_m^{(1)}(x)\ (N = 2m+1).
\end{aligned}$$

Любую функцию $y(x) \in H$ можно разложить по базису W, то есть представить в виде суммы

$$y(x) = \tilde{y}_0 w_0(x) + \tilde{y}_1 w_1(x) + \ldots + \tilde{y}_{N-1} w_{N-1}(x),$$

где $\tilde{y}_i = \big(y, w_i^*\big]$, $i = 0, 1, \dots, (N-1)$, или, что то же самое, в виде $y(x) = K\tilde{Y}$, где $\tilde{Y} = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{N-1})$. Вычисляя $\|y\|_D$, получим

$$\|y\|_D = \sqrt{h^{-1}\big(K^{-1}y, K^{-1}y\big]} = \Big(\tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_1^2 + \ldots + \tilde{y}_{N-2}^2 + 0.5\tilde{y}_{N-1}^2\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Таким образом, константы C_1, C_2 можно получить, оценивая сумму квадратов коэффициентов разложения по базису W.

Чтобы построить такого рода оценки, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Рассмотрим задачу

$$\tan x + A/(B + x) = 0, \quad x > 0, \tag{27}$$

где A, B – вещественные параметры, причём $B \geqslant 0$.

Лемма 3. *Задача (27) имеет счётное число решений $x_1, x_2, \dots$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\begin{aligned}
&0 < \pi k - x_k < 0.5\pi \min\big[1,\ A\sqrt{2}/(2k)\big], \quad A > 0,\\
&0 \leqslant x_k - \pi k \leqslant 0.5\pi \min[1,\ -A/(2k)], \quad A \leqslant 0.
\end{aligned}$$

В случае $A < 0$ дополнительно существует решение $x_0 \in (0, 0.5\pi)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $A > 0$. Функция

$$f(x) = \tan x + A/(B + x), \quad x > 0$$

непрерывна на своей области определения, положительна на множествах $[\pi n, 0.5\pi + \pi n)$, $n = 0, 1, \ldots$ и меняет знак на каждом из интервалов $I_{2n-1} = (\pi n - 0.5\pi, \pi n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, решения задачи (27) принадлежат объединению интервалов I_{2n-1} и образуют на каждом из них непустое и замкнутое множество при каждом $n = 1, 2, \ldots$

Пусть x_n – наименьший из нулей функции $f(x)$ на множестве I_{2n-1}. Так как функции $f_1(x) = \tan x$, $f_2(x) = -A/(B + x)$ выпуклы вверх на $[x_n, \pi n]$, то на данном отрезке график функции $f_1(x)$ лежит выше хорды, стягивающей точки $(x_n, \tan x_n)$ и $(\pi n, 0)$, график функции $f_2(x)$ лежит ниже касательной, поведённой в точке $(x_n, \tan x_n)$, то есть

$$\begin{aligned} \tan x &> (x - \pi n)(x_n - \pi n)^{-1} \tan x_n, \quad x_n < x < \pi n, \\ -A/(B + x) &< A(B + x_n)^{-2}(x - 2x_n - B), \quad x_n < x < \pi n. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства $(x_n - \pi n)^{-1} \tan x_n \geqslant A(B + x_n)^{-2}$, справедливого для всех натуральных n, вытекает единственность решения уравнения $f(x) = 0$ на каждом из интервалов I_{2n-1}, $n = 1, 2, \ldots$

Чтобы получить оценку сверху на разность $\pi n - x_n$, сделаем в уравнении $f(x) = 0$, $x \in I_{2n-1}$ замену переменного $x = \pi n - t$, в результате получим уравнение

$$\tan t = A(B + \pi n - t)^{-1}, \quad 0 < t < 0.5\pi,$$

которое имеет единственное решение t_n при каждом натуральном n. Пользуясь монотонностью функции $\tan t$, а также неравенством $0.5\pi \tan t > t(0.5\pi - t)^{-1}$, справедливым для всех $0 < t < 0.5\pi$, можно доказать, что t_n меньше всякого положительного решения уравнения

$$t(0.5\pi - t)^{-1} = 0.5\pi A(\pi n - t)^{-1}.$$

Данное уравнение эквивалентными преобразованиями сводится к квадратному, которое имеет два положительных корня при любом $\alpha > 0$ и натуральном n. Меньший из них, $t_-(n)$, удовлетворяет неравенству

$$t_-(n) \leqslant \frac{\pi A}{2\sqrt{2}(n + 0.5A)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Из последнего неравенства вытекает требуемая оценка на разность $\pi n - x_n$.

Случай $A = 0$ тривиален. Пусть $A < 0$. Функция $f(x)$ заведомо меньше нуля при $x \in (\pi n - 0.5\pi, \pi n]$, $n = 1, 2, \ldots$ и меняет знак на каждом из интервалов $I_{2n} = (\pi n, 0.5\pi + \pi n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда, а также из непрерывности функции $f(x)$ вытекает существование решения на множестве I_{2n}, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Единственность решения при каждом n следует из монотонности функции $f(x)$, $x \in I_{2n}$. Для доказательства оценки на разность $(x_k - \pi k)$, $k = 1, 2, \ldots$ следует сделать замену $x = \pi k + t$, $0 < t < 0.5\pi$ в уравнении $f(x) = 0$, $x \in I_{2k}$ и действовать аналогично случаю $A > 0$.

Введём обозначение $\delta_k = \phi_k - \pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$, где ϕ_k – решения уравнения (13). Из теоремы 1 следует, что $0 < \delta_k < 0.5\pi$ для любого допустимого номера k, любого $\alpha > 0$, $h > 0$. Пусть k_0 – натуральное число, определяемое из соотношений $\phi_{k_0} \leqslant \pi N/4$, $\phi_{k_0+1} > \pi N/4$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Разность $\delta_k = \phi_k - \pi k$ при любом $\alpha > 0$, $h > 0$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 < \delta_k < 0.5\pi\alpha/k, \quad 0 < \delta_{m-k} < 0.5\pi\alpha/k, \quad k = 1, 2, \ldots, k_0,$$
$$\alpha/\pi < \delta_m < \arcsin(0.5\alpha) \quad (0 < \alpha < 2,\ N = 2m + 1).$$

Доказательство. Получим оценку сверху на δ_k, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. Для этого преобразуем уравнение (13) к виду

$$\tan\phi = 0.5\alpha(\phi\ \operatorname{sinc} 2h\phi)^{-1}, \quad 0 < \phi < 0.5\pi N,$$

где, как и ранее, $\operatorname{sinc} y = y^{-1}\sin y$. Дальнейшее доказательство основано на неравенстве

$$(0.5\pi N - x)^{-1} + x^{-1} > (x\ \operatorname{sinc} 2hx)^{-1}, \quad 0 < x < 0.5\pi N, \qquad (28)$$

которое эквивалентно неравенству $0.5\pi N \operatorname{sinc} 2hx > 0.5\pi N - x$, $0 < x < 0.5\pi N$, верному в силу выпуклости функции $f(y) = \operatorname{sinc} y$ на множестве $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Пусть $0 < \phi \leqslant \pi N/4$, тогда из соотношения (28) следует неравенство $0.5\alpha(\phi\ \operatorname{sinc} 2h\phi)^{-1} < \alpha/\phi$. Отсюда и из монотонности функции $\tan\phi$ вытекает, что $\phi_k < x_k$, где x_k – решение уравнения $\tan x = \alpha/x$,

$x > 0$, расположенное на интервале $(\pi k, 0.5\pi + \pi k)$. Здесь индекс k может принимать любые натуральные значения, при которых $\phi_k \leqslant \pi N/4$. Из леммы 3 следует оценка $\pi k < x_k < \pi k + 0.5\pi\alpha/k$, $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому при любом сколь угодно большом N справедливы неравенства $0 < \phi_k - \pi k < 0.5\pi\alpha/k$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$.

Пусть $\pi N/4 \leqslant \phi < \pi N/2$, тогда из неравенства (28) вытекает оценка $0.5\alpha(\phi \operatorname{sinc} 2h\phi)^{-1} < \alpha/(0.5\pi N - \phi)$. Отсюда и из монотонности функции $\tan\phi$ следует, что $\phi_k < x_k$, где x_k – решение уравнения $\tan x = \alpha(0.5\pi N - x)^{-1}$, $x > 0$, расположенное на множестве $(\pi k, 0.5\pi + \pi k)$. Здесь $k = k_0, k_0 + 1, \ldots, (m-1)$. Данное уравнение заменой переменного $y = \pi m - x$ сводится к виду $\tan y = -\alpha/(B + y)$, причём $B = 0$ при $N = 2m$ и $B = 0.5\pi$ в противном случае. Применяя лемму 3, получим соотношения

$$0 < \delta_k < x_k - \pi k = \pi(m-k) - y_{m-k} < 0.5\pi\alpha/(m-k),$$

$$k = k_0, k_0 + 1, \ldots, (m-1),$$

из которых вытекает требуемая оценка на δ_k при $k = k_0, k_0 + 1, \ldots, m-1$.

Докажем двустороннюю оценку на δ_m при $0 < \alpha < 2$, $N = 2m + 1$. Пусть $y = 0.5\pi N - \phi_m$, тогда $\tan y = (\alpha h)^{-1} \sin 2hy$, $0 < y < 0.5\pi$ и $\delta_m = 0.5\pi - y$. Так как функция $h^{-1}\sin 2yh$ монотонно убывает по $h \in (0, 0.5]$ при каждом фиксированном $y \in (0, 0.5\pi)$, то $0 < y_1 < y < y_2 < 0.5\pi$, где y_1 – решение уравнения $\alpha \tan y = 2\sin y, 0 < y < 0.5\pi$, y_2 – решение уравнения $\alpha\tan y = 2y, 0 < y < 0.5\pi$. Первое уравнение имеет решение $y_1 = \arccos(0.5\alpha)$. Величину y_2 оценим сверху решением уравнения $\alpha y(0.5\pi - y)^{-1} = \pi y$, $0 < y < 0.5\pi$. В результате получим неравенство $y_2 < 0.5\pi - \alpha/\pi$. Таким образом, $\arccos(0.5\alpha) < 0.5\pi - \delta_m < 0.5\pi - \alpha/\pi$, что и требовалось.

Рассмотрим в пространстве H две системы функций $A = \{a_k(x), k = 1, 2, \ldots, N\}$, $B = \{b_k(x), k = 1, 2, \ldots, N\}$. Будем считать, что системы определены для $N \geqslant N_0$.

Определение 3. *Системы функций A и B называются квадратично близкими при $h = 1/N \to 0$, если существует такая константа $C > 0$,* *что неравенство*

$$\sum_{k=1}^{N} \|a_k(x) - b_k(x)\|^2 \leqslant C$$

выполняется для всех достаточно малых $h > 0$.

Замечание. Определение квадратичной близости при $h \to 0$ является сеточным аналогом квадратичной близости последовательностей функций бесконечномерных пространств, которое можно найти в работе [4]. Отметим также, что свойство квадратичной близости при $h \to 0$ обладает симметрией, рефлексией и транзитивностью.

Лемма 5. *Для любого $x \in \omega_h$, $k = 1, 2, \dots, m-1$ справедливы неравенства*

$$\left|4(-1)^k f_k^{(2)}(x) - u_{2k-1}^*(x)\right| \leqslant C_1\delta_k,$$
$$\left|2\big(\tan\phi_k\big)^{-1}\big((\cos\phi_k)^{-1} f_k^{(2)}(x) - (\cos\psi_k)^{-1} f_k^{(1)}(x)\big) - u_{2k}^*(x)\right| \leqslant C_2\delta_k$$

с константами $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от выбора $\alpha > 0$, $h > 0$.

Доказательство. Для доказательства первого неравенства леммы достаточно заметить, что

$$\left|(-1)^k f_k^{(2)}(x) - \cos 2\pi kx\right| = \left|\cos(2\phi_k x - \delta_k) - \cos 2\pi kx\right| \leqslant \delta_k|2x-1|, x \in \omega_h.$$

Рассмотрим второе неравенство леммы. В силу равенства

$$\frac{2}{\tan\phi_k}\left[\frac{f_k^{(2)}(x)}{\cos\phi_k} - \frac{f_k^{(1)}(x)}{\cos\psi_k}\right] = 2\sin(2\phi_k h)(\sin 2\pi kh)^{-1}\sin 2\pi kx +$$
$$+2\sin 2\phi_k x - 4x\sin\big((2\pi k + \delta_k)x\big)\ \cos\delta_k\,(\ \mathrm{sinc}\,\delta_k)^{-1}\ \mathrm{sinc}\,(\delta_k x)$$

достаточно проверить соотношения

$$\left|\sin\big((2\pi k + \delta_k)x\big)\ \cos\delta_k\,(\ \mathrm{sinc}\,\delta_k)^{-1}\ \mathrm{sinc}\,(\delta_k x) - \sin 2\pi kx\right| \leqslant C_{21}\delta_k, \quad (29)$$
$$\left|\sin 2\phi_k x + \sin(2\phi_k h)(\sin 2\pi kh)^{-1}\sin 2\pi kx - 2\sin 2\pi kx\right| \leqslant C_{22}\delta_k. \quad (30)$$

Справедливость соотношения (29) вытекает из двух неравенств

$$\left|\sin\big((2\pi k + \delta_k)x\big) - \sin 2\pi kx\right| \leqslant \delta_k,$$
$$\left|\cos\delta_k\,(\ \mathrm{sinc}\,\delta_k)^{-1}\ \mathrm{sinc}\,(\delta_k x) - 1\right| \leqslant 0.5\delta_k^2.$$

Представляет интерес проверка второго неравенства. Так как $0 < \cos y < \ \mathrm{sinc}\, y < 1$, $0 < y < 0.5\pi$, то

$$1 - \cos\delta_k\,(\ \mathrm{sinc}\,\delta_k)^{-1}\ \mathrm{sinc}\,(\delta_k x) > 0, \quad x \in (0, 1],\ 0 < \delta_k < 0.5\pi.$$

Отсюда и из монотонности функции $\operatorname{sinc} y$ на множестве $0 < y < 0.5\pi$ следует двусторонняя оценка

$$0 < 1 - \cos\delta_k \ (\operatorname{sinc}\delta_k)^{-1} \ \operatorname{sinc}(\delta_k x) \leqslant 1 - \cos\delta_k, \quad x \in \omega_h.$$

Далее достаточно заметить, что $1 - \cos\delta_k < 0.5\delta_k^2$, $0 < \delta_k < 0.5\pi$.

Неравенство (30) следует из соотношений

$$|\sin 2\phi_k x - \sin 2\pi k x| \leqslant 2\delta_k, \quad |\sin(2\phi_k h)/\sin 2\pi k h - 1| \leqslant \sqrt{2}\delta_k/4,$$

первое из которых проверяется непосредственно, а для доказательства второго следует представить его левую часть в виде

$$\left|2\delta_k h \ \operatorname{sinc}(\delta_k h)\ (\sin 2\pi k h)^{-1}\cos\big((2\pi k + \delta_k)h\big)\right|$$

и воспользоваться тем, что $0 < h/\sin 2\pi k h < h/\sin 2\pi h \leqslant \sqrt{2}/8$, $0 < h \leqslant 1/8$ при $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

В основе исследования констант эквивалентности норм $\|\cdot\|, \|\cdot\|_D$ лежит свойство квадратичной близости системы U корневых функций оператора A при $\alpha = 0$ и системы W, определённой равенствами (18), а также квадратичная близость систем U^*, W^*, биортонормированных к U, W соответственно.

Теорема 6. *Системы функций U, W, а также биортонормированные к ним U^*, W^* являются квадратично близкими при $h \to 0$ при каждом фиксированном $\alpha > 0$.*

Доказательство. Проведём доказательство для случая нечётного N.

Рассмотрим системы функций U, W. Нетрудно видеть, что $w_{2k}(x) - u_{2k}(x) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, m$ и

$$w_{2k-1}(x) - u_{2k-1}(x) = x\operatorname{sinc}(\delta_k x)\cos\big((2\pi k + \delta_k)x\big) - x\cos 2\pi k x,$$
$$x \in \omega_h, \ k = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{N-1}\|w_j(x) - u_j(x)\|^2 = \|w_0(x) - u_0(x)\|^2 + \|w_{2m-1}(x) - u_{2m-1}(x)\|^2 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m-1}\left\|x\operatorname{sinc}(\delta_k x)\big(\cos(2\pi k + \delta_k)x\big) - \cos 2\pi k x)\right\|^2.$$

Так как

$$\begin{gathered}|1-\operatorname{sinc}(\delta_k x)| \leqslant 1-\operatorname{sinc}\delta_k < \delta_k/\pi,\ 0<x\leqslant 1,\\ \big|\cos\big((2\pi k+\delta_k)x\big)-\cos 2\pi kx\big| < \delta_k,\ 0<x\leqslant 1,\end{gathered}$$

то $\big|\operatorname{sinc}(\delta_k x)\cos\big((2\pi k+\delta_k)x\big)-\cos 2\pi kx\big| < (1+1/\pi)\delta_k$, $x\in\omega_h$ и

$$\big\|x\operatorname{sinc}(\delta_k x)\cos\big((2\pi k+\delta_k)x\big)-\cos 2\pi kx)\big\|^2 < (1+1/\pi)^2\delta_k^2,\\ k=1,2,\ldots,m-1.$$

Из неравенства треугольника, а также из ограниченности функций $w_0(x)$, $u_0(x)$ следует, что

$$\|w_0(x)-u_0(x)\|^2 \leqslant 2\big(\|w_0(x)\|^2+\|u_0(x)\|^2\big) \leqslant C_1,$$

где C_1 – положительная константа, не зависящая от выбора $h>0$. Аналогично доказывается, что $\|w_{2m-1}(x)-u_{2m-1}(x)\|^2 \leqslant C_2$, $h>0$.

Таким образом, справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^{N-1}\|w_j(x)-u_j(x)\|^2 \leqslant (1+1/\pi)^2\delta_k^2+C_1+C_2,$$

из которого с учётом леммы 4 следует квадратичная близость систем функций U, W.

Докажем квадратичную близость систем U^*, W^*. Достаточно доказать неравенства

$$|w^*_{2k-1}(x)-u^*_{2k-1}(x)| \leqslant C_3\delta_k, \quad |w^*_{2k}(x)-u^*_{2k}(x)| \leqslant C_4\delta_k,\\ k=1,2,\ldots,m-1$$

с константами $C_3, C_4>0$, не зависящими от выбора $h>0$, а также ограниченность при $h>0$ функций $w^*_0(x)$, $w^*_{2m-1}(x)$ и $w^*_{2m}(x)$.

Проверим неравенство $|w^*_{2k-1}(x)-u^*_{2k-1}(x)| \leqslant C_3\delta_k$, $x\in\omega_h$, $k=1,2,\ldots,m-1$. В силу леммы 5 достаточно показать, что

$$\big|2\delta_k(f_k^{(2)},v_k^{(2)}]^{-1}-4(-1)^k\big| \leqslant \tilde{C}_3\delta_k,\ k=1,2,\ldots,m-1.$$

Вычисляя скалярное произведение $(f_k^{(2)},v_k^{(2)}]$, преобразуем левую часть данного неравенства к виду

$$4\big|(\operatorname{sinc}\delta_k)^{-1}(1+h\sin(2\delta_k)\mathrm{ctg}2\phi_k\mathrm{h})^{-1}-1\big|.$$

Из неравенств $0 < h/\sin 2\phi_k h < h/\sin 2\pi h \leqslant \sqrt{2}/8$, справедливых для всех $0 < h \leqslant 1/8$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, следует, что $|h\sin(2\delta_k)\mathrm{ctg} 2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h}| < (\sin 2\delta_\mathrm{k})\sqrt{2}/8$. Отсюда вытекает неравенство

$$\left|2\delta_k(f_k^{(2)}, v_k^{(2)}]^{-1} - 4(-1)^k\right| \leqslant \frac{8\pi}{3}\Big[|1 - \operatorname{sinc}\delta_k| + (\sqrt{2}/8)(\operatorname{sinc}\delta_k)\sin 2\delta_k\Big],$$

правая часть которого меньше, чем $\tilde{C}_3\delta_k$, где $\tilde{C}_3$ – константа, не зависящая от выбора номера k и $h > 0$.

Проверим неравенство $|w_{2k}^*(x) - u_{2k}^*(x)| \leqslant C_4\delta_k$, $x \in \omega_h$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. В силу леммы 5 достаточно доказать, что

$$\begin{aligned} &\left|2/\sin\phi_k - (f_k^{(2)}, v_k^{(2)}]^{-1}\right| \leqslant C_{41}\delta_k, \\ &\left|2/(\tan\phi_k\cos\psi_k) + (f_k^{(1)}, v_k^{(1)}]^{-1}\right| \leqslant C_{42}\delta_k, \end{aligned} \tag{31}$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, m-1$ с константами $C_{41}, C_{42} > 0$, не зависящими от выбора $h > 0$.

Рассмотрим первое из неравенств (31). Подставляя скалярное произведение $(f_k^{(2)}, v_k^{(2)}]$, преобразуем его левую часть к виду

$$2(\sin\delta_k)^{-1}\left|1 - (1 + h\sin(2\delta_k)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h})^{-1}\right|.$$

Приведём к общему знаменателю выражение под знаком модуля и воспользуемся тем, что $h\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h} = \alpha^{-1}(\cos 2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h})\tan\phi_\mathrm{k}$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$. В результате получим

$$\begin{aligned} &2(\sin\delta_k)^{-1}\left|1 - (1 + h\sin(2\delta_k)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h})^{-1}\right| = \\ &= 4\alpha^{-1}(\sin\delta_k)\left|\cos 2\phi_k h\right|\big(1 + h\sin(2\delta_k)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h}\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из ограниченности выражения $\big(1 + h\sin(2\delta_k)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{k}\mathrm{h}\big)^{-1}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m-1$ следует неравенство

$$\left|2/\sin\phi_k - (f_k^{(2)}, v_k^{(2)}]^{-1}\right| \leqslant 16\delta_k/(3\alpha).$$

Докажем второе из неравенств (31). Вычисляя скалярное произведение $(f_k^{(1)}, v_k^{(1)}]$, преобразуем его левую часть к виду

$$2(\cos\psi_k)^{-1}\left|1/\tan\phi_k - 1/\tan\psi_k\right|.$$

Воспользовавшись здесь тем, что

$$\tan\phi_k = \alpha h/\sin 2\phi_k h, \ \tan\psi_k = \alpha h/\sin 2\pi k h,$$

получим равенство

$$\begin{aligned}&\big|2/(\tan\phi_k\cos\psi_k) + (f_k^{(1)}, v_k^{(1)}]^{-1}\big| =\\&= 4\big(\alpha h\cos\psi_k\big)^{-1}\sin(\delta_k h)\big|\cos(2\pi k+\delta_k)h\big|,\ k=1,2,\dots,m-1.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}\big(\cos\psi_k\big)^{-1} &= \sqrt{1+\big(\alpha h/\sin 2\pi k h\big)^2} \leqslant\\ &\leqslant \sqrt{1+\big(\alpha h/\sin 2\pi h\big)^2} \leqslant \sqrt{1+\alpha^2/32}.\end{aligned}$$

при всех $0 < h \leqslant 1/8$, $k = 1,2,\dots,m-1$, приходим ко второму из неравенств (31) с константой $C_{42} = 4\alpha^{-1}\sqrt{1+\alpha^2/32}$.

Перейдём к доказательству ограниченности величин $\|w_0^*(x)\|$, $\|w_{2m-1}^*(x)\|$ и $\|w_{2m}^*(x)\|$. Непосредственно проверяется, что

$$w_0^*(x) = 4\big(\,\mathrm{sinc}\,\delta_0\big)^{-1}\big(1+h\sin(2\delta_0)\mathrm{ctg}2\delta_0\mathrm{h}\big)^{-1}\cos\big(\delta_0(1-2\mathrm{x})\big).$$

Так как $h\sin(2\delta_0)\mathrm{ctg}2\delta_0\mathrm{h} > 0$ при $0 < h \leqslant 0.5$, то $|w_0^*(x)| < 2\pi$, $x\in\omega_h$, т.е. функция w_0^* ограничена в пространстве H.

Вычисляя скалярное произведение $(f_m^{(1)}, v_m^{(1)}]$, получим

$$w_{2m}^*(x) = -2\big(\sin\psi_m\big)^{-1}\cos(2\pi m x+\psi_m).$$

Ограниченность функции $w_{2m}^*(x)$ при фиксированном $\alpha > 0$ вытекает из соотношений

$$\big(\sin\psi_m\big)^{-2} = 1 + (\sin\pi h)^2/(\alpha h)^2 < 1 + (\pi/\alpha)^2, \quad h > 0.$$

Ограниченность величины $\|w_{2m-1}^*(x)\|$ докажем отдельно для случая $0 < \alpha < 2$, $\alpha = 2$ и $\alpha > 2$. Пусть $0 < \alpha < 2$, тогда

$$w_{2m-1}^*(x) = 2(-1)^m\big(\sin\delta_m\big)^{-1}\big(1+h\sin(2\delta_m)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{m}\mathrm{h}\big)^{-1}\cos\big(\phi_\mathrm{m}(1-2\mathrm{x})\big).$$

Так как

$$1+h\sin(2\delta_m)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{m}\mathrm{h} = 1 - \frac{\cos\big((\pi-2\delta_\mathrm{m})\mathrm{h}\big)}{\mathrm{sinc}\big((\pi-2\delta_\mathrm{m})\mathrm{h}\big)}\,\mathrm{sinc}\,(\pi-2\delta_\mathrm{m}),$$

то $1+h\sin(2\delta_m)\mathrm{ctg}2\phi_\mathrm{m}\mathrm{h} > 1 - \mathrm{sinc}\,(\pi-2\delta_\mathrm{m})$ и, в силу леммы 4, знаменатель функции $w_{2m-1}^*(x)$ больше положительной константы при $h > 0$. Следовательно, сама функция ограничена при каждом фиксированном $\alpha > 0$.

Случай $\alpha = 2$ тривиален. Пусть $\alpha > 2$, тогда

$$w^*_{2m-1}(x_j) = \frac{4\Phi^2(-1)^j(1-2x)(\operatorname{shc}\Phi)\operatorname{shc}\Phi(1-2x)}{1 - h\sinh(2\Phi)\coth 2\Phi h},$$

где $\operatorname{shc} y = y^{-1}\sinh y$, $y > 0$. Величина Φ является решением уравнения $\alpha h \tanh\phi = \sinh 2h\phi$, $\phi > 0$ и, согласно лемме 2, ограничена при $h \to 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(x,h) = (-1 + h\sinh(2x)\coth 2hx)/x^2$$

на множестве $x > 0$, $0 < h \leqslant 0.5$. Функция $f(x,h)$ монотонно возрастает при каждом $x > 0$ по переменной h и, следовательно, удовлетворяет условию

$$f(x,h) > \lim_{h\to+0} f(x,h) = x^{-2}\big(\operatorname{shc}(2x) - 1\big), \quad x > 0,\ 0 < h \leqslant 0.5.$$

Отсюда и из неравенства $x^{-2}\big(\operatorname{shc}(2x) - 1\big) > 2/3$, $x > 0$ вытекает, что $1/f(\Phi,h) < 3/2$, $0 < h \leqslant 0.5$ и функция $w^*_{2m-1}(x)$ является ограниченной при каждом $\alpha > 0$.

Пусть $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ – коэффициенты разложения функции $y(x) \in H$ по базису U, состоящему из корневых функций оператора A при $\alpha = 0$, то есть $y(x) = y_0u_0(x) + y_1u_1(x) + \ldots + y_{N-1}u_{N-1}(x)$, $y_j = (y, u^*_j]$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Неравенства, полученные в [1], гарантируют существование констант $C_1, C_2 > 0$, не зависящих от $h > 0$, таких, что

$$C_1\|y\|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} y_j^2 \leqslant C_2\|y\|^2 \tag{32}$$

для любой $y(x) \in H$.

Этот факт, а также квадратичная близость систем функций U, W и U^*, W^* позволяют вычислить константы эквивалентности нормы $\|\cdot\|_D$ со среднеквадратической сеточной нормой.

Теорема 7. *При каждом фиксированном $\alpha > 0$ существуют константы $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$, не зависящие от выбора $h > 0$, такие, что*

$$\tilde{C}_1\|y\|^2 \leqslant \|y\|^2_D \leqslant \tilde{C}_2\|y\|^2$$

для любой $y(x) \in H$.

Доказательство. В силу равенств (26) достаточно оценить сумму квадратов коэффициентов разложения функции $y(x)$ по системе W.

Пусть $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{N-1}$ – координаты функции $y(x)$ в базисе W, тогда

$$\tilde{y}_j = (y, w_j^*] = (y, w_j^* - u_j^*] + (y, u_j^*], \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{y}_j^2 \leqslant 2\|y\|^2 \|w_j^* - u_j^*\|^2 + 2y_j^2, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ – координаты функции $y(x)$ в базисе U. Просуммировав данное равенство по j от нуля до $N-1$ и воспользовавшись теоремой 6, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{y}_j^2 \leqslant 2C_{eqv}\|y\|^2 + 2\sum_{j=0}^{N-1} y_j^2,$$

причём константа квадратичной близости C_{eqv} не зависит от выбора $h > 0$. Последнее неравенство, а также неравенства (32), гарантируют существование константы $\tilde{C}_2$, удовлетворяющей условию теоремы.

В силу неравенства треугольника справедливо соотношение

$$\|y(x)\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k \big(w_k(x) - u_k(x)\big) \right\| + \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{y}_k u_k(x) \right\|,$$

из которого с учётом неравенств (32) следует, что

$$\|y\| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{y}_k| \, \|w_k(x) - u_k(x)\| + \big(C_1^{-1}(\tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_1^2 + \ldots + \tilde{y}_{N-1}^2)\big)^{1/2}.$$

Воспользуемся здесь неравенством Коши-Буняковского и возведём в квадрат, в результате получим

$$\|y\|^2 \leqslant 2\left(\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{y}_j^2\right)\left(C_1^{-1} + \sum_{j=0}^{N-1} \|w_j(x) - u_j(x)\|^2\right).$$

Отсюда и из квадратичной близости систем U, W вытекает существование константы $\tilde{C}_1$, удовлетворяющей условию данной теоремы.

Следствием теоремы 5 и теоремы 7 является следующее основное утверждение настоящей работы.

Теорема 8. *Разностная схема (5) при каждом $\alpha > 0$ является устойчивой по начальным данным в среднеквадратической сеточной норме, если её параметры удовлетворяют неравенству (25).*

Литература

1. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Устойчивость нелокальных разностных схем. М.,УРСС, 2008.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд. М., Наука, 1989.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. 2-е изд. М.,УРСС, 2005.
4. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Уч. зап. МГУ, №4, вып. 148, с. 69-107, М., 1951.