А.В. Гулин, Н.И. Ионкин, В.А. Морозова

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПО ПРАВОЙ ЧАСТИ

В работах [1] – [3] получены необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным двуслойных разностных схем, аппроксимирующих уравнение теплопроводности с нелокальными граничными условиями. В настоящей работе для рассмотренных в [1] – [3] разностных схем построены априорные оценки, выражающие устойчивость по правой части. Отметим, что ограничения на шаги сетки, гарантирующие устойчивость по правой части, совпадают с найденными ранее критериями устойчивости по начальным данным.

1. Исходная задача и разностные схемы. Рассматриваются разностные схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{1}$$

с нелокальными граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \gamma\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \tag{2}$$

где $\gamma \in (0,\ 1]$ – числовой параметр. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ введем сетку с узлами $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ и шагом $h = 1/N$. По времени вводится сетка с узлами $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots$, с шагом $\tau > 0$. Заменим исходную задачу (1), (2) разностной схемой с весами

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x,i}^n + \varphi_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau} = \frac{2}{h}\left[\sigma(\gamma y_{x,0}^{n+1} - y_{\bar{x},N}^{n+1}) + (1-\sigma)(\gamma y_{x,0}^n - y_{\bar{x},N}^n)\right] + \varphi_N^n, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad y_0^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{gathered} \tag{4}$$

В качестве правой части можно взять, например, сеточную функцию

$$\varphi_i^n = \sigma f_i^{n+1} + (1-\sigma) f_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\varphi_N^n = \sigma(\gamma f_0^{n+1} + f_N^{n+1}) + (1-\sigma)(\gamma f_0^n + f_N^n).$$

Приведем разностную схему (3), (4) к каноническому виду [4]. Введем сеточное пространство H, состоящее из вещественных векторов $y = (y_1 \, y_2 \, \dots \, y_N)^T$, где $y_i = y(x_i)$, с покоординатным сложением и умножением на число. Определим в H скалярное произведение и норму

$$(y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h + 0,5 y_N v_N h, \quad ||y]| = \sqrt{(y, y]}. \tag{5}$$

Обозначим $y_n = (y_1^n \, y_2^n \, \dots \, y_N^n)^T$, $\varphi_n = (\varphi_1^n \, \varphi_2^n \, \dots \, \varphi_N^n)^T$ и запишем (3) в векторном виде

$$\begin{gathered}\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + \sigma A y_{n+1} + (1 - \sigma) A y_n = \varphi_n, \quad n = 0,\, 1,\, \dots\,, \\ y_0(x_i) = u_0(x_i),\end{gathered} \tag{6}$$

где оператор $A : H \to H$ определен как

$$\begin{gathered}(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \; i = 1,\, 2,\, \dots\,,\, N - 1, \; y_0 = 0, \\ (Ay)_N = -\frac{2}{h}\left(\gamma y_{x,0} - y_{\bar{x},N}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

2. Абстрактная схема с весами. Разностная схема (6) представляет собой частный случай двуслойной схемы

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = \varphi_n, \quad n = 0,\, 1,\, \dots\,, \quad y_0 \text{ задан}, \tag{8}$$

когда $B = E + \sigma \tau A$. Здесь $y_n = y(t_n) \in H$, где H – конечномерное линейное пространство со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Предполагаем в дальнейшем, что A и B – линейные операторы, не зависящие от n, оператор B^{-1} существует. Пусть задан самосопряженный положительный оператор D и введена энергетическая норма $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Наряду с (8) рассмотрим однородное уравнение

$$B\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + A y_n = 0, \quad n = 0,\, 1,\, \dots\,, \quad y_0 \text{ задан}. \tag{9}$$

Разностная схема (8) называется *устойчивой по начальным данным в пространстве* H_D, если при любых $y_0 \in H$ для решения однородного уравнения (9) выполняются неравенства

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant (Dy_n, y_n), \quad n = 0,\, 1,\, \dots \tag{10}$$

Для устойчивости по начальным данным в H_D необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства

$$D \geqslant S^* D S, \tag{11}$$

где $S = E - \tau B^{-1} A$ – оператор перехода схемы (8). В случае схемы с весами (6) имеем $B = E + \sigma\tau A$ и (11) эквивалентно неравенству

$$DA + A^* D + (2\sigma - 1)\tau A^* D A \geqslant 0. \tag{12}$$

Известно, что для линейных уравнений устойчивость по правой части является следствием устойчивости по начальным данным. Так, для схемы с весами (6) справедливо следующее утверждение (см., например, [5]).

Теорема 1. *Предположим, что оператор A не зависит от n и оператор $B = E + \sigma\tau A$ имеет обратный. Если разностная схема (6) устойчива по начальным данным в H_D, то для решения неоднородного уравнения (6) справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \|y_0\|_D + \sum_{j=0}^{n} \tau \left\|B^{-1}\varphi_j\right\|_D. \tag{13}$$

Из (13) следует оценка

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \|y_0\|_D + t_{n+1} \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \left\|B^{-1}\varphi_j\right\|_D, \tag{14}$$

где $t_{n+1} = (n+1)\tau$. Обычно предполагается, что $t_{n+1} \leqslant T$, где постоянная $T > 0$ не зависит от n. Наличие оценок вида (13) или (14) означает устойчивость разностной схемы (6) по начальным данным и по правой части.

В оценках (13), (14) правая часть измеряется в норме $\left\|B^{-1}\varphi_n\right\|_D$. Можно упростить норму правой части, как это сделано в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть оператор A не зависит от n и $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. Если разностная схема (6) устойчива в H_D по начальным данным, то для решения неоднородного уравнения (6) справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \|y_0\|_D + \sum_{j=0}^{n} \tau \|\varphi_j\|_D. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого элемента $\varphi \in H$ выполняется неравенство

$$\left\|B^{-1}\varphi\right\|_D \leqslant \|\varphi\|_D . \tag{16}$$

Отсюда и из оценки (13) следует требуемое неравенство (15). Условие (16) можно записать в виде операторного неравенства

$$B^{*-1}DB^{-1} \leqslant D$$

или в виде эквивалентного неравенства

$$D \leqslant B^*DB. \tag{17}$$

Подставляя сюда $B = E + \sigma\tau A$, приходим к условию

$$\sigma\tau(DA + A^*D) + \sigma^2\tau^2A^*DA \geqslant 0. \tag{18}$$

Покажем, что при $\sigma \in [0,\ 1]$ неравенство (18) следует из условия устойчивости по начальным данным (12).

Действительно, из (12) получаем

$$DA + A^*D \geqslant -(2\sigma - 1)\tau A^*DA$$

и

$$\sigma\tau(DA + A^*D) + \sigma^2\tau^2A^*DA \geqslant \left[-\sigma(2\sigma - 1)\tau^2 + \sigma^2\tau^2\right] A^*DA =$$

$$= \sigma(1 - \sigma)\tau^2A^*DA \geqslant 0,$$

следовательно при $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ справедливо неравенство (16). Теорема 2 доказана.

Предположим теперь, что норма $\|y\|_D$, определяемая оператором D, эквивалентна сеточной L_2-норме. Это означает, что существуют константы $\kappa_2 > \kappa_1 > 0$, не зависящие от h и такие, что для любого $y \in H$ выполнены неравенства

$$\kappa_1 \|y\|^2 \leqslant (Dy, y) \leqslant \kappa_2 \|y\|^2 . \tag{19}$$

Теорема 3. *Пусть разностная схема (6) устойчива по начальным данным в H_D и оператор D удовлетворяет условию (19). Тогда для решения неоднородного уравнения (6) справедлива оценка*

$$\|y_{n+1}\| \leqslant \sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \left(\|y_0\| + \sum_{j=0}^{n} \tau \left\|B^{-1}\varphi_j\right\| \right), \tag{20}$$

означающая устойчивость разностной схемы (6) в сеточной L_2-норме.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1, для решения задачи (6) справедлива оценка (13). Из условия (19) следуют неравенства

$$\|y_{n+1}\|_D \geqslant \sqrt{\kappa_1}\,\|y_{n+1}\|, \quad \|y_0\|_D \leqslant \sqrt{\kappa_2}\,\|y_0\|, \quad \left\|B^{-1}\varphi_j\right\|_D \leqslant \sqrt{\kappa_2}\left\|B^{-1}\varphi_j\right\|,$$

подставляя которые в оценку (13), получаем (20).

3. Устойчивость по правой части разностной схемы с нелокальными граничными условиями. Предыдущие утверждения относились к общей схеме с весами. Обратимся теперь к разностной схеме (3), (4). Исследование устойчивости по начальным данным этой разностной схемы проведено в работах [1] – [3]. Не приводя подробного описания оператора нормы D, отметим лишь, что этот оператор имеет вид

$$D = (hMM^*)^{-1}, \tag{21}$$

где M – матрица, столбцами которой являются собственные (а в случае $\gamma = 1$ – собственные и присоединенные) векторы основного разностного оператора (7). Показано, что норма $\|y\|_D$, порожденная оператором (21), эквивалентна сеточной норме L_2, так что выполнены неравенства (19). При этом

$$\begin{gathered}\kappa_1 = 4/11, \quad \kappa_2 = 16 \text{ при } \gamma = 1,\\ \kappa_1 = 0,5, \quad \kappa_2 = 4/(1-\gamma^2) \text{ при } 0 < \gamma < 1.\end{gathered} \tag{22}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости по начальным данным разностной схемы (3), (4) в пространстве H_D, где оператор H_D определен согласно (21), является выполнение неравенства

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \tag{23}$$

Следующая теорема об устойчивости разностной схемы (3), (4) по правой части является очевидным результатом применения критерия (23) и оценок (13), (15) к схеме с нелокальными граничными условиями.

Теорема 4. *Пусть оператор нормы D задан согласно (20) и выполнено условие (23). Тогда для решения разностной задачи (3), (4) справедлива оценка (12). Если, кроме того, $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, то выполняется и оценка (14).*

Справедлива также следующая теорема об устойчивости в сеточной L_2-норме.

Теорема 5. *Пусть оператор нормы D задан согласно (21) и выполнено условие устойчивости (23). Тогда для решения разностной задачи (3), (4) справедлива оценка*

$$||y_{n+1}|| \leqslant M\left(||y_0|| + \sum_{j=0}^{n}\tau||B^{-1}\varphi_j||\right),$$

где $B = E + \sigma\tau A$, $M = 2\sqrt{11}$ *при* $\gamma = 1$ *и* $M = 2\sqrt{2}/\sqrt{1-\gamma^2}$ *при* $\gamma \in (0,\ 1)$. *Если, кроме того,* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, *то выполняется и оценка*

$$||y_{n+1}|| \leqslant M\left(||y_0|| + \sum_{j=0}^{n}\tau||\varphi_j||\right).$$

Доказательство следует из теорем 2, 4 и неравенств (19) с константами (22).

Литература

1. Goolin A. V., Ionkin N. I., Morozova V. A. Difference schemes with nonlocal boundary conditions. Computational methods in applied mathematics, Vol. 1 (2001), N 1. P. 62 – 71.

2. Гулин А. В., Морозова В. А. Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи. Дифференциальные уравнения. 2003. **39**, N 7, c. 912-917.

3. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В.А. Разностные схемы для нелокальных задач. Известия Вузов. Математика, 2005, N 1(512), c. 40- 51.

4. Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд. М., Наука, 1989.

5. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. 2-е изд. М., УРСС, 2005.