А.В. Гулин, Н.И. Ионкин, В.А. Морозова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ [1]

1. Введение. В работе дается краткий обзор исследований по теории устойчивости разностных схем для нестационарных задач математической физики, в которых пространственный дифференциальный оператор подчинен краевым условиям, связанным на различных кусках границы. Типичным примером является уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Благодаря несимметричности граничных условий, данная задача не является самосопряженной. Точнее, несамосопряженным является дифференциальный оператор

$$Lu(x) = -u''(x), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = u'(1). \tag{3}$$

Обычный метод разделения переменных сводится к разложению решения по ортогональному базису, состоящему из собственных функций пространственного оператора. Здесь такого базиса нет и, следовательно, возникают определенные трудности при обосновании метода разделения переменных. Задачи вида (1), (2) и более сложные изучались в работах В. А. Ильина, Е. И. Моисеева и их учеников [1] – [4]. Было показано, что для операторов вида (3) существует базис Рисса, состоящий из собственных и присоединенных функций. Опираясь на разложение по базису Рисса, в упомянутых работах доказано существование и единственность многих задач с нелокальными граничными условиями.

Разностные схемы для задачи (1), (2) впервые рассмотрел Н. И. Ионкин [5] в 1977 году. Здесь в явном виде построен базис из собственных и присоединенных функций разностного оператора, и на этой основе получены достаточные условия устойчивости разностных схем

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00555) и программы "Университеты России".

с весами. В 2000 году в работе Н. И. Ионкина и В. А. Морозовой [6] была предпринята попытка вложить исследование разностных схем с нелокальными граничными условиями в общую теорию устойчивости разностных схем, предложенную А. А. Самарским в работах [7], [8]. Такое вложение позволило бы получить необходимые и достаточные условия устойчивости в различных нормах.

Напомним о некоторых положениях общей теории устойчивости. Любая линейная двуслойная разностная схема записывается в канонической форме

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0, \quad n=0,\,1,\,\ldots, \tag{4}$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ – функция дискретного аргумента $t_n = n\tau$ со значениями в конечномерном линейном пространстве H и A и B – линейные операторы, действующие в H.

Схема (4) называется устойчивой в пространстве H_D, если существует самосопряженный положительный оператор D такой, что для решения уравнения (4) при любых начальных данных выполняются неравенства

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant (Dy_n, y_n), \quad n=0,\,1,\,\ldots \tag{5}$$

Иначе говоря, устойчивость в H_D означает, что квадратичная форма (Dy, y) является невозрастающей функцией времени на решении задачи (4). Как известно, в теории дифференциальных уравнений такие функции называются функциями Ляпунова. Итак, в рамках общей теории требуется построить функцию Ляпунова (Dy, y) и выяснить, при каких минимальных ограничениях на шаг τ выполняются неравенства (5). Заметим, что условие устойчивости разностной схемы зависит от выбора функции (Dy, y). Поэтому возникает проблема построения такой функции Ляпунова, для которой условие устойчивости налагает минимальные ограничения на шаги сетки.

Для самосопряженного оператора A эти задачи были решены в цитированных выше работах А. А. Самарского. Для несамосопряженного оператора A эти задачи в общем случае не решены и до сих пор, рассмотрены лишь отдельные частные случаи. Один из таких случаев, когда несамосопряженность разностных задач возникает в связи с нелокальными краевыми условиями, и рассматривается в настоящей работе.

Ограничимся явными схемами

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad y_n = y(t_n), \quad t_n = n\tau. \qquad (6)$$

Обобщение на случай неявных схем с весами получено, оно несложно и здесь не затрагивается.

2. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями. Рассмотрим явную разностную схему

$$\begin{gathered}
\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = y_{\bar{x}x,i}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad Nh = 1, \ n = 0, 1, \ldots, \\
y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \qquad \frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau} = \frac{2}{h}(y_{x,0}^n - y_{\bar{x},N}^n),
\end{gathered} \qquad (7)$$

аппроксимирующую задачу (1), (2). Схема записывается в каноническом виде (6), причем оператор A представляется матрицей вида

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

где $h = N^{-1}$, и для наглядности полагается $N = 5$. Видно, что вследствие влияния граничных условий матрица A не является симметричной. Принципиально важным является тот факт, что матрица A подобна некоторой жордановой матрице с клетками второго порядка, а именно существует невырожденная матрица V такая, что

$$V^{-1}AV = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 34.549 & 9.511 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34.549 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 90.451 & 5.878 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 90.451 \end{array}\right],$$

то есть матрица V приводит A к верхней форме Жордана. Видно, что все собственные значения вещественные и, более того, неотрицательные.

В случае матриц нечетного порядка имеется одно простое собственное значение (оно минимальное и равно нулю), все остальные собственные значения двукратные. Собственные значения λ_k матрицы A и ненулевые внедиагональные элементы $p = p_k$ жордановых клеток для нечетного N имеют вид

$$\begin{gathered}\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2 \pi kh, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, m = (N-1)/2, \\ p_k = -2\sqrt{\lambda_k}\cos \pi kh = -\frac{2}{h}\sin 2\pi kh, \quad k = 1, 2, \ldots, m.\end{gathered} \tag{8}$$

В случае матриц четного порядка простым является также наибольшее собственное значение.

Отметим, что столбцами матрицы V являются собственные и присоединенные векторы матрицы A, расположенные в определенном порядке. Так, в случае $N = 5$ матрица V имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} x_1 & \sin 2\pi x_1 & x_1 \cos 2\pi x_1 & \sin 4\pi x_1 & x_1 \cos 4\pi x_1 \\ x_2 & \sin 2\pi x_2 & x_2 \cos 2\pi x_2 & \sin 4\pi x_2 & x_2 \cos 4\pi x_2 \\ x_3 & \sin 2\pi x_3 & x_3 \cos 2\pi x_3 & \sin 4\pi x_3 & x_3 \cos 4\pi x_3 \\ x_4 & \sin 2\pi x_4 & x_4 \cos 2\pi x_4 & \sin 4\pi x_4 & x_4 \cos 4\pi x_4 \\ x_5 & \sin 2\pi x_5 & x_5 \cos 2\pi x_5 & \sin 4\pi x_5 & x_5 \cos 4\pi x_5 \end{bmatrix}.$$

Тем самым, исходная схема (7) распадается на m разностных схем с жордановой клеткой второго порядка

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\tau} + Jw_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

где

$$w_n = \begin{pmatrix} w_1^{(n)} \\ w_2^{(n)} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & p \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad p \neq 0 \tag{10}$$

и $\lambda = \lambda_k$, $p = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

3. Явная разностная схема с жордановой клеткой второго порядка. Остановимся подробнее на вопросе об устойчивости схемы (9), (10) в пространстве H_D. Пусть

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

– матрица с вещественными элементами, и скалярное произведение задано правилом

$$(y, v) = r_1 y_1 v_1 + r_2 y_2 v_2,$$

где r_1 и r_2 – положительные постоянные. Тогда сопряженный к D оператор представляется матрицей

$$D^* = \begin{bmatrix} d_{11} & \dfrac{r_2}{r_1} d_{21} \\ \dfrac{r_1}{r_2} d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, любой самосопряженный оператор представляется матрицей

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12}\dfrac{r_1}{r_2} & d_{22} \end{bmatrix}$$

Из рассмотрения минимального собственного значения последней матрицы, равного

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{2}\left(d_{11} + d_{22} - \sqrt{(d_{11} - d_{22})^2 + 4\frac{r_1}{r_2} d_{12}^2}\right),$$

находим критерий положительности

$$d_{11} > 0, \quad r_2 d_{11} d_{22} - r_1 d_{12}^2 > 0 \tag{11}$$

и критерий неотрицательности

$$d_{11} \geqslant 0, \quad r_2 d_{11} d_{22} - r_1 d_{12}^2 \geqslant 0 \tag{12}$$

самосопряженного оператора D. Заметим, что в неравенствах (11) и (12) условия $d_{11} > 0$ и $d_{11} \geqslant 0$ можно заменить соответственно условиями $d_{22} > 0$ и $d_{22} \geqslant 0$.

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем, что $d_{11} = 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = r > 0$ и выбираем оператор нормы в виде

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ r^{-1}\alpha & \beta \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где α и $\beta > 0$ – произвольные пока параметры и $r\beta - \alpha^2 = \Delta > 0$.

Из определения устойчивости (5) следует, что явная схема (9), (10) с $\lambda > 0$ устойчива в пространстве H_D, определяемом оператором (13) тогда и только тогда, когда шаг τ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \tau \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(2 - \frac{|p|}{\lambda\sqrt{\Delta}}\right), \text{ где } \Delta = r\beta - \alpha^2 > 0. \tag{14}$$

Правая часть неравенства (14) является возрастающей функцией Δ, поэтому условие устойчивости налагает минимальное ограничение на шаг τ при выборе $\alpha = 0$. Итак, оптимальным является оператор нормы

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости в пространстве H_D, порожденным оператором (15), является выполнение неравенства

$$0 < \tau \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(2 - \frac{|p|}{\lambda\sqrt{r\beta}}\right), \tag{16}$$

где $r > 0$ – константа, входящая в определение скалярного произведения $(y, v) = y_1 v_1 + r y_2 v_2$.

Важно отметить, что при любом выборе нормы условие (16) накладывает более сильное ограничение на шаг τ, чем необходимое условие устойчивости $0 < \tau\lambda \leqslant 2$. Условие (16) переходит в необходимое условие устойчивости лишь в пределе при $\beta \to \infty$.

Неравенство

$$2 - \frac{|p|}{\lambda\sqrt{r\beta}} > 0,$$

следующее из (16), можно рассматривать как ограничение на параметр β, входящий в матрицу (15):

$$\beta > \frac{p^2}{4\lambda^2 r}. \tag{17}$$

4. Критерий устойчивости явной разностной схемы. Прежде чем формулировать теорему об устойчивости разностной схемы (7), введем пространство H сеточных функций и зададим оператор D, определяющий норму.

Будем рассматривать линейное пространство H функций $y_i = y(x_i)$, определенных на сетке с узлами $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $hN = 1$ и обращающихся в нуль при $i = 0$. Скалярное произведение в H задается правилом

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} hy_i v_i + 0,5hy_N v_N. \tag{18}$$

Предполагая по-прежнему, что N – нечетное, обозначим $m = (N-1)/2$. Оператор D вводится следующим образом. Зададим произвольные пока параметры $\beta_k > 0$, определим диагональные матрицы второго порядка $D_k = \mathrm{diag}\,[1, \beta_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, аналогичные (15), и введем матрицу

$$\tilde{D} = \mathrm{diag}\,[D_0, D_1, \cdots, D_m]\,, \tag{19}$$

где $D_0 = 1$. Пусть V – матрица, приводящая матрицу оператора A разностной схемы (7) к жордановой форме (для случая $N = 5$ матрица V была выписана в п. 2). Обозначим через V^* матрицу, сопряженную V в смысле скалярного произведения (18) и построим матрицу $D = V^{*-1}\tilde{D}V^{-1}$.

Оператор D, заданный такой матрицей, и примем в качестве оператора нормы. Таким образом,

$$\|y\|_D^2 = (V^{*-1}\tilde{D}V^{-1}y, y) = \left\|V^{-1}y\right\|_{\tilde{D}}^2. \tag{20}$$

Определим функцию

$$r_k = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad r_m = 0,5. \tag{21}$$

При этом скалярное произведение (18) представляется в виде суммы скалярных произведений в пространствах размерности 2:

$$(y, v) = \sum_{k=0}^{m} h\big(y_{2k}v_{2k} + r_k y_{2k+1}v_{2k+1}\big), \quad y_0 = v_0 = 0.$$

В работе [6] доказана следующая теорема об устойчивости разностной схемы (7).

Теорема 1 . *Для устойчивости разностной схемы (7) в пространстве H_D, где $D = V^{*-1}\tilde{D}V^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$0 < \tau \leqslant \frac{1}{\lambda_k}\left(2 - \frac{h\operatorname{ctg}\pi kh}{\sqrt{r_k\beta_k}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{22}$$

В основе доказательства лежит приведение матрицы A к жордановой форме и использование критерия устойчивости (16) в пространстве размерности 2.

5. Имитация переменных коэффициентов. Техника, развитая в указанных выше работах и основанная на явных решениях разностных задач на собственные значения, не распространяется на случай операторов с переменными (зависящими от x) коэффициентами. Более того, в работе [9] приведены примеры численных расчетов, показывающие, что в случае переменных коэффициентов собственные значения соответствующего разностного оператора могут быть простыми. Насколько нам известно, факт простоты спектра в случае переменных коэффициентов до сих пор не доказан строго теоретически.

В работе [10] приведен пример, в определенном смысле имитирующий задачу с переменными коэффициентами, но допускающий построение точного решения в аналитическом виде. Показано, что спектр рассматриваемого разностного оператора является простым, и только в случае постоянных коэффициентов возникают кратные собственные значения. Следствием простоты спектра является базисность системы собственных векторов разностной задачи.

Пример состоит в следующем. Рассмотрим то же самое уравнение теплопроводности (1), а граничные условия (2) заменим условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \gamma\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \tag{23}$$

где $\gamma \neq 0$ – числовой параметр. Условия (2) получаются из (23) при $\gamma = 1$.

Задача (1), (23) при $\gamma \neq 1$ в каком-то смысле имитирует задачу с переменными коэффициентами. Действительно, для уравнения с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

условие равенства потоков на границе имеет вид

$$k(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k(1)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t),$$

то есть выполнены условия (23) с $\gamma = k(0)/k(1)$. Таким образом, имитация состоит в том, что основное уравнение (1) остается неизменным, а переменные коэффициенты вводятся только в нелокальное граничное условие.

Оказывается, что при $0 < \gamma < 1$ спектр дифференциальной задачи

$$\begin{gathered} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad \gamma u'(0) = u'(1) \end{gathered} \tag{24}$$

является простым. Нетрудно показать, что эта задача имеет собственные значения

$$\lambda_k^{(1)} = (2\pi k - \psi)^2, \quad \lambda_k^{(2)} = (2\pi k + \psi)^2,$$

и отвечающие им собственные функции

$$u_k^{(1)}(x) = \sin(2\pi k - \psi)x, \quad u_k^{(2)}(x) = \sin(2\pi k + \psi)x,$$

где $k = 0,\ 1,\ \ldots$ и $\psi = \arccos\gamma$. Каждому собственному значению отвечает с точностью до множителя только одна собственная функция. Присоединенных функций задача (24) с $0 < \gamma < 1$ не имеет.

При $\psi \to 0$, то есть при $\gamma \to 1+0$ получаем, что $\lambda_k^{(1)} \to \lambda_k$ и $\lambda_k^{(2)} \to \lambda_k$, где $\lambda_k = 4\pi^2 k^2$ – кратное собственное значение нелокальной задачи (24) с $\gamma = 1$.

Аналогичная ситуация имеет место и в разностном случае. Для задачи (1), (23) рассмотрим явную разностную схему

$$\begin{gathered} \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = y_{\bar{x}x,i}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad Nh = 1, \\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad \gamma y_{x,0}^n - y_{\bar{x},N}^n = \frac{h}{2}\frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau}. \end{gathered} \tag{25}$$

Схема имеет канонический вид (6), где оператор A определяется правилом

$$\begin{gathered} (Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i},\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ y_0 = 0, \\ (Ay)_N = -\frac{2}{h}(\gamma y_{x,0} - y_{\bar{x},N}). \end{gathered} \tag{26}$$

В следующей таблице приведены собственные значения оператора A в случае $N = 5$ и различных γ.

$\gamma\backslash\lambda_k$	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1.000	0	34.549	34.549	90.451	90.451
0.500	1.093	25.000	44.774	83.457	95.677
0.333	1.508	23.426	46.604	82.069	96.394
0.250	1.727	22.692	47.474	81.395	96.712
0.010	2.416	20.692	49.900	79.470	97.522

Видно, что при $0 < \gamma < 1$ все собственные значения положительные и различные. Заметим, что при $\gamma > 1$ собственные значения матрицы A – комплексные. Например, при $\gamma = 2$ и $N = 5$ имеем $\lambda_0 = -1.744$, $\lambda_{1,2} = 34.010 \pm 12.670i$, $\lambda_{3,4} = 91.862 \pm 7.831i$.

Необходимым условием устойчивости схемы (25) является условие

$$\frac{\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{27}$$

В работе [10] построено семейство пространств H_D, в которых необходимое условие устойчивости (27) является и достаточным. Пусть μ – матрица порядка N, столбцами которой являются нормированные собственные векторы оператора A, определенного согласно (26). При $0 < \gamma < 1$ спектр оператора A является простым, следовательно, система его собственных функций образует базис и матрица μ – невырожденная.

Будем рассматривать матрицу μ как линейный оператор, действующий из H в H. Зададим самосопряженный и положительный в H оператор

$$D = (\mu\mu^*)^{-1}. \tag{28}$$

Теорема 2 (см. [10]) . *Пусть $0 < \gamma < 1$ и оператор D определен согласно (28). Разностная схема (25) устойчива в норме H_D тогда и только тогда, когда выполнено условие (27).*

В работах [11], [12] полученные результаты обобщены на двумерный случай (прямоугольная область). Здесь рассматривается двумерная по пространству задача теплопроводности с краевыми условиями первого рода по одной из пространственных переменных и нелокальными условиями – по другой.

Литература

1. Ильин В.А. Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных и присоединенных функций пучка М. В. Келдыша обыкновенных дифференциальных операторов. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, N.4, с. 28-31.

2. Ильин В.А. Об абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного эллиптического оператора. ДАН СССР. 1984. Т. 274, N. 1. с. 19-22.

3. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках. ДАН СССР, 1986, т. 291, N.3, с. 534-539.

4. Самарская Т.А. Абсолютная и равномерная сходимость разложения по корневым функциям нелокальной краевой задачи I рода. Дифференциальные уравнения. 1989. **25**, N 7. с. 1155-1160.

5. Ионкин Н.И. Разностные схемы для одной неклассической задачи. Вестн. Моск. унив., сер. 15, выч. матем. и киб., 1977, N 2, с. 20-32.

6. Ионкин Н.И., Морозова В.А. Устойчивость разностных схем с нелокальными граничными условиями. Вестник Московского университета, серия 15, Вычислительная математика и кибернетика, 2000, № 3, с. 19-23.

7. Самарский А. А. О регуляризации разностных схем // ЖВМиМФ. 1967. 7, N 1. с. 62-93.

8. Самарский А. А. Классы устойчивых разностных схем // ЖВМиМФ. 1967. 7, N 5. с. 1096-1133.

9. Ионкин Н.И., Валикова Е.А. О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи. Математическое моделирование, 1996, т. 8, N. 1, с. 53- 63

10. Гулин А.В., Морозова В.А. Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи. Дифференциальные уравнения. 2003. **39**, N 7. с. 912-917.

11. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. Об устойчивости нелокальной двумерной разностной задачи. Дифференц. уравнения. 2001. **37**, N 7. с. 926-932.

12. Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В.А. Об одной нелокальной двумерной разностной задаче. Вестник Московского университета, серия 15, Вычислительная математика и кибернетика, 2004, № 1, с. 5-9.