А. В. Гулин, В. А. Морозова

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ [1]

1. Введение. В работах [1]-[4] изучалась устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \tag{1}$$

с нелокальными граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t). \tag{2}$$

Собственные значения оператора второй производной, подчиненного граничным условиям (2) являются кратными, а система собственных функций не является полной. При исследовании разностных схем в работах [1]-- [4] использовалось разложение по базису из собственных и присоединенных функций. Предложенная в этих работах методика, основанная на разделении переменных, не распространяется на случай переменных коэффициентов. Более того, результаты численных расчетов [3] показывают, что в случае переменных коэффициентов собственные значения соответствующего разностного оператора являются простыми.

В настоящей работе приведен пример, в определенном смысле имитирующий задачу с переменными коэффициентами и допускающий построение точного решения в аналитическом виде. Показано, что спектр рассматриваемого разностного оператора является простым, и только в случае постоянных коэффициентов переходит в кратный. Следствием простоты спектра является базисность системы собственных векторов разностной задачи. Это обстоятельство позволяет применить к нелокальной задаче теорию устойчивости симметризуемых разностных схем, развитую в работах [5]-[7].

2. Спектр дифференциальной и разностной задач. Пример, о котором упоминалось выше, состоит в следующем. Заменим граничные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00555).

условия (2) условиями

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \beta \frac{\partial u}{\partial x}(1,t), \tag{3}$$

где $\beta \neq 0$ – числовой параметр. Оказывается, что при $\beta \neq 1$ полученная задача в каком-то смысле имитирует задачу с переменными коэффициентами. Действительно, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

нелокальное условие задается в виде равенства потоков

$$k(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = k(1,t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t),$$

то есть в виде условия (3) с $\beta = k(1,t)/k(0,t) \neq 1$.

Покажем, что такое незначительное, на первый взгляд, изменение, как введение параметра в граничные условия, коренным образом меняет спектр оператора. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = \beta u'(1). \tag{4}$$

В случае $\beta = 1$ получаем известную задачу на собственные значения, разностный аналог которой исследован в работах [1]-[2]. Задача (4) с $\beta = 1$ имеет простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ и отвечающую ему собственную функцию $u_0(x) = x$ и собственные значения $\lambda_k = (2\pi k)^2$, которым отвечают собственные функции $u_k(x) = \sin 2\pi kx$, $k = 1, 2, \ldots$

Далее будем предполагать, что $\beta > 1$. Обозначим $\gamma = \beta^{-1}$ и $\psi = \arccos\gamma$. Нетрудно показать, что задача (4) имеет собственные значения

$$\lambda_k^{(1)} = (2\pi k - \psi)^2, \quad \lambda_k^{(2)} = (2\pi k + \psi)^2$$

и отвечающие им собственные функции

$$u_k^{(1)}(x) = \sin(2\pi k - \psi)x, \quad u_k^{(2)}(x) = \sin(2\pi k + \psi)x,$$

где $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, при $\psi \neq 0$ (то есть при $\beta \neq 1$) нет кратных собственных значений.

Рассмотрим теперь разностную задачу на собственные значения

$$\begin{gathered} y_{\bar{x}x,i} + \lambda y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad hN = 1, \\ y_0 = 0, \quad y_{x,0} = \beta(y_{\bar{x},N} - 0,5h\lambda y_N), \end{gathered} \tag{5}$$

аппроксимирующую задачу (4) со вторым порядком по h. Для определенности будем считать в дальнейшем, что N - нечетное. Собственными значениями задачи (5) являются числа

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\psi}{2N}\right),$$

$$\lambda_k^{(1,2)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{N} \mp \frac{\psi}{2N}\right), \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, (N-1)/2,$$

им отвечают собственные векторы

$$y_0(x_j) = \sin(\psi x_j)\,, \quad y_k^{(1,2)}(x_j) = \sin((2\pi k \mp \psi)x_j).$$

При $\psi \neq 0$ ($\beta \neq 1$) все собственные значения различные и, следовательно система собственных векторов разностной задачи (5) образует неортогональный базис в N- мерном сеточном пространстве. Если же $\psi = 0$, то все собственные значения, кроме минимального, становятся двукратными, а система собственных функций перестает быть базисной. При малых ψ спектр распадается на группы, состоящие из двух близко расположенных собственных значений.

Приведенный пример подтверждает вывод о том, что наличие переменных коэффициентов приводит к исчезновению кратных собственных значений.

3. Исследование устойчивости. Рассмотрим нестационарную задачу (1), (3) и явную разностную схему для нее:

$$\begin{gathered}\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = y_{\bar{x}x,i}^n, \quad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad Nh = 1,\\ y_i^0 = u_0(x_i), \quad y_0^{n+1} = 0, \quad y_{x,0}^n - \beta y_{\bar{x},N}^n = \frac{\beta h}{2}\frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau}.\end{gathered} \tag{6}$$

Схема (6) имеет канонический вид

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0, \quad n = 0,\, 1,\, \ldots, \quad y_0 \text{ задан}, \tag{7}$$

где оператор A определяется равенствами

$$\begin{gathered}(Ay)_i = -y_{\bar{x}x,i}, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, N-1, \quad hN = 1,\\ y_0 = 0, \quad (Ay)_N = -\frac{2}{h}\left(\frac{1}{\beta}y_{x,0} - y_{\bar{x},N}\right).\end{gathered} \tag{8}$$

Пусть H – евклидово пространство со скалярным произведением (y, v) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Для самосопряженного положительного оператора $D : H \to H$ определим $\|y\|_D = \sqrt{(Dy, y)}$. Следуя [8], будем говорить, что разностная схема *устойчива в пространстве* H_D, если при любом $y_n \in H$ для решения задачи (7) справедливо неравенство

$$\|y_{n+1}\|_D \leqslant \|y_n\|_D , \quad n = 0,\, 1,\, \ldots \tag{9}$$

Обозначим через $\delta = \lambda_{\min}(D)$ и $\Delta = \lambda_{\max}(D)$ минимальное и максимальное собственные значения матрицы D, и предположим, что число обусловленности Δ/δ ограничено сверху константой $M_1 > 0$, не зависящей от h. Тогда из устойчивости в H_D следует устойчивость по начальным данным в сеточной L_2-норме, т. е. оценка

$$\|y_n\| \leqslant M_1 \|y_0\| .$$

Как уже отмечалось, спектр оператора (8) является простым и, следовательно, система его собственных функций образует базис. Это означает, что матрица разностного оператора A подобна некоторой симметричной матрице. Такие схемы называются *симметризуемыми*. Теория устойчивости симметризуемых разностных схем развита в работах [5] – [7]. На основе этой теории исследование устойчивости схемы (6) может быть осуществлено следующим образом.

1. Выясняем необходимое условие устойчивости, состоящее в том, что спектр оператора перехода должен быть расположен внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости. В случае схемы (6) это условие сводится к обычному ограничению $\tau < 0,5h^2$.

2. Пусть μ – матрица, столбцами которой являются собственные векторы оператора (8). Строим матрицу $D = (\mu\mu^*)^{-1}$, определяющую норму, в которой упомянутые условия не только необходимы, но и достаточны для устойчивости.

3. Проводим исследование нормы $\|y\|_D$. Оно сводится к нахождению границ спектра матрицы Грама $\mu^*\mu$. Как правило, исследование спектра может быть осуществлено только численно.

4. Пример. Для наглядности проиллюстрируем упомянутую методику исследования устойчивости на следующем модельном примере.

Рассмотрим разностную схему (7) с несимметричной матрицей

$$A = \begin{bmatrix} \psi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\psi & 1 \\ 0 & 0 & 1+\psi \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где ψ – вещественный параметр. Если $\psi \neq 0$ и $\psi \neq 0,5$, то все собственные значения матрицы A различные, а матрица базиса имеет вид

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\psi \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Будем считать в дальнейшем, что $0 < \psi < 0,5$. Собственными значениями матрицы Грама

$$M = \mu^* \mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+4\psi^2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

являются числа

$$m_0 = 1, \quad m_1 = 1 + 2\psi^2 - \sqrt{1+4\psi^4}, \quad m_2 = 1 + 2\psi^2 + \sqrt{1+4\psi^4},$$

причем

$$\begin{gathered} \lambda_{\min}(M) = \delta(M) = 1 + 2\psi^2 - \sqrt{1+4\psi^4}, \\ \lambda_{\max}(M) = \Delta(M) = 1 + 2\psi^2 + \sqrt{1+4\psi^4}. \end{gathered} \tag{13}$$

Будем исследовать устойчивость разностной схемы (7), (10) в различных нормах D. Какой бы оператор D мы не выбирали, для устойчивости необходимо, чтобы все собственные значения оператора перехода не превосходили 1 по модулю. В данном случае необходимые условия устойчивости сводятся к неравенству

$$\tau \leqslant \frac{2}{1+\psi}. \tag{14}$$

Это условие и достаточно для устойчивости в норме $D = (\mu\mu^*)^{-1}$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $0 < \psi < 0,5$ *и матрица* μ *определена согласно* (11). *Зададим матрицу*

$$D = (\mu\mu^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2\psi} \\ 0 & -\dfrac{1}{2\psi} & \dfrac{1}{2\psi^2} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Разностная схема (7), (10) *устойчива в пространстве* H_D *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (14).

Доказательство. Выше отмечалось, что неравенство (14) необходимо для устойчивости в любой норме. Поэтому остается доказать достаточность условия (14) для устойчивости в пространстве H_D, где матрица D определена согласно (15). Запишем уравнение (7) в виде

$$y_{n+1} = Sy_n, \text{ где } S = E - \tau A, \tag{16}$$

и заметим, что при условии (14) все собственные значения s_k матрицы перехода S не превосходят 1 по модулю.

Пусть A – матрица (10), а матрица μ определена согласно (11). Тогда $A\mu = \mu\Lambda$, где Λ – диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены собственные значения λ_k матрицы A. При этом $A = \mu\Lambda\mu^{-1}$ и

$$S = E - \tau\mu\Lambda\mu^{-1} = \mu(E - \tau\Lambda)\mu^{-1},$$

т. е. матрица перехода S подобна диагональной матрице $\tilde{S} = E - \tau\Lambda$, на главной диагонали которой расположены собственные значения $s_k = 1 - \tau\lambda_k$ матрицы перехода S.

Уравнение (16) можно записать в виде

$$y_{n+1} = \mu\tilde{S}\mu^{-1}y_n$$

или

$$v_{n+1} = \tilde{S} v_n, \text{ где } v_n = \mu^{-1} y_n.$$

Отсюда и из неравенств $|s_k| \leqslant 1$, $k = 0,\ 1,\ 2$, получаем, что

$$\|v_{n+1}\| \leqslant \|v_n\|$$

или

$$\|\mu^{-1} y_{n+1}\| \leqslant \|\mu^{-1} y_n\|.$$

Последнее неравенство и означает устойчивость схемы (7), (10) в норме, определяемой матрицей (15). Теорема 1 доказана.

Норму, определяемую матрицей (15), можно назвать оптимальной в том смысле, что устойчивость в этой норме гарантирована при таком условии на τ, которое невозможно ослабить за счет выбора нормы. Заметим, однако, что при малых ψ матрица (15) является плохо обусловленной. Для нее число $M_1 = \sqrt{\Delta/\delta}$ в оценке вида

$$\|y_n\| \leqslant M_1(\psi)\,\|y_0\| \tag{17}$$

согласно (13) равно

$$M_1(\psi) = \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} = \psi + \frac{1}{2\psi} + \sqrt{\psi^2 + \frac{1}{4\psi^2}}.$$

Поскольку $M_1(\psi) \to \infty$ при $\psi \to 0$, из оценки (17) не следует устойчивость в L_2 схемы (7), (10) с $\psi = 0$.

Устойчивость в нормах, отличных от (15), приводит, как правило, к более сильному ограничению на шаг τ. Рассмотрим, например, случай $D = E$ (устойчивость в сеточной L_2-норме). Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $0 \leqslant \psi < 0,5$. *Разностная схема* (7), (10) *устойчива в пространстве* H_E *тогда и только тогда, когда*

$$\tau \leqslant \tau_0(\psi) = \frac{2 - \sqrt{1 + 4\psi^2}}{1 - \psi^2}. \tag{18}$$

Доказательство. Известно (см., например, [8]), что для устойчивости схемы (7) в пространстве H_D необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства

$$D \geqslant S^* D S, \tag{19}$$

где $S = E - \tau A$ – оператор перехода. При $D = E$ из (19) получаем условие

$$P = A^* + A - \tau A^* A \geqslant 0. \qquad (20)$$

Если матрица A определена согласно (10), то матрица P имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$p_{11} = 2\psi - \tau\psi^2, \quad p_{22} = 2(1-\psi) - \tau(1-\psi)^2,$$
$$p_{33} = 2(1+\psi) - \tau(1 + (1+\psi)^2), \quad p_{23} = 1 - \tau(1-\psi).$$

Критерий неотрицательности матрицы P, имеющий вид

$$p_{11} > 0, \quad p_{22} > 0, \quad p_{22}p_{33} \geqslant p_{23}^2,$$

приводит к неравенствам

$$0 < \tau < \frac{2}{\psi}, \quad 0 < \tau < \frac{2}{1-\psi}, \quad 0 < \tau \leqslant \frac{2 - \sqrt{1+4\psi^2}}{1-\psi^2}. \qquad (21)$$

Запишем условия (21) в виде

$$\tau \leqslant \min\left\{\frac{2}{\psi}, \frac{2}{1-\psi}, \frac{2-\sqrt{1+4\psi^2}}{1-\psi^2}\right\}.$$

Нетрудно видеть, что при $\psi \in (0,\ 1/2)$ выполняются неравенства

$$\frac{2-\sqrt{1+4\psi^2}}{1-\psi^2} < \frac{2}{\psi}, \quad \frac{2-\sqrt{1+4\psi^2}}{1-\psi^2} < \frac{2}{1-\psi},$$

так что указанный минимум равен

$$\frac{2-\sqrt{1+4\psi^2}}{1-\psi^2},$$

что и доказывает теорему 2.

Заметим, что условия устойчивости (18) в пространстве H_E далеки от необходимых условий устойчивости (14).

Литература

1. Н. И. Ионкин. Разностные схемы для одной неклассической задачи. Вестн. Моск. унив., сер. выч. матем. и киб., 1977, N 2, с. 20-32.

2. Н. И. Ионкин. Задача для уравнения теплопроводности с неклассическим(нелокальным) краевым условием. Будапешт, Numerikus Modzerek, N 14, 1979, 70 с.

3. Н. И. Ионкин, Е. А. Валикова. О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи. Математическое моделирование, 1996, т. 8, N 1, с. 53 –63.

4. Н. И. Ионкин, В. А. Морозова. Об устойчивости разностных схем для уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями. Препринт. Москва. Диалог-МГУ. 2000 г. 18 с.

5. А. В. Гулин, А. А. Самарский. Об устойчивости одного класса разностных схем. Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, N 7. С. 1163 – 1173.

6. А. В. Гулин. К теории устойчивости симметризуемых разностных схем. Математическое моделирование. 1994. Т. 16, N 6. С. 9 –13.

7. А. В. Гулин, С. Л. Дегтярев. Об устойчивости разностных схем с переменными весовыми множителями. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1994. N 3. С. 23 – 29.

8. А. А. Самарский, А. В. Гулин. Устойчивость разностных схем. М., Наука, 1973, 416 с.