А.В. Ильин, А.П. Носов, В.В. Фомичев

# Асимптотически точное обращение неопределенных динамических систем

## Введение.

В работе рассматривается задача обращения управляемой динамической системы, т. е. задача восстановления неизвестного входного сигнала по измерениям выхода. Данная задача является одной из обратных задач динамики, которым посвящены многочисленные работы как зарубежных [6–11], так и отечественных авторов [12, 13].

Следует отметить, что в первых работах [6-8] исследовалась принципиальная разрешимость задачи обращения. В дальнейшем появился ряд работ [8-13], в которых были предложены различные алгоритмы обращения как линейеных, так и нелинейных динамических систем. Однако одни из этих алгоритмов не решали задачу в режиме реального времени (т. е. требовали измерения выхода сразу на всем интервале времени), другие не отвечали требованиям робастности, т. е. не были устойчивы к наличию помех, погрешностям в задании параметров системы и другим факторам неопределенности.

Недавно, авторами в [1, 2] был предложен новый подход к обращению динамических систем, основанный на принципе сведения исходной проблемы к задаче стабилизации неопределенной системы по выходу, что позволяет использовать хорошо разработанный в последние годы аппарат теории автоматического управления. Это позволило получить эффективные робастные алгоритмы обращения, решающие задачу с неисчезающей статической ошибкой, которая, однако, может быть сделана сколь угодно малой.

В данной работе, за счет использования новых типов обратной связи, впервые удалось синтезировать алгоритмы обращения, позволяющие получить асимптотически точную оценку неизвестного входного сигнала, что является качественно новым шагом в решении задачи обращения динамических систем. Кроме того, в работе исследована устойчивость предложенных алгоритмов по отношению к различным факторам неопределенности и погрешности измерений.

## 1. Постановка задачи.

В данной работе под задачей обращения будем понимать следующую задачу: для динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + b\xi, \\ w &= cz, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $\xi(t)$, $w(t) \in \mathbb{R}$, $A$, $b$ и $c$ — матрицы с постоянными коэффициентами соответствующих размерностей, требуется по измерениям известного выхода $w(t)$ сформировать оценку неизвестного входного сигнала $\xi(t)$.

Эта задача рассматривалась в работах [1, 2], где предложены различные алгоритмы обращения таких систем. Эти алгоритмы были основаны на использовании управляемой модели

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= A\bar{z} + dU, \\ \bar{w} &= c\bar{z}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

при $d \equiv b$, где управление $U$ было направлено на стабилизацию в нуле системы в отклонениях

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + dU - b\xi, \\ y &= cx, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $x = \bar{z} - z$, $y = \bar{w} - w$. При этом для стабилизации использовались либо глубокая обратная связь, либо разрывные законы управления. При использовании глубокой обратной связи были получены асимптотические оценки сигнала $\xi(t)$, однако бесконечный коэффициент усиления является лишь удобной моделью и физически нереализуем.

Применение разрывного закона управления требовало наличия дополнительного фильтра (например, типа скользящего среднего), что вело к появлению неисчезающей статической ошибки, которая, однако, могла быть сделана сколь угодно малой за счет выбора параметра фильтра.

Целью данной работы является получение асимптотической оценки неизвестного сигнала $\xi(t)$ без использования глубокой обратной связи. Это достигается за счет использования разрывного закона управления, а так же за счет специального выбора канала, в котором это управление действует, т. е. выбора вектора $d$.

В дальнейшем будем предполагать, что для системы (1.1) выполнены предположения

**П1.** Пара $\{A, b\}$ — управляема, пара $\{A, c\}$ — наблюдаема.

**П2.** $\xi(t) \in \Omega^1 = \{\xi(t) : \xi \in C^1[0, +\infty); |\xi(t)| \le \xi^0; |\xi'(t)| \le \xi^1\}$.

**П3.** Передаточная функция системы (1.1) имеет вид

$$W_\xi(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{\beta_m(s)}{\alpha_n(s)},$$

и кроме того, полином $\beta_m(s)$ — гурвицев, то есть $Re(\lambda_i) < -\gamma < 0$, $\lambda_i : \beta_m(\lambda_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

## 2. Системы с первым относительным порядком.

Пусть относительный порядок системы (1.1) равен единице, т. е. $r = n - m = 1$. Передаточная функция системы (1.2) имеет вид $W_U(s) = c(sI - A)^{-1}d = \frac{\varphi_l(s)}{\alpha_n(s)}$. Выберем вектор $d$ в модели (1.2) таким образом, чтобы пара $\{A, d\}$ была управляема, а относительный порядок системы (1.2) равнялся двум, т. е. $l = n - 2$. Очевидно, это всегда можно сделать. В этом случае неособым преобразованием координат система (1.3) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= A'x' + b'y + d'U \\ \dot{y} &= A''x' + b''y - cb\xi \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, а спектр матрицы $A'$ совпадает с корнями полинома $\beta_m(s)$. Так как $n - m = 1$, то $cb \neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $cb = 1$.

Для вектора $x'$ построим наблюдатель

$$\dot{\tilde{x}}' = A'\tilde{x}' + b'y + d'U\,, \quad \tilde{x}'(0) = 0. \tag{2.2}$$

Ошибка наблюдения $e' = \tilde{x}' - x'$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\dot{e}' = A'e'$$

и для нее справедлива оценка

$$|e'(t)| \leq C_1 |x'(0)| e^{-\gamma t}, \tag{2.3}$$

где $C_1 = \mathrm{const} > 0$ зависит от параметров системы (1.1).

Рассмотрим теперь подробнее второе уравнение системы (2.1)

$$\dot{y} = A''x' + b''y - \xi = \tau - \xi.$$

Найдем производную от новой переменной $\tau$ в силу системы

$$\begin{aligned} \dot{\tau} = (A''A' + b''A'')x' + (A''b' + (b'')^2)y + A''d'U - b''\xi = \\ = b''\tau + A''b'y + A''d'U - b''\xi + A''A'x'. \end{aligned}$$

Так как $l = n - 2$, то $A''d' \neq 0$. Нормируем вектор $d$ так, чтобы $A''d' = 1$. Кроме того, выберем управление $U$ в виде:

$$U = -(l_1 + A''b')y - (l_2 + b'')\tilde{\tau} - A''A'\tilde{x}' - F \operatorname{sgn} y, \tag{2.4}$$

где $\tilde{\tau} = A''\tilde{x}' + b''y$, $\tilde{\tau} - \tau = A''e'$, $l_1$, $l_2 = \mathrm{const} > 0$.

В результате получим систему второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \tau - \xi\,, \\ \dot{\tau} &= -l_1 y - l_2 \tau - F \operatorname{sgn} y - \xi_1, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\xi_1 = b''\xi + (A''A' + l_2 A'' + b''A'')e'$. Для нее справедлива

**Теорема 1.** *Пусть $\xi \in \Omega'$. Тогда в системе (2.5) при достаточно большом $F > 0$ $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ асимптотически стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

**Доказательство.** Продифференцируем первое уравнение системы (2.5)

$$\ddot{y} = \dot{\tau} - \dot{\xi} = -l_1 y - l_2 \tau - F \operatorname{sgn} y - (\xi_1 + \dot{\xi}).$$

Учитывая, что $\tau = \dot{y} + \xi$, получим

$$\ddot{y} = -l_2 \dot{y} - l_1 y - F \operatorname{sgn} y - \xi_2, \tag{2.6}$$

где $\xi_2 = \xi_1 + l_2 \xi + \dot{\xi} = \dot{\xi} + (b'' + l_2)\xi \; + (A''A' + l_2 A'' + b''A'')e'$.

Выберем константу $F > 0$ так, чтобы

$$F > \xi^1 + \{|b'' + l_2|\}\xi^0 + h\,, \quad h = \text{const} \, > 0.$$

Так как $\xi \in \Omega'$, а $|e'(t)| \to 0$, то начиная с некоторого момента времени $|\xi_2(t)| < F$.

Очевидно, что при таком выборе параметра $F$ поведение системы (2.6) аналогично поведению системы при $\xi_2 \equiv 0$ [3]. Рассмотрим такое уравнение более подробно.

Для доказательство асимптотической устойчивости решений уравнения (2.6) воспользуемся функцией Ляпунова

$$V = \frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{l_1 y^2}{2} + F|y|.$$

Производная этой функции в силу системы (2.6) (при $\xi_2 \equiv 0$) будет иметь вид

$$\dot{V} = -l_2 \dot{y}^2,$$

и, так как $M = \{(y, \dot{y}) | \dot{y} = 0\}/\{(0,0)\}$ не содержит траекторий этой системы, то $y$ и $\dot{y}$ асимптотически стремятся к нулю.

Теорема доказана.

Из первого уравнения (2.5) следует, что $|\tau(t) - \xi(t)| \to 0$ (так как $\dot{y} \to 0$), и в качестве асимптотической оценки неизвестного сигнала $\xi(t)$ используем

$$\tilde{\xi}(t) = \tilde{\tau}(t) = A''\tilde{x}' + b''y. \tag{2.7}$$

Так как $|\tilde{\tau}(t) - \tau(t)| = |A''e'| \to 0$, то очевидно $|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \to 0$, то есть $\tilde{\xi}$ асимптотически восстанавливает неизвестный сигнал $\xi(t)$.

**Замечание 1.** Если параметры $l_1$, $l_2$ таковы, что характеристическое уравнение $s^2 + l_2 s + l_1 = 0$ имеет комплексно сопряженные корни (т. е. $l_1 > \frac{l_2^2}{4}$), то стабилизация в нуле достигается без использования скользящего режима.

Действительно, рассмотрим фазовые траектории системы (2.6) (по-прежнему для простоты полагаем $\xi_2 \equiv 0$). При $y > 0$, т. е. $\operatorname{sgn}(y) = 1$, фазовые траектории уравнения $\ddot{y} + l_2\dot{y} + l_1 y + F = 0$ представлены на рис. 1 *а*, а при $y < 0$, т. е. $\operatorname{sgn} y = -1$, фазовые траектории уравнения $\ddot{y} + l_2\dot{y} + l_1 y - F = 0$ — на рис. 1 *б*. После "сшивания" этих траекторий

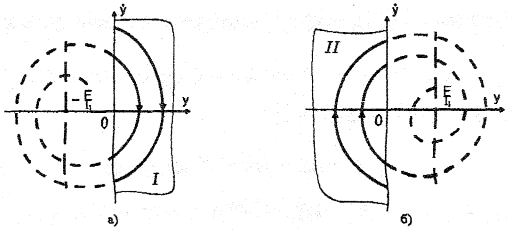


Рис. 1.

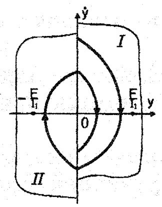


Рис. 2.

по прямой $y = 0$ получим фазовый портрет системы (2.6) (рис. 2), откуда видно, что траектория стабилизируется в нуле без использования скользящего режима.

Проанализируем теперь влияние на работоспособность схемы неидеальностей типа петли гистерезиса ширины $\Delta$. В этом случае в окрестности нуля возникает предельный цикл, т. е. асимптотическая устойчивость теряется, что видно из рис. 3в (фазовые траектории

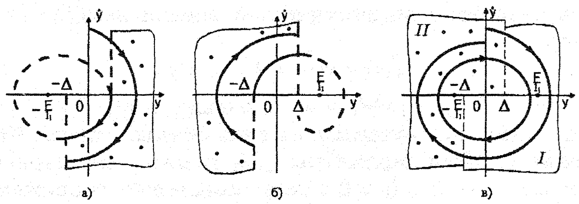


Рис. 3.

сшиваются по полупрямым $y = \Delta$, $\dot{y} > 0$; $y = -\Delta$, $\dot{y} < 0$). Однако погрешность измерения можно сделать меньше любой наперед заданной величины используя дополнительно коэффициенты обратной связи $l_1$ и $l_2$.

Перепишем уравнение (2.6) в виде системы из двух уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -l_1 x_1 - l_2 x_2 - \{F \operatorname{sgn}_\Delta x_1 + \xi_2\}, \\ &y = x_1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

*Обозначим* $F\operatorname{sgn}_\Delta x_1 + \xi_2 = f(t)$, $|f(t)| \le 2F$, $\operatorname{sgn}_\Delta x_1$ — релейный элемент с гистерезисом ширины $\Delta$. Заметим, что для $F$ выше предполагалась выполненной оценка: $F \ge \{l_2 + |b''|\}\xi^0 + \xi^1 + h$. Поэтому для уменьшения погрешности измерения будем использовать только коэффициент $l_1$, зафиксировав коэффициент $l_2 = \text{const} > 0$.

Выберем $l_1$ много больше $l_2$. Тогда у характеристического полинома системы (2.8) будут два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\eta$, где $\mu$, $\eta > 0$; $l_2 = 2\mu$; $l_1 = \mu^2 + \eta^2$.

Выпишем в явном виде решение системы (2.8)

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} b f(\tau)d\tau = e^{At}x(0) - \int_0^t e^{A\tau} b f(t-\tau)d\tau.$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -l_1 & -l_2 \end{pmatrix}$, где $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. При сделанных выше предположениях

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\eta}\sin(\eta t)e^{-\mu t} + \cos(\eta t)e^{-\mu t} & \frac{1}{\eta}\sin(\eta t)e^{-\mu t} \\ -\{\eta + \frac{\mu}{\eta}\}\sin(\eta t)e^{-\mu t} & \cos(\eta t)e^{-\mu t} - \frac{\mu}{\eta}\sin(\eta t)e^{-\mu t} \end{pmatrix}$$

Оценим вектор $x(t)$ покомпонентно:

$$|x_1(t)| \le Ce^{-\mu t} + \int_0^t |\frac{1}{\eta}\sin(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|\,|f(t-\tau)|d\tau \le Ce^{-\mu t} + \frac{2F}{\eta}\int_0^t |\sin(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|d\tau,$$

$$|x_2(t)| \le Ce^{-\mu t} + 2F\left(\int_0^t |\cos(\eta\tau)e^{-\mu t}|d\tau + \frac{\mu}{\eta}\int_0^t |\sin(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|d\tau\right).$$

Учитывая, что интегралы, стоящие в правых частях этих неравенств сходятся абсолютно, а так же то, что

$$\int_0^t |\sin(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|d\tau < \int_0^\infty |\sin(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|d\tau = \frac{\eta}{\mu^2+\eta^2},$$

$$\int_0^t |\cos(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|d\tau < \int_0^\infty |\cos(\eta\tau)e^{-\mu\tau}|d\tau = \frac{2\eta e^{-\frac{\mu\pi}{2\eta}+\mu}}{\mu^2+\eta^2} \le \frac{2\eta+\mu}{\mu^2+\eta^2},$$

получим окончательные оценки:

$$
\begin{aligned}
|x_1(t)| &\le Ce^{-\mu t} + \frac{2F}{\mu^2+\eta^2}, \\
|x_2(t)| &\le Ce^{-\mu t} + \frac{4F(\mu+\eta)}{\mu^2+\eta^2}
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Таким образом, фиксировав $\mu$ (т. е. $l_2$) и выбирая $\eta$ (т. е. $l_1$) достаточно большим мы можем стабилизировать вектор $x(t)$ (т. е. $y(t)$, $\dot{y}(t)$) в сколь угодно малой окрестности нуля. Следовательно, для оценки (2.7) входного сигнала $\xi(t)$ будет справедливо

**Следствие.** *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $l_1$, $l_2 > 0$, что для $\tilde{\xi}$ из (2.7) справедлива оценка:*

$$|\xi - \tilde{\xi}| \le Ce^{-\gamma t} + \varepsilon, \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{2.10}$$

**Доказательство.** Будем выбирать $l_1(\mu,\eta)$, $l_2(\mu,\eta)$ как было предложено выше. Фиксировав $\mu = \mathrm{const} > \gamma$, выберем $\eta$ таким, что

$$\frac{4F(\eta+\mu)}{\mu^2+\eta^2} \le \varepsilon_1, \quad \eta > 1,$$

где $\varepsilon_1 = \mathrm{const} > 0$. Тогда из (2.9) получим

$$|y(t)| \le C_1 e^{-\gamma t} + \varepsilon_1, \quad |\dot{y}(t)| \le C_1 e^{-\gamma t} + \varepsilon_1.$$

Как было показано в доказательстве теоремы 1

$$|A''x' - \xi| = |\dot{y} - b''y| \le \{1 + b''\}\{C_1 e^{-\gamma t} + \varepsilon_1\},$$

кроме того

$$|A''x' - \tilde{\xi}| \le C_3 e^{-\gamma t},$$

где $C_3 = \mathrm{const} > 0$. Тогда выбирая $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1+|b''|}$ мы получим оценку (2.10).

Следствие доказано.

Заметим, что аналогичный результат можно получить и при неидельностях типа "мертвой зоны" или в случае временного запаздывания с интервалом $\tau$.

Рассмотрим случай, когда вместо точного выхода системы (1.1) нам известен сигнал $\hat{w}(t) = w(t) - g(t)$, т. е. $\hat{y} = y(t) + g(t)$.

В этом случае вместо наблюдателя (2.2) мы будем иметь

$$\dot{\tilde{x}}' = A'\tilde{x}' + b'\hat{y} + d'U, \quad \tilde{x}'(0) = 0, \tag{2.2*}$$

а ошибка наблюдения $e' = \tilde{x}' - x'$ будет удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению

$$\dot{e}' = A'e' + b'g.$$

Рассмотрим два случая относительно помехи $g(t)$. Если $g(t)$ асимптотически стремится к нулю, то и $e' \to 0$. Если для $g(t)$ справедлива оценка $|g(t)| \leq G$, $G = \mathrm{const} > 0$, то для $e'$ верно неравенство

$$e'(t) \leq |x'(0)|C_1 e^{-\gamma t} + C_2 G,$$

где $C_1$, $C_2 = \mathrm{const} > 0$.

Используя в управлении (2.4) $\hat{y}$ вместо $y$, после преобразований, аналогичных проведенным выше, мы получим вместо (2.6) систему

$$\ddot{y} = -l_2\dot{y} - l_1 y - F\,\mathrm{sgn}\,(\hat{y} + g) - \tilde{\xi}_2, \tag{2.6*}$$

где

$$\tilde{\xi}_2 = \xi_2 + (A''b' + (b'')^2 + l_2 b'' + l_1)g =$$
$$= (l_2 + b'')\xi + \dot{\xi} + (A''A' + b''A'' + l_2 A'')e' + (A''b' + (b'')^2 + l_2 b'' + l_1)g.$$

В соответствии с Теоремой 1 выберем $F > |\tilde{\xi}_2(t)|$. Если $g \to 0$ (и $e' \to 0$ соответственно), то можно как и в доказательстве теоремы 1 выбрать $F > |l_2 + b''|\xi^0 + \xi' + h$, $h > 0$. Так как $g \to 0$, то очевидно, что и в этом случае решения системы (2.6*) $y$ и $\dot{y}$ асимптотически стремятся к нулю, а $\tilde{\xi}(t)$ из (2.7) является асимптотической оценкой неизвестного входного сигнала $\xi(t)$.

Если сигнал $g(t)$ является только ограниченным, то константу $F$ можно выбрать так, что:

$$F > |l_2 + b''|\xi^0 + \xi' + \{|A''A' + b''A'' + l_2 A''|C_2 + |A''b' + (b'')^2 + l_2 b'' + l_1|\}G + h,$$

где $h > 0$. Исследуем при таком выборе $F$ поведение системы (2.6*) (как и в доказательстве теоремы 1 не ограничивая общности будем считать, что $\tilde{\xi}_2 \equiv 0$). Очевидно, что при $|y(t)| \geq G$ (при этом $\mathrm{sgn}\,\hat{y} = \mathrm{sgn}\,y$) поведение системы аналогично поведению системы (2.6), т. е. ее траектории вне полосы $|y(t)| \leq G$ совпадают с изображенными на рис. 2.

Нетрудно так же заметить, что траектория системы (2.6*) в полосе $|y(t)| \leq G$ лежит между траекториями систем $\ddot{y} = -l_2\dot{y} - l_1 y - F$ и $\ddot{y} = -l_2\dot{y} - l_1 y + F$ с теми же начальными данными (см. рис. 3). Здесь не ограничивая общности считаем, что $F > G$. Следовательно, решения уравнения (2.6*) мажорируются сверху решениями системы

$$\ddot{y} = -l_2\dot{y} - l_1 y - F\,\mathrm{sgn}_\sigma y - \tilde{\xi}_2,$$

где $\mathrm{sgn}_\sigma y$ — релейный элемент с петлей гистерезиса ширины $G$. Так как у этой системы [3] имеется предельный цикл порядка $O(G)$, то и для траекторий системы (2.6*) будут справедливы оценки:

$$|y(t)| \leq O(G), \quad |\dot{y}(t)| \leq O(G).$$

Оценим теперь погрешность оценки $\tilde{\xi}$ из (2.7). Так как $e'(t) \le O(G)$, то

$$|\tilde{\xi}(t) - \xi(t)| \le |A''e'| + |\dot{y}| + |b''||y| \le O(G).$$

Таким образом предложенный алгоритм в случае ошибки измерения выхода дает оценку неизвестного сигнала с тем же порядком точности, что и ошибка измерения выхода.

**Пример.** Рассмотрим двумерную систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -a_1 z_1 - a_2 z_2 + \xi \end{cases}$$

$$w = c_1 z_1 + z_2, \quad c_1 > 0,$$

считая, что для нее выполнены предположения **П.1–П.3**.

Выберем вспомогательную систему так, чтобы ее относительный порядок по управлению $u$ был равен 2:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}_1 = \bar{z}_2 + d_1 u \\ \dot{\bar{z}}_2 = -a_1 \bar{z}_1 - a_2 \bar{z}_2 + d_2 u_2 \end{cases}$$

$$\bar{w} = c_1 \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Так как эта система имеет второй относительный порядок по $u$, то $c_1 d_1 + d_2 = 0$. В дальнейшем для простоты положим $d_1 = 1$, $d_2 = -c_1 d_1$. Система в отклонениях примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + d_1 u \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \xi + d_2 u \end{cases}$$

$y = c_1 x_1 + x_2$. Сделав замену координат как и в Примере 1, получим:

$$\begin{cases} \dot{x}' = c_1 x_1 + y + u \\ \dot{y} = -(a_1 - a_2 c_1 + c_1^2)x' - (a_2 - c_1)y - \xi \end{cases} \qquad (*)$$

Для $x'$ построим наблюдатель

$$\dot{\tilde{x}}' = -c_1 \tilde{x} + y + u.$$

Продифференцируем второе уравнение (*). Получим, что

$$\ddot{y} = a_2(a_1 - a_2 c_1 + c_1^2)x' + (a_2^2 - a_2 c_1 - a_1)y - (a_1 - a_2 c_1 + c_1^2)u - \{\dot{\xi} + (a_2 - c_1)\xi\}.$$

Так как для исходной системы выполнено предположение **П.2**, то $a_1 - a_2 c_1 + c_1^2 \ne 0$. В соответствии с предложенным алгоритмом выберем управление $u$

$$u = -\frac{1}{a_1 - a_2 c_1 + c_1^2}\{-a_2(a_1 - a_2 c_1 + c_1^2)\tilde{x}' - (a_2^2 - a_2 c_1 - a_1)y + u_1\},$$

$$u_1 = l_2((a_2 - c_1)y + (a_1 - a_2 c_1 + c_1^2)\tilde{x}') + u_2, \quad l_2 > 0,$$

$$u_2 = -l_1 y - F\mathrm{sgn}\,, \quad l_1, \quad F > 0.$$

В соответствии с алгоритмом выберем $F \geq |l_2 + c_1 - a_2|\xi^0 + \xi' + h$, $h > 0$. В качестве оценки неизвестного входного сигнала $\xi(t)$ используем $\tilde{\xi}(t) = -(a_1 - a_2c_1 + c_1^2)\tilde{x}'$

## 3. Системы с произвольным относительным порядком.

Рассмотрим теперь систему (1.1) с произвольным относительным порядком $r = n - m > 1$. Покажем, что предложенный выше алгоритм может быть обобщен для понижения порядка задачи, т. е. исходная проблема может быть сведена к задаче обращения системы порядка $(n-1)$ с относительным порядком $r-1$ и передаточной функции $W_\xi(s) = \frac{\beta_m(s)}{\psi_{n-1}(s)}$, где $\psi_{n-1}(s)$ - произвольный устойчивый полином от $s$, не имеющий общих корней с $\beta_m(s)$ и $\alpha_n(s)$.

Выберем произвольный устойчивый полином $\psi_{n-1}(s)$ порядка $(n-1)$ как предложено выше. Пусть кроме того $Re(\eta_i) < -\eta < 0$, $-\eta_i : \psi_{n-1}(\eta_i) = 0$, $i = 1, .., n-1$.

Используем вновь модель (1.2), относительный порядок которой равен 2. Систему в отклонениях невырожденной заменой переменных приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= A'x' + b'y + d'U - l'\xi, \\ \dot{y} &= A''x' + b''y, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, а $\det(sI - A') = \psi_{n-1}(s)$.

Для этого рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= A\bar{z} + dU + hV, \\ \bar{w} &= c\bar{z} \end{aligned} \tag{1.2*}$$

с дополнительным управлением $V$, причем передаточная функция

$$W_V = c(sI - A)^{-1}h = \frac{\psi_{n-1}(s)}{\alpha_n(s)}.$$

В этом случае, так как относительный порядок по $U$ равен 2, а по $\xi$ больше 1, преобразование координат предложенное в главе 1 приводит систему к виду (3.1) со вторым уравнением

$$\dot{y} = A''x' + b''y + V.$$

Теперь, выбрав управление $V \equiv 0$ мы получим (3.1).

Для оценки вектора $x'$ вновь используем наблюдатель (2.2), однако теперь ошибка наблюдения $e' = \tilde{x}' - x'$ будет удовлетворять неоднородному дифференциальному уравнению.

$$\dot{e}' = A'e' + l'\xi,$$

и, следовательно, в силу гурвицевости матрицы $A'$, для нее будет справедлива оценка

$$|e'(t)| \leq C_1|x'(0)|e^{-\eta t} + C_2\xi_0, \tag{3.2}$$

где $C_1$, $C_2 = \mathrm{const} > 0$ зависят от параметров системы (1.3) и полинома $\psi_{n-1}(s)$ (по-прежнему считаем, что $\xi \in \Omega'$).

Для стабилизации выхода системы (1.3) $y(t)$ в нуле вновь используем управление $U$ вида (2.4). Для него будет справедлива

**Теорема 2.** *Пусть $\xi \in \Omega'$. Тогда при достаточно большом $F > 0$ при управлении (2.4) $y(t)$, $\dot{y}(t)$ асимптотически стремятся к нулю.*

**Доказательство.** Рассмотрим вновь систему второго порядка относительно переменных $y$ и $\tau$, как было предложено в п. 2. Непосредственно подстановкой нетрудно убедится, что вместо системы (2.5) при управлении (2.4) мы получим систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \tau, \\ \dot{\tau} &= -l_1 y - l_2 \tau - F \operatorname{sgn}(y) - \xi_3, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\xi_3 = A''l'\xi + (A''A' + l_2A'' + b''A'')e'$. Проведя преобразования как и в доказательстве Теоремы 1, мы получим

$$\ddot{y} = -l_2\dot{y} - l_1 y - F \operatorname{sgn} y - \xi_3.$$

Так как $\xi \in \Omega'$, то то выбирая $F > \{|A''l'| + |A''A' + l_2A'' + bA''|C_2\}\xi^0 + h$, где $h > 0$, мы можем дословно повторить доказательство Теоремы 1, откуда следует $y, \dot{y} \to 0$.

Теорема доказана.

Заметим, что стабилизация $y$ и $\dot{y}$ в нуле опять может быть достигнута без использования скользящего режима при $l_1 > l_2^2/4$. Кроме того, предложенный алгоритм решает задачу и в том случае, если вместо выхода $y(t)$ нам известен сигнал $\hat{y}(t) = y(t) + g(t)$, $g(t) \to 0$.

Так как $y$, $\dot{y} \to 0$, то из второго уравнения (3.1) $\varkappa = A''x' = (\dot{y} - b''y) \to$ $\to 0$. Рассмотрим подробнее первое уравнение системы (3.1) с новым выходом $\varkappa = A''x'$:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= A''x' + b'y + d'U - l'\xi, \\ \varkappa &= A''x'. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Нетрудно убедится, что передаточная функция этой системы от $\xi$ к $\varkappa$ имеет вид:

$$\tilde{W}_\xi = A''(sI - A')^{-1}l' = -\frac{\beta_m(s)}{\psi_{n-1}(s)}.$$

Действительно, считая что мы используем вспомогательную систему (1.2*), передаточная функция системы в отклонениях имеет вид

$$-\frac{\beta_m(s)}{\alpha_n(s)}\xi + \frac{\varphi_l(s)}{\alpha_n(s)}U + \frac{\psi_{n-1}(s)}{\alpha_n(s)}V = y$$

(здесь для простоты для образов Фурье использованы те же обозначения, что и для самих сигналов).

Так как управления $U$ и $V$ ($V \equiv 0$) выбраны так, чтобы стабилизировать выход системы в нуле, то при $y = 0$ получим:

$$\frac{\beta_m(s)}{\psi_{n-1}(s)}\xi - \frac{\varphi_l(s)}{\psi_{n-1}(s)}U = V.$$

Так как $\dot{y} = A''x' + b''y + V = \varkappa + V + b''y$, то при $y = \dot{y} = 0$ получаем, что $\varkappa = -V$, и, следовательно, передаточная функция от $\xi$ к $\varkappa$ (т. е. $-V$) при $y = 0$ равна $\frac{\beta_m(s)}{\psi_{n-1}(s)}$.

Используем управляемую модель вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A'\bar{x}' + b'y + d'U + h'V, \\ \bar{\varkappa} &= A''\bar{x}', \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $V$ — новое управление, а вектор $h'$ выбирается нами по произволу.

Система в отклонениях будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{q} &= A'q + h'V + l_1\xi, \\ p &= A''q. \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $q = \bar{x}' - x'$, $p = \bar{\varkappa} - \varkappa$. Фактичеки нам известен сигнал $\hat{p} = p + \varkappa = \bar{\varkappa}$, причем $|\hat{p} - p| = |\varkappa| \to 0$. Передаточная функция системы (3.6) имеет вид:

$$\hat{W}_\xi = A''(sI - A')^{-1}l' = \frac{\beta_m(s)}{\psi_{n-1}(s)},$$

и если полином $\psi_{n-1}(s)$ не имеет общих корней с полиномом $\beta_m(s)$, то пара $\{A'', A'\}$ — наблюдаема, а пара $\{A'', l'\}$ — управляема. Таким образом, мы получим систему порядка $(n-1)$ с относительным порядком $n - 1 - m = r - 1$. Если $r - 1 = 1$, то для ее обращения может быть использован алгоритм, предложенный в п. 2, в противном случае порядок этой системы может быть вновь понижен.

Таким образом, предложенные выше алгоритмы позволяют получать асимптотические оценки неизвестного входа $\xi(t)$ для систем с любым относительным порядком без использования глубокой обратной связи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и программ "Университеты России", "Интеграция".

**Литература**

1. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Алгоритмы обращения линейных управляемых систем //Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 34, № 6. С. 744–750.

2. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Алгоритмы обращения линейных скалярных динамических систем: метод управляемой модели //Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 3. С. 329–339.

3. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. М.: Наука. Физматлит, 1997. 352 с.

4. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука. Физматлит, 1976.

5. Воронов А.А. Устойчивость. Управляемость. Наблюдаемость. М.: Наука, 1979. 336 с.

6. Silverman L. M. //IEEE Transaction on Automatic Control. 1969. AC-14, № 3. P. 270–276.

7. Sain K.M., Massey J.L. Inevitability of Linear Time-Invariant Dynamical Systems //IEEE Transaction on Automatic Control. 1969. AC-14, № 2. P. 141–149.

8. Whillsky A.S. On the Invertibility of Linear Systems Ibid //IEEE Transaction on Automatic Control. 1974. AC-19. P. 272–274.

9. Hirschorn R.M. Inevitability of Nonlinear Control Systems //SIAM Journal of Control and Optimization. Vol. 17, № 2. P. 289–297.

10. Resondek W., Nijmeijer H. On Local Right-Invertiobility of Nonlinear Contol Systems //Control Theory and Advanced Technology. MITA-PRESS. 1988. Vol. 4, № 3. P. 325–348.

11. Hunt L.R., Meyer G. Stable Inversion for Nonlinear Systems //Automatica. 1997. Vol 133, № 8. P. 1549–1554.

12. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. О моделировании управления в динамической системе //Известия АН СССР, Техническая Кибернетика. 1983. Т. 269, № 3. С. 552–556.

13. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. О динамическом решении операторных уравнений //Известия АН СССР, Техническая Кибернетика. 1983. Т. 269, № 2. С. 51–60.