

## РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОНЕЧНОМ ИМПЕДАНСНОМ УЧАСТКЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Данная работа посвящена вопросам математического моделирования задач рассеяния трехмерных электромагнитных волн на конечном импедансном участке взволнованной поверхности, являющейся границей раздела сред. Математическая постановка рассматриваемых задач сведена к решению систем уравнений Максвелла в нерегулярных бесконечных областях. В зависимости от поляризации падающего поля краевые задачи сведены к решению независимых систем гиперсингулярных интегральных уравнений, для решения которых в работе приведены специально разработанные численные алгоритмы.

Вопросы математического моделирования задач рассеяния электромагнитных волн на волнистой поверхности раздела двух различных сред важны для различных областей применения. Подробно эти постановки рассмотрены в работах [1,2]. В настоящей работе рассмотрена задача падения произвольной плоской волны на конечный участок волнистой поверхности, при этом проводимость подстилающей среды достаточно велика. В статье получены сингулярные интегральные уравнения, описывающие волновой процесс в такой неоднородной среде. Эти интегральные уравнения имеют гиперсингулярную особенность и для их решения в данной работе разработан вычислительный метод, использующий явный алгоритм выделения особенности.

Рассмотрим задачу отражения электромагнитной волны от границы раздела двух сред, которая состоит из идеально проводящей плоскости  $\Sigma$ , имеющей локальный цилиндрический вдоль оси  $z$  импедансный участок  $S$ , полностью расположенный в полупространстве  $y \geq 0$ . Область  $D_1$ , в которой распространяется падающее поле, характеризуется параметрами  $\varepsilon_1, \mu_1, k_1$ , являющимися соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостями, волновым числом. Здесь  $k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ ,  $\omega$  - круговая частота. Зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$ .

Поле плоской волны задается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0(x, y, z) &= \mathbf{E}_0 \exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y + i\gamma_0 z), \\ \mathbf{H}_0(x, y, z) &= \mathbf{H}_0 \exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y + i\gamma_0 z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha_0 = k_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0$ ,  $\beta_0 = k_1 \cos \theta_0 \sin \varphi_0$ ,  $\gamma_0 = k_1 \cos \varphi_0$ . Здесь  $(\pi/2 - \varphi_0)$  – угол между осью  $z$  и направлением распространения падающей волны. Если  $\varphi_0 = \pi/2$ , то  $\cos \varphi_0 = 0$ , и получаем плоскую (двумерную) задачу отражения. Если  $\theta_0 = 0$ , то в плоской задаче имеем случай нормального падения.

Будем искать в области  $D_1$  решение однородной системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}(x, y, z) + i\omega \varepsilon_1 \mathbf{E}(x, y, z) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(x, y, z) - i\omega \mu_1 \mathbf{H}(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

удовлетворяющее на плоском участке  $\Sigma$  границы раздела сред условию идеальной проводимости

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}(x, y, z)] = 0, \quad (3)$$

а на локальном участке  $S$  с конечной проводимостью условиям Леонтовича

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}(x, y, z)] = -W_2 [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{H}(x, y, z)]], \quad (4)$$

где  $W_2 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2}$ . Здесь  $\varepsilon_2, \mu_2$  – характеристики участка  $S$ ;  $\mathbf{n}$  – нормаль, внешняя к области  $D_1$  с нулевой координатой по оси  $z$ .

Учитывая геометрию границы раздела и характер падающего поля, искомое решение запишем в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) \exp(i\gamma_0 z), \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y) \exp(i\gamma_0 z), \quad (5)$$

тогда граничные условия (4) примут вид [3, стр. 7]

$$\begin{aligned} E_z(x, y) &= \frac{W_2}{k_1^2 - \gamma_0^2} \left( -i\gamma_0 \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial \tau} - i\omega \varepsilon_1 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial n} \right) \\ H_z(x, y) &= \frac{1}{W_2(k_1^2 - \gamma_0^2)} \left( -i\omega \mu_1 \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial n} + i\gamma_0 \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

В формулах (6) использованы обозначения: производная по нормали  $\partial / \partial n = n_x \partial / \partial x + n_y \partial / \partial y$ , производная по касательной

$\partial/\partial\tau = n_x \partial/\partial y - n_y \partial/\partial x$ , а  $n_x, n_y$  – направляющие косинусы нормали  $\mathbf{n}$ . Соответственно граничные условия (3) на  $\Sigma$  запишутся в следующем виде:

$$E_z(x, y) = 0, \quad \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial n} = 0. \quad (7)$$

Обозначим  $u(x, y) = E_z(x, y)$ ,  $v(x, y) = H_z(x, y)$ ,  $\beta_1^2 = k_1^2 - \gamma_0^2$ . Тогда рассматриваемая краевая задача сводится к решению однородного уравнения Гельмгольца в области  $D_1$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_1^2 \right) \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями (6) - (7).

Для получения эквивалентной системы интегральных уравнений введем функции Грина  $g^{E,H}(M, P)$ , удовлетворяющие в области  $D_1$  неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_1^2 \right) g^{E,H}(M, P) = -2\pi\delta(M, P), \quad (9)$$

граничным условиям идеального металла на плоскости  $\Sigma$

$$g^E(M, P) = 0, \quad \frac{\partial g^H(M, P)}{\partial n} = 0 \quad (10)$$

и имеющие вид

$$\begin{aligned} g^E(M, P) &= \frac{i\pi}{2} [H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M,P}) - H_0^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P})] \\ g^H(M, P) &= \frac{i\pi}{2} [H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M,P}) + H_0^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P})] \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $H_0^{(1)}(x)$  – функции Ханкеля нулевого порядка первого рода,  $r_{M,P} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ,  $\hat{r}_{M,P} = \sqrt{\Delta x^2 + s y^2}$ ,  $\Delta x = x_M - x_P$ ,  $\Delta y = y_M - y_P$ ,  $s y = y_M + y_P$ ;  $(x_{M,P}; y_{M,P})$  – координаты точек  $M$  и  $P$  соответственно.

Применяя в области  $D_1$  формулы Грина и учитывая свойства поверхностных потенциалов, получим две независимые системы из двух интегральных уравнений относительно неизвестных на конечном участке

$S$  функций  $\frac{\partial u(P)}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial v(P)}{\partial \tau}$  в случае  $E$ -поляризации и  $v(P)$ ,  $\frac{\partial u(P)}{\partial \tau}$  в случае  $H$ -поляризации вида:

$$\begin{aligned} & \frac{ik_1 W_2}{2W_1 \beta_1^2} \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} + \frac{i\gamma_0 W_2}{2\beta_1^2} \frac{\partial v(M)}{\partial \tau_M} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ \left( g^E(M, P) + \frac{ik_1 W_2}{W_1 \beta_1^2} \frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_p} \right) \frac{\partial u(P)}{\partial n_p} + \right. \\ & \left. + \frac{i\gamma_0 W_2}{\beta_1^2} \frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_p} \frac{\partial v(P)}{\partial \tau_p} \right] ds_p = -u_0^E(M), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ \left( \frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_M} + \frac{ik_1 W_2}{W_1 \beta_1^2} \frac{\partial^2 g^E(M, P)}{\partial n_M \partial n_p} \right) \frac{\partial u(P)}{\partial n_p} + \right. \\ & \left. + \frac{i\gamma_0 W_2}{\beta_1^2} \frac{\partial^2 g^E(M, P)}{\partial n_M \partial n_p} \frac{\partial v(P)}{\partial \tau_p} \right] ds_p = \frac{\partial u_0^E(M)}{\partial n_M}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} v(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ \left( \frac{iW_2 \beta_1^2}{k_1 W_1} g^H(M, P) - \frac{\partial g^H(M, P)}{\partial n_p} \right) v(P) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_0}{k_1 W_1} g^H(M, P) \frac{\partial u(P)}{\partial \tau_p} \right] ds_p = v_0^H(M), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{iW_2 \beta_1^2}{2k_1 W_1} v(M) + \frac{\gamma_0}{2k_1 W_1} \frac{\partial u(M)}{\partial \tau_M} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ \left( \frac{iW_2 \beta_1^2}{k_1 W_1} \frac{\partial g^H(M, P)}{\partial n_M} - \frac{\partial^2 g^H(M, P)}{\partial n_M \partial n_p} \right) v(P) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_0}{k_1 W_1} \frac{\partial g^H(M, P)}{\partial n_M} \frac{\partial u(P)}{\partial \tau_p} \right] ds_p = \frac{\partial v_0^H(M)}{\partial n_M}, \quad M \in S, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$u_0^E(x, y) = \exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y) - \exp(i\alpha_0 x + i\beta_0 y), \quad (16)$$

$$u_0^H(x, y) = \exp(i\alpha_0 x - i\beta_0 y) + \exp(i\alpha_0 x + i\beta_0 y).$$

Если  $\gamma_0 = 0$ , т.е. падающая волна лежит в плоскости  $XOY$ , то вместо двух систем интегральных уравнений (12)-(13) и (14)-(15) получаем два независимых интегральных уравнений Фредгольма второго рода [2].

Рассмотрим алгоритм для решения системы интегральных уравнений (12)-(13) относительно неизвестных функций  $\frac{\partial u(P)}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial v(P)}{\partial \tau}$  в случае  $E$ -поляризации. Для этого перепишем ее в виде:

$$\frac{1}{2} \alpha_E^1 \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} + \frac{1}{2} \gamma_0^1 \frac{\partial v(M)}{\partial \tau_M} + \quad (17)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ A^{11}(M, P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + A^{12}(M, P) \frac{\partial v(P)}{\partial \tau_P} \right] ds_P = -u_0^E(M),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} - \frac{1}{2\pi} \int_S \left[ A^{21}(M, P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + A^{22}(M, P) \frac{\partial v(P)}{\partial \tau_P} \right] ds_P = \frac{\partial u_0^E(M)}{\partial n_M}, \quad (18)$$

где введены следующие обозначения:

$$A^{11}(M, P) = g^E(M, P) + \alpha_E^1 \frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_P}, \quad A^{12}(M, P) = \gamma_0^1 \frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_P}, \quad (19)$$

$$A^{21}(M, P) = \frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_M} + \alpha_E^1 \frac{\partial^2 g^E(M, P)}{\partial n_M \partial n_P}, \quad A^{22}(M, P) = \gamma_0^1 \frac{\partial^2 g^E(M, P)}{\partial n_M \partial n_P},$$

$$\alpha_E^1 = \frac{\alpha_E}{1 - (\gamma_0/k_1)^2}, \quad \alpha_E = \frac{i}{k_1 \sqrt{\epsilon_2}} = \frac{iW_2}{k_1 W_1}, \quad \gamma_0^1 = \frac{i\gamma_0}{\beta_1^2 \sqrt{\epsilon_2}}.$$

Будем решать систему интегральных уравнений (17)-(18) сведением к системе линейных алгебраических уравнений. Пусть  $y = f(x)$  – уравнение цилиндрической неоднородной поверхности  $S$ ,  $0 \leq x \leq a$ . Разобьем отрезок  $[0, a]$  точками  $x_i$  на  $N$  равных частей,

$x_0 = 0$ ,  $x_N = a$ ,  $x_i = ia/N$ . Тогда точками разбиения кривой  $S$  будут точки с координатами  $(x_i, f(x_i))$ . В уравнении (17) сделаем замену переменных  $ds_p = J(x)dx_p$ , где  $J(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$  – якобиан перехода. Заменяем интегралы в системе (17)-(18) квадратурными суммами

$$\frac{1}{2} \alpha_E^1 \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} + \frac{1}{2} \gamma_0^1 \frac{\partial v(M)}{\partial \tau_M} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial u \left( P_{j+\frac{1}{2}} \right)}{\partial n_p} \int_{x_j, x_{j+1}} A^{11}(M, P) J(x_p) dx_p + \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial v \left( P_{j+\frac{1}{2}} \right)}{\partial \tau_p} \int_{x_j, x_{j+1}} A^{12}(M, P) J(x_p) dx_p = -u_0^E(M),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u(M)}{\partial n_M} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial u \left( P_{j+\frac{1}{2}} \right)}{\partial n_p} \int_{s_{p_j}, p_{j+1}} A^{21}(M, P) ds_p - \quad (21)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial v \left( P_{j+\frac{1}{2}} \right)}{\partial \tau_p} \int_{s_{p_j}, p_{j+1}} A^{22}(M, P) ds_p = \frac{\partial u_0^E(M)}{\partial n_M}.$$

Полагая в (20)-(21)  $M = M_{i+\frac{1}{2}}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , получим следующую систему

линейных алгебраических уравнений относительно  $2N$  неизвестных  $\frac{\partial u(M_1)}{\partial n_M}, \dots, \frac{\partial u(M_N)}{\partial n_M}, \frac{\partial v(M_1)}{\partial \tau_M}, \dots, \frac{\partial v(M_N)}{\partial \tau_M}$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{A}$  – четырехклеточная матрица размерности  $2N$ ,

$\mathbf{X} = \left\{ \frac{\partial u(M_1)}{\partial n_M}, \dots, \frac{\partial u(M_N)}{\partial n_M}, \frac{\partial v(M_1)}{\partial \tau_M}, \dots, \frac{\partial v(M_N)}{\partial \tau_M} \right\}$  – неизвестный вектор, а

$\mathbf{F} = \left\{ -u_0^E(M_1), \dots, -u_0^E(M_N), \frac{\partial u_0^E(M_1)}{\partial n_M}, \dots, \frac{\partial u_0^E(M_N)}{\partial n_M} \right\}$  – заданный вектор,

определяемый падающим полем.

Получим расчетные формулы для вычисления элементов матрицы  $A$ . Поскольку в квадратурных суммах при вычислении диагональных элементов матрицы  $A$  точки  $M$  и  $P$  могут совпадать, то для создания численного алгоритма необходимо выделить логарифмическую особенность, входящую в  $g^E(M, P)$ , и разработать алгоритм для вычисления гиперсингулярных интегралов, подынтегральная функция в которых зависит от  $\frac{\partial^2 g^E(M, P)}{\partial n_M \partial n_P}$ .

Логарифмическую особенность, входящую в  $g^E(M, P)$ , которая определяется слагаемым  $\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M,P})$ , выделим в явном виде, для этого используем следующие соотношения:

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M,P}) = \left[ \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M,P}) - \ln \frac{1}{r_{M,P}} + \ln \frac{|\Delta x|}{r_{M,P}} \right] - \ln |\Delta x|. \quad (23)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, интегрируется численно, при этом в точках  $M = P$  доопределяется значением, равным  $1 + \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{\beta_1}{2} + c \right) + \ln \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$ , где  $c = 0,577215664901532\dots$  — есть постоянная Эйлера, а  $f'(x)$  — значение производной от функции  $y = f(x)$ , задающей контур  $S$ , в точке  $M = P$ . Интеграл от второго слагаемого в формуле (23) вычисляется аналитически и равен

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \ln |x_M - x_P| dx_P = (x_M - x_j) (\ln |x_M - x_j| - 1) - (x_M - x_{j+1}) (\ln |x_M - x_{j+1}| - 1), \quad (24)$$

при этом значение якобиана перехода, мало меняющееся на отрезке интегрирования, выносится за знак интеграла в средней точке.

Вычисление функции  $\frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_P}$  при  $M \neq P$  осуществляется по формуле

$$\frac{\partial g^E(M, P)}{\partial n_P} = -\frac{i\pi}{2} \beta_1 \left[ H_1^{(1)}(\beta_1 r_{M,P}) \frac{\partial r_{M,P}}{\partial n_P} - H_1^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P}) \frac{\partial \hat{r}_{M,P}}{\partial n_P} \right], \quad (25)$$

а при совпадении аргументов доопределяется значением  $\frac{1}{2}\chi(P)$ , где  $\chi(P)$  – кривизна контура  $S$  в точке  $P$  [4, стр. 349].

Получим расчетные формулы для вычисления сингулярных интегралов от второй нормальной производной функции Грина  $g^E(M, P)$  по отрезку  $[s_p, s_{p+1}]$ , входящих в выражения  $A^{21}(M, P)$  и  $A^{22}(M, P)$  формул (19), при этом внешнюю нормаль к области  $D_1$  запишем в виде  $\mathbf{n} = -y'_s \mathbf{i} + x'_s \mathbf{j}$ , где для поверхности  $S$  использована параметрическая форма ее задания:  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ . В отличие от результатов работы [5], точки  $M$  и  $P$  могут совпадать. Заметим, что в случае задания границы  $S$  в виде  $y = f(x)$ , связь между направляющими косинусами  $n_x, n_y$  нормали  $\mathbf{n}$ , внешней к области  $D_1$ , есть  $y'_s = -n_x \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ ,  $x'_s = n_y \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ , где  $n_x = f'(x) / \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ ,  $n_y = -1 / \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ . Имеем

$$\int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_p} g^E \left( M_{i+\frac{1}{2}}, P \right) ds_p = \tag{26}$$

$$= \frac{i\pi}{2} \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) ds_p - \frac{i\pi}{2} \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 \hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) ds_p.$$

Рассмотрим в первом слагаемом (26) компоненту  $\partial / \partial x_M$  (без множителя  $i\pi/2$ ).

$$\int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial x_M \partial n_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) ds_p = - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) ds_p =$$

$$= - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \left[ - \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) y'_{s_p} + \frac{\partial}{\partial y_p} \left( \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) \right) x'_{s_p} \right] ds_p =$$

$$= - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \left[ \frac{\partial}{\partial y_p} \left( \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) \right) y'_{s_p} + \beta_1^2 H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, P} \right) y'_{s_p} - \right.$$



$$\begin{aligned}
& -4i \delta(M, P) y'_{s_p} + \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) \right) x'_{s_p} \Big] ds_p = \quad (27) \\
& = - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} d \left( \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) \right) - \beta_1^2 \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) y'_{s_p} ds_p + \\
& \quad + 4i \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \delta(M, P) y'_{s_p} ds_p = \\
& = - \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p_{j+1}} \right) + \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p_j} \right) - \beta_1^2 \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) y'_{s_p} ds_p + \\
& \quad + 4i \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \delta(M, P) y'_{s_p} ds_p.
\end{aligned}$$

В соотношениях (27) точки  $M$  и  $P$  могут совпадать, поэтому функция Ханкеля  $H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M, P})$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца.

Аналогично в первом слагаемом (26) рассмотрим компоненту  $\partial / \partial y_M$ .

$$\begin{aligned}
& \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial y_M \partial n_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) ds_p = - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \frac{\partial}{\partial n_p} \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) ds_p = \\
& = - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \left[ - \frac{\partial}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) y'_{s_p} + \frac{\partial}{\partial y_p} \left( \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) \right) x'_{s_p} \right] ds_p = \\
& = - \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \left[ - \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) \right) x'_{s_p} - \beta_1^2 H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) x'_{s_p} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y_p} \left( \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) \right) y'_{s_p} \right] ds_p - 4i \int_{s_{p_j, p_{j+1}}} \delta(M, P) x'_{s_p} ds_p = \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} -d \left( \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p} \right) \right) + \beta_1^2 \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p} \right) x'_{S_p} ds_p - \\
&\quad - 4i \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} \delta(M, P) x'_{S_p} ds_p = \\
&= \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_j} \right) + \beta_1^2 \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p} \right) x'_{S_p} ds_p - \\
&\quad - 4i \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} \delta(M, P) x'_{S_p} ds_p.
\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая (27)-(28), первое слагаемое в (26) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{P_j, P_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p} \right) ds_p = \\
&= -y'_{S_M} \left[ -\frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}} \right) + \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_j} \right) \right] + \\
&+ x'_{S_M} \left[ \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_j} \right) \right] + \quad (29) \\
&+ \beta_1^2 \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, p} \right) \left( y'_{S_M, i+\frac{1}{2}} y'_{S_p} + x'_{S_M, i+\frac{1}{2}} x'_{S_p} \right) ds_p - \\
&- 4i \int_{S_{P_j, P_{j+1}}} \delta(M, P) \left( y'_{S_M, i+\frac{1}{2}} y'_{S_p} + x'_{S_M, i+\frac{1}{2}} x'_{S_p} \right) ds_p.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_p} H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M, p}) = \beta_1 H_1^{(1)}(\beta_1 r_{M, p}) \frac{\Delta x}{r_{M, p}}; \quad \frac{\partial}{\partial y_p} H_0^{(1)}(\beta_1 r_{M, p}) = \beta_1 H_1^{(1)}(\beta_1 r_{M, p}) \frac{\Delta y}{r_{M, p}},$$

то формулу (29) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{s_{P_j, P_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_P} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) ds_P = \\
& = \beta_1 H_1^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}} \right) \frac{\left( y_{M, i+\frac{1}{2}} - y_{P_{j+1}} \right) y'_{SM, i+\frac{1}{2}} + \left( x_{M, i+\frac{1}{2}} - x_{P_{j+1}} \right) x'_{SM, i+\frac{1}{2}}}{r_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}}} - \\
& - \beta_1 H_1^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P_j} \right) \frac{\left( y_{M, i+\frac{1}{2}} - y_{P_j} \right) y'_{SM, i+\frac{1}{2}} + \left( x_{M, i+\frac{1}{2}} - x_{P_j} \right) x'_{SM, i+\frac{1}{2}}}{r_{M, i+\frac{1}{2}, P_j}} + \quad (30) \\
& + \beta_1^2 \int_{s_{P_j, P_{j+1}}} H_0^{(1)} \left( \beta_1 r_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) \left( y'_{SM, i+\frac{1}{2}} y'_{SP} + x'_{SM, i+\frac{1}{2}} x'_{SP} \right) ds_P - \\
& - 4i \int_{s_{P_j, P_{j+1}}} \delta(M, P) \left( y'_{SM, i+\frac{1}{2}} y'_{SP} + x'_{SM, i+\frac{1}{2}} x'_{SP} \right) ds_P.
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого в формуле (26) можно получить аналогичное (30) представление, если учесть, что слагаемое, содержащее дельта-функцию, будет отсутствовать. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_P} H_0^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P}) = \beta_1 H_1^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P}) \frac{\Delta x}{\hat{r}_{M,P}}; \quad \frac{\partial}{\partial y_P} H_0^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P}) = -\beta_1 H_1^{(1)}(\beta_1 \hat{r}_{M,P}) \frac{sy}{\hat{r}_{M,P}},$$

то в результате будем иметь

$$\begin{aligned}
& \int_{s_{P_j, P_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_P} H_0^{(1)} \left( \beta_1 \hat{r}_{M, i+\frac{1}{2}, P} \right) ds_P = \\
& = -\beta_1 H_1^{(1)} \left( \beta_1 \hat{r}_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}} \right) \frac{\left( y_{M, i+\frac{1}{2}} + y_{P_{j+1}} \right) y'_{SM, i+\frac{1}{2}} + \left( x_{M, i+\frac{1}{2}} - x_{P_{j+1}} \right) x'_{SM, i+\frac{1}{2}}}{\hat{r}_{M, i+\frac{1}{2}, P_{j+1}}} +
\end{aligned}$$

$$+ \beta_1 H_1^{(0)} \left( \beta_1 \hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_j} \right) \frac{\left( y_{M_{i+\frac{1}{2}}} + y_{P_j} \right) y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} + \left( x_{M_{i+\frac{1}{2}}} - x_{P_j} \right) x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}}}{\hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_j}} + \quad (31)$$

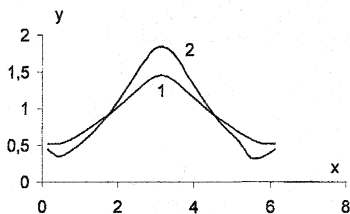
$$+ \beta_1^2 \int_{s_{P_j, P_{j+1}}} H_0^{(0)} \left( \beta_1 \hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P} \right) \left( y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} y'_{SP} - x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} x'_{SP} \right) ds_P.$$

Используя (30) и (31), получаем численный алгоритм расчета сингулярного интеграла от второй нормальной производной функции Грина  $g^E(M, P)$  по участку  $[s_{P_j}, s_{P_{j+1}}]$ :

$$\begin{aligned} & \int_{s_{P_j, P_{j+1}}} \frac{\partial^2}{\partial n_M \partial n_P} g^E \left( M_{i+\frac{1}{2}}, P \right) ds_P = \\ & = \frac{i\pi}{2} \beta_1 \left[ H_1^{(0)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_{j+1}} \right) \frac{\left( y_{M_{i+\frac{1}{2}}} - y_{P_{j+1}}} \right) y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} + \left( x_{M_{i+\frac{1}{2}}} - x_{P_{j+1}}} \right) x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}}}{r_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_{j+1}}} - \right. \\ & \quad \left. - H_1^{(0)} \left( \beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_j} \right) \frac{\left( y_{M_{i+\frac{1}{2}}} - y_{P_j} \right) y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} + \left( x_{M_{i+\frac{1}{2}}} - x_{P_j} \right) x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}}}{r_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_j}} \right] + \\ & + \frac{i\pi}{2} \beta_1 \left[ H_1^{(0)} \left( \beta_1 \hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_{j+1}} \right) \frac{\left( y_{M_{i+\frac{1}{2}}} + y_{P_{j+1}}} \right) y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} + \left( x_{M_{i+\frac{1}{2}}} - x_{P_{j+1}}} \right) x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}}}{\hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}, 1, P_{j+1}}} - \right. \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -H_1^{(0)}\left(\beta_1 \hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}^{1,P_j}}\right) \frac{\left(y_{M_{i+\frac{1}{2}}} + y_{P_j}\right) y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} + \left(x_{M_{i+\frac{1}{2}}} - x_{P_j}\right) x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}}}{\hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}^{1,P_j}}} + \\
& + \frac{i\pi}{2} \beta_1^2 \int_{SP_j, P_{j+1}} \left[ H_0^{(0)}\left(\beta_1 r_{M_{i+\frac{1}{2}}^{1,P}}\right) \left( y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} y'_{SP} + x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} x'_{SP} \right) - \right. \\
& \left. - H_0^{(1)}\left(\beta_1 \hat{r}_{M_{i+\frac{1}{2}}^{1,P}}\right) \left( y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} y'_{SP} - x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} x'_{SP} \right) \right] ds_P + \\
& + 2\pi \int_{SP_j, P_{j+1}} \delta(M, P) \left( y'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} y'_{SP} + x'_{SM_{i+\frac{1}{2}}} x'_{SP} \right) ds_P.
\end{aligned}$$

Интегралы, входящие в (32) и зависящие от функций Ханкеля, вычисляем по описанной выше методике, а интеграл, содержащий дельта-функцию, даст выброс при счете диагональных элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , если при этом использовать такие квадратурные формулы, когда точки  $M$  и  $P$  совпадают.



На основе предложенного численного алгоритма был разработан комплекс программ для решения системы интегральных уравнений (17)-(18) и проведены тестовые расчеты. Пусть контур  $S$  в плоскости  $XOY$  задается уравнением  $f(x) = 1 - \cos x$ . Электродинамические параметры среды заданы следующие:  $k_1 = 0.5$ ;  $\varepsilon_2 = 50 + 4i$ ;  $\theta_0 = 0$ ;  $\varphi_0 = 89\pi/180$ .

При заданных значениях углов падения трехмерной волны рассматриваемая математическая модель близка к задаче дифракции поля плоской двумерной волны в случае ее нормального падения ( $\gamma_0$  близко к нулю). На приведенном в работе рисунке показано распределение по оси  $y$  расчетной функции  $|\partial u(P)/\partial n|$  на границе  $S$ . Кривая 1 соответствует распределению тока на границе  $S$ , состоящей из одного периода функции  $f(x)$  при  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Кривая 2 показывает распределение тока на среднем участке контура, когда  $S = 3S_0$ , где  $S_0$  - период функции  $f(x)$ . Эти численные результаты согласуются с результатами, приведенными на рис. 4 в работе [1] и полученными при решении двумерной задачи отражения при  $\gamma_0 = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Рассеяние плоской волны на волнистой поверхности. // Математические модели естествознания. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1995. С. 86-111.
2. Ильинский А.С., Галишникова Т.Н. Математическое моделирование процесса отражения плоской электромагнитной волны от волнистой поверхности. // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 7. С. 773-786.
3. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ. 1987.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука. 1972. 736 с.
5. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. - М.: «Янус-К». 2001. 508 с.