А.С. Ильинский

ОБОСНОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ПОСТОЯННЫХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ, МИКРОПОЛОСКОВЫХ И ЩЕЛЕВЫХ ЛИНИЙ*

Нерегулярные волноводные системы нашли широкое применение в антенно-фидерных устройствах СВЧ диапазона, в вакуумной электронике и при освоении волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазона. Основные математические постановки задач были сформулированы в пятидесятых годах 20-го столетия в работах Г.В. Кисунько, Б.З. Каценеленбаума, А.Г. Свешникова и В.П. Шестопалова. При этом фундаментальную роль при постановке математических задач в теории нерегулярных волноводов сыграли "парциальные" условия излучения, сформулированные А.Г. Свешниковым в 1951 году. Условия излучения были первоначально сформулированы для нерегулярных волноводных систем, имеющих регулярные каналы на бесконечности. Для регулярных волноводов в работах А.Н. Тихонова и А.А. Самарского была построена спектральная теория нормальных волн, полнота и базисность которых следовала из теории самосопряженных краевых задач Дирихле и Неймана в поперечном сечении регулярного волноводного канала.

Значительно сложнее обстоит дело в тех случаях, когда волноводные каналы, уходящие на бесконечность, неоднородны в поперечном сечении или мы имеем дело с периодически повторяющимися неоднородностями. Это характерно для замедляющих структур, гофрированных волноводов, экранированных микрополосковых линий. В этих случаях вопрос о существовании и основных свойствах системы нормальных волн приводит к несамосопряженным спектральным задачам. Одним из пионеров в постановке и решении таких задач был В.П. Шестопалов.

В данной работе рассмотрен метод оператор - функции для исследования задач существования собственных волн для одного класса неоднородных в поперечном сечении волноводов.

Постановка задачи

Экранированные микрополосковые линии представляют собой плоский идеально проводящий, идеально тонкий экран, лежащий внутри регулярных волноводов, границами которых являются идеально проводящие металлические стенки (рис.1). Внутри волновода помещены слои диэлектрика. Задача о распространении электромагнитного поля вдоль та-

* По проекту УР.03.03.005 научной Программы "Университеты России".

ких экранированных микрополосковых линий состоит в отыскании решений однородной системы уравнений Максвелла

$$rot\,E = -i\omega\mu\,H, \quad rot\,H = i\omega\varepsilon\,E, \tag{1}$$

с граничными условиями на металле М

$$[n, E]|_M = 0, \tag{2}$$

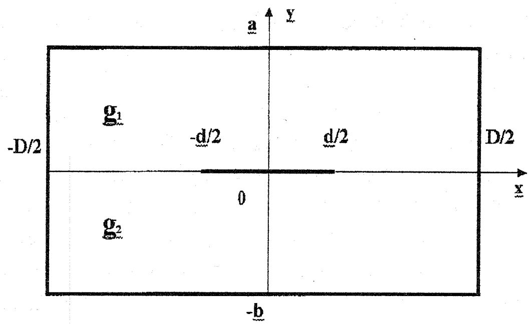

Рис. 1

и с условиями сопряжения в отверстии L. Здесь через M обозначены металлические части идеально проводящей поверхности экранированной микрополосковой линии, а через L – отверстие, связывающее регулярные части экранированной микрополосковой линии.

Суть условия сопряжения заключается в том, что в отверстии тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей являются непрерывными. Кроме того, мы будем предполагать, что поле удовлетворяет условию на ребре [1]. Решение задачи о собственных волнах будем искать в виде решения уравнения (1) с условиями (2), представимых в виде

$$E(x,y,z) = e^{-i\gamma z}\,E(x,y), \quad H(x,y,z) = e^{-i\gamma z}\,H(x,y).$$

В этом случае задача (1)-(2) будет эквивалентна задаче определения продольных компонент электромагнитного поля E_z и H_z. Как показано в [2], остальные компоненты электрического и магнитного полей определяются следующими формулами:

$$E_x = \frac{-i}{k^2}\left[\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right],$$

$$E_y = \frac{-i}{k^2}\left[\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right], \tag{3}$$

$$H_x = \frac{i}{k^2}\left[\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma\frac{\partial H_z}{\partial x}\right],$$

$$H_y = \frac{-i}{k^2}\left[\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}\right].$$

Обозначим $v = E_z, \quad u = H_z$, получим следующую задачу:

$$\Delta v + k^2 v = 0, \quad \Delta u + k^2 u = 0, \tag{4}$$

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \gamma^2, \quad (x,y) \in G,$$

с условиями на металле

$$v\big|_M = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M = 0, \tag{5}$$

и условиями непрерывности полей в отверстии

$$[u]_L = [v]_L = 0, \tag{6}$$

$$\left[\frac{1}{k^2}\left(\gamma\frac{\partial v}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]_L = 0, \tag{7}$$

$$\left[\frac{1}{k^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} - \gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_L = 0. \tag{8}$$

Здесь, $G = G_1 \bigcup G_2$, где

$$G_1 = \left\{(x,y) \middle| -\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}, \quad 0 < y < a\right\},$$

$$G_2 = \left\{(x,y) \middle| -\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}, \quad -b < y < 0\right\},$$

$$L = \left\{(x,y) \middle| -\frac{D}{2} < x < -\frac{d}{2}, \quad y = 0\right\} \bigcup \left\{(x,y) \middle| \frac{d}{2} < x < \frac{D}{2}, \quad y = 0\right\},$$

$$M = \partial G_1 \bigcup \partial G_2 \setminus L.$$

Выражение $[\cdot]_L$ означает разность предельных значений функции при стремлении $y \to +0$ и $y \to -0$.

Предположим, что диэлектрическая и магнитная проницаемости постоянны в каждой подобласти и имеют разрыв на границе раздела частичных областей. Обозначим их соответственно ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2.

Условия на ребре можно сформулировать как требование, чтобы поля u и v в любом конечном объеме пространства внутри волновода имели конечную энергию. Это приводит к дополнительному условию на функции u, v

$$u, v \in H^1\left(G^1 \cup G^2 \cup L\right).$$

Граница раздела областей G^1 и $G^2: \left\{y=0, -\frac{D}{2} \le x \le \frac{D}{2}\right\}$ составлена из двух подобластей: отверстия L, где выполняются условия (7) и (8), а также поверхности идеально-проводящей ленты $\Gamma: \left\{y=0,\ |x| < \frac{d}{2}\right\}$.

Для удобства будем обозначать границу раздела через $\Lambda: \left\{y=0, -\frac{D}{2} \le x \le \frac{D}{2}\right\}$ и будем рассматривать Λ как замкнутое многообразие. Определим на прямой $y=0$ распределение $f(x)$, принадлежащее пространству $H^s(\Lambda)$, если $\tilde{f}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, которую мы считаем равной нулю вне границы Λ, является функцией и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{f}(\xi)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi < \infty \quad s \in R.$$

Поскольку $\Gamma \subset \Lambda$ (совпадает с частью отрезка Λ), положим

$$H^s(\Gamma) := \left\{v|_\Gamma; \quad v \in H^s(\Lambda)\right\},$$

$$\tilde{H}^s(\Gamma) := \left\{v \in H^s(\Lambda), \operatorname{supp} v \subset \overline{\Gamma}\right\}.$$

Пространства $H^s(\Gamma)$ и $\tilde{H}^{-s}(\Gamma)$ являются анти двойственными друг другу при всех $s \in R$ относительно полуторалинейной формы $\int_\Gamma v\overline{\omega} dl$.

Пространство $\tilde{H}^s(\Gamma)$ может быть получено замыканием $C_0^\infty(\Gamma)$ по норме $\| \|_s$. Более подробно свойства Соболевских пространств $H^s(\Lambda)$, $H^s(\Gamma)$, $\tilde{H}^s(\Gamma)$ описано в [1].

Введем операторы:

– оператор γ_0 – оператор следа на Λ,

– оператор γ_1 – оператор следа нормальной производной на Λ (из области G_1 и из области G_2),

– оператор q – оператор продолжения функции нулем с Γ на Λ

– и оператор p – оператор сужения функции нулем с Λ на Γ.

$$\gamma_0: \quad v \to v|_\Lambda: \quad H^1(G_i) \to H^{1/2}(\Lambda),$$

$$\gamma_1: \quad u \to \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Lambda} \quad : \quad H_p^1(G_i) \to H^{-1/2}(\Lambda),$$

$$q: \quad \varphi \to \widetilde{\varphi}: \quad \widetilde{H}^s(\Gamma) \to H^s(\Lambda),$$

$$p: \quad \varphi \to \varphi|_{\Gamma}: \quad H^s(\Lambda) \to H^s(\Gamma),$$

где $H_p^1(G_i) = \{u \in H^1(G_i); \quad \Delta u \in L_2(G_i)\}$.

Все операторы непрерывны на указанных парах пространств [3], поэтому достаточно определить их действия на гладких функциях, а затем распространить их действия по непрерывности.

Поскольку мы ищем решение u и v, принадлежащее пространству $H^1(G_i)$, то равенства (5), (6), (7), (8) будем понимать как равенства элементов из пространств $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(L)$ и $H^{-1/2}(L)$, заметим при этом, что $\overline{\Gamma} + L = \Lambda$ и $\overline{L} + \Gamma = \Lambda$.

Хорошо известно, что решения однородного уравнения Гельмгольца из пространства $H^1(G_i)$ будут бесконечно дифференцируемы G_i, поэтому можно сразу считать, что u и v принадлежат $C^2(G_i)$, и понимать решения уравнений (4) надо в обычном смысле.

Таким образом, исходная задача (1)–(2) сведена к двум скалярным задачам (4)–(6), связанным условиями (7)–(8). Отметим, что в случае совпадения диэлектрической и магнитной проницаемости сред, получаем две независимые задачи относительно продольных компонент электрического и магнитного полей.

Спектральный метод

Как и в работе [2], мы можем определить решения задачи (4)–(8) в каждой частичной области так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (5) на идеально проводящей стенке волновода $y = \pm D/2$. В этом случае имеем

$$v_1(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s y_{11}[\chi_{1s}(a-y)] X_{1s}(x), \quad (x,y) \in G_1,$$

$$v_2(x,y) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s y_{21}[\chi_{2s}(y+b)] X_{1s}(x), \quad (x,y) \in G_2,$$

$$u_1(x,y) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_s^1}{\chi_{1s}} y_{12}[\chi_{1s}(a-y)] X_{2s}(x), \quad (x,y) \in G_1, \qquad (9)$$

$$u_2(x,y)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s^1}{\chi_{2s}}y_{22}[\chi_{2s}(y+b)]X_{2s}(x),\quad (x,y)\in G_2,$$

где

$$X_{1s}(x)=\sin\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2x}{D}-1\right),\quad X_{2s}(x)=\cos\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2x}{D}-1\right),$$

$$y_{11}(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{\sin\chi_{1s}a}, & k_1^2-\eta_s^2>0,\\ \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh}\chi_{1s}a}, & k_1^2-\eta_s^2<0,\end{cases}$$

$$y_{21}(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{\sin\chi_{2s}z}, & k_2^2-\eta_s^2>0,\\ \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh}\chi_{2s}z}, & k_2^2-\eta_s^2<0,\end{cases}$$

$$y_{12}(z)=\begin{cases}\dfrac{\cos z}{\sin\chi_{1s}a}, & k_1^2-\eta_s^2>0,\\ \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh}\chi_{1s}a}, & k_1^2-\eta_s^2<0,\end{cases}$$

$$y_{22}(z)=\begin{cases}\dfrac{-\cos z}{\sin\chi_{2s}b}, & k_2^2-\eta_s^2>0,\\ \dfrac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh}\chi_{2s}b}, & k_2^2-\eta_s^2<0,\end{cases}$$

$$\eta_s=\frac{\pi s}{D},\quad k_1^2=\omega^2\varepsilon_i\mu_i-\gamma^2,$$

$$\chi_{is}=\sqrt{\left|k_i^2-\eta_s^2\right|}\frac{\pi s}{D},\quad i=1,2.$$

Так как решение v удовлетворяет условию непрерывности (6) в отверстии и равно нулю на экране, то мы можем утверждать, что оно удовлетворяет условию непрерывности на всем отрезке раздела частичных областей, т. е.

$$v_1(x,0)=v_2(x,0),\quad |x|\le\frac{D}{2}.$$

Учитывая это равенство, из (9) получим, что

$$A_s=B_s,\quad s=1,2,\ldots \tag{10}$$

Принимая во внимание (10), напишем условие (7) в развернутом виде. Тогда, при $\frac{d}{2} \le |x| \le \frac{D}{2}$, будем иметь

$$\left\{ \frac{\gamma\left(k_2^2 - k_1^2\right)}{k_2^2 k_1^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \omega \left[\frac{\mu_1}{k_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\mu_2}{k_2^2} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] \right\}\Bigg|_{y=0} = 0. \tag{11}$$

Поскольку v и u удовлетворяют граничным условиям (5), то равенство (11) верно и для всех $|x| \le \frac{D}{2}$. Подставляя в уравнение (11) соответствующие функции, определенные по формулам (9), получим

$$B_s^1 = \frac{k_2^2 \mu_1}{k_1^2 \mu_2} A_s^1 + \frac{\gamma\left(k_2^2 - k_1^2\right)\eta_s}{\omega k_1^2 k_2^2} A_s, \quad s = 0,1,\ldots, \tag{12}$$

где $A_0 = 0$. Рассмотрим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определяемые следующим образом:

$$\varphi(x) = u_1(x,0) - u_2(x,0), \quad |x| \le \frac{D}{2},$$

$$\psi(x) = \left\{ \omega \left[\frac{\varepsilon_1}{k_1^2} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\varepsilon_2}{k_2^2} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] + \gamma \left[\frac{1}{k_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{k_2^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \right\}\Bigg|_{y=0}, \quad |x| \le \frac{D}{2}. \tag{13}$$

В силу условий (6) и (8) получаем, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ равны нулю вне отрезка $\left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$. А из условий на ребре [1] следует, что эти функции имеют на концах интервала $\left(-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$ следующие особенности:

$$\varphi(x) = \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2 \right]^{1/2} \varphi_1(x),$$

$$\psi(x) = \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2 \right]^{-1/2} \psi_1(x), \tag{14}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ – регулярные функции. Подставляя выражение (9) в (13), и, учитывая (10), (12), получим линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных A_s, A_s^1:

$$C_{11}^s A_s + C_{12}^s A_s^1 = \frac{2}{D}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \varphi(\xi)\cos\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2\xi}{D}-1\right)d\xi, \tag{15}$$

$$C_{21}^s A_s + C_{22}^s A_s^1 = \frac{2}{D}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \psi(\xi)\sin\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2\xi}{D}-1\right)d\xi,$$

где

$$C_{11}^s = \frac{\gamma\left(k_1^2 - k_2^2\right)\eta_s y_{22}(\chi_{2s}b)}{\omega k_1^2 \mu_2 \chi_{2s}},$$

$$C_{12}^s = \frac{y_{12}(\chi_{1s}a)}{\chi_{1s}} - \frac{k_2^2 \mu_2 y_{22}(\chi_{2s}b)}{k_1^2 \mu_2 \chi_{2s}},$$

$$C_{21}^s = -\left[\frac{\omega\varepsilon_1 \chi_{1s} y_{11}'(\chi_{1s}a)}{k_1^2} + \frac{\omega\varepsilon_2 \chi_{2s} y_{21}'(\chi_{2s}b)}{k_2^2} + \frac{\gamma^2\left(k_2^2 - k_1^2\right)\eta_s^2 y_{22}(\chi_{2s}b)}{\omega k_1^2 k_2^2 \mu_2 \chi_{2s}}\right],$$

$$C_{22}^s = \frac{\gamma\eta_s}{k_1^2}\left[\frac{y_{12}(\chi_{1s}a)}{\chi_{1s}} - \frac{\mu_1 y_{22}(\chi_{2s}b)}{\mu_2 \chi_{2s}}\right].$$

Нетрудно получить из этих выражений, что при $s \to \infty$ коэффициенты C_{11}^s, C_{12}^s, C_{21}^s и C_{22}^s ведут себя следующим образом:

$$C_{11}^s = O(1), \quad C_{12}^s = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad C_{21}^s = O(s), \quad C_{22}^s = O(1).$$

Исходя из уравнений (15), мы можем определить коэффициенты A_s и A_s^1 через неизвестные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$A_s = \frac{2}{D\Delta_s}\left[C_{22}^s \int\limits_{-d/2}^{d/2} \varphi(\xi)\cos\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2\xi}{D}-1\right)d\xi - C_{12}^s \int\limits_{-d/2}^{d/2} \psi(\xi)\sin\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2\xi}{D}-1\right)d\xi\right],$$

$$\tag{16}$$

$$A_s^1 = \frac{2}{D\Delta_s}\left[C_{11}^s \int\limits_{-d/2}^{d/2} \psi(\xi)\sin\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2\xi}{D}-1\right)d\xi - C_{21}^s \int\limits_{-d/2}^{d/2} \varphi(\xi)\cos\frac{\pi s}{2}\left(\frac{2\xi}{D}-1\right)d\xi\right],$$

$$\Delta_s = C_{11}^s C_{22}^s - C_{12}^s C_{21}^s, \quad s = 1,2,...$$

А для коэффициента A_0^1 мы будем иметь

$$A_0^1 = \frac{2}{DC_{12}^0}\int\limits_{-d/2}^{d/2} \varphi(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Подставляя полученные по формулам (16)-(17) значения A_s и A_s^1 в (9), получим выражения для продольных компонент электромагнитного поля в частичных областях через неизвестные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Таким образом, если мы определили отличные от нуля функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то получим нетривиальные решения уравнений (4), удовлетворяющие условиям непрерывности (6)-(8) в отверстии. Кроме того, полученные решения уравнений (4) удовлетворяют граничным условиям (5) на идеально проводящей стенке прямоугольного регулярного волновода, экранирующего микрополосковую линию.

Отметим, что для определения неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ необходимо пользоваться граничными условиями (5) на тонком экране, лежащем на границе раздела частичных областей. В этом случае мы получим функциональные уравнения относительно неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

$$F_1[\varphi(\xi),\psi(\xi)](x) \equiv v(x,0) = 0,$$

$$F_2[\varphi(\xi),\psi(\xi)](x) \equiv \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad |x| \le \frac{d}{2}. \tag{18}$$

Для решения системы функциональных уравнений (17) разложим неизвестные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на интервале $\left(-\frac{d}{2},\frac{d}{2}\right)$ по полным ортогональным системам многочленов Чебышева первого и второго родов с учетом (14)

$$\varphi(x) = \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right]^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l U_l\left(\frac{2x}{d}\right), \quad \sum_{l=0}^{\infty} |\varphi_l|^2 < \infty,$$

$$\psi(x) = \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right]^{-1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l T_l\left(\frac{2x}{d}\right), \quad \sum_{l=0}^{\infty} |\psi_l|^2 < \infty \tag{19}$$

и заменим систему функциональных уравнений (17) эквивалентной системой, получаемой требованием ортогональности F_1 и F_2 ко всем многочленам ортогональной системы Чебышева первого и второго родов.

Тогда имеем

$$\int_{-d/2}^{d/2} F_1[\varphi(\xi),\psi(\xi)](x) \left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right]^{1/2} T_p\left(\frac{2x}{d}\right) dx = 0,$$

$$\int\limits_{-d/2}^{d/2} F_2[\varphi(\xi),\psi(\xi)](x)\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right]^{-1/2} U_p\left(\frac{2x}{d}\right)dx = 0,$$

при всех $p = 1,2,\ldots$. И, наконец, проводя почленное интегрирование и, используя при этом формулы (7.355) из [7], получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного $X = \{\varphi_l, \psi_l\}$

$$A(\gamma)X \equiv \begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{\infty}\left[A_{lp}^{11}\varphi_l + A_{lp}^{12}\psi_l\right] = 0, \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}\left[A_{lp}^{21}\varphi_l + A_{lp}^{22}\psi_l\right] = 0, \end{cases} \tag{20}$$

Коэффициенты A_{lp}^{11}, A_{lp}^{12}, A_{lp}^{21} и A_{lp}^{22} определяются следующими выражениями:

$$A_{lp}^{11} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2C_{22}^s}{D\Delta_s}T_{ls}^1 T_{ps}^2,$$

$$A_{lp}^{12} = -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2C_{12}^s}{D\Delta_s}T_{ls}^2 T_{ps}^2,$$

$$A_{lp}^{21} = \frac{1}{DC_{12}^0}T_l T_p - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2C_{21}^s}{D\Delta_s}T_{ls}^1 T_{ps}^1,$$

$$A_{lp}^{22} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{2C_{11}^s}{D\Delta_s}T_{ls}^2 T_{ps}^1,$$

где

$$T_{ls}^1 = \left[(-1)^l + (-1)^s\right]\frac{Dd(l+1)i^{l+s}}{4s} I_{l+1}\left(\frac{\pi ds}{2D}\right),$$

$$T_{ls}^2 = \left[(-1)^l + (-1)^s\right]\frac{\pi i^{l+s+1}}{4s} I_l\left(\frac{\pi ds}{2D}\right),$$

$$T_l = \begin{cases} 0, & l \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & l = 0. \end{cases}$$

Эквивалентность

Таким образом, из исходной краевой задачи (4)-(8) определения нормальных электромагнитных волн экранированной микрополосковой линии мы получим дисперсионное уравнение (20). Важнейшее значение имеет доказательство эквивалентности исходной краевой задачи и дисперсионного уравнения, ибо оно позволяет не только дать эффективный алгоритм вычисления нормальных волн, но и провести глубокое аналитическое исследование спектра несамосопряженных краевых задач теории нормальных волн.

При доказательстве эквивалентности этих двух формулировок задач воспользуемся теоремой 4 из [3]. Отметим, что с помощью этой теоремы в работе [3] доказывается эквивалентность решений исходной краевой задачи и дисперсионного уравнения в случае определения нормальных волн в гофрированном волноводе.

Пусть область D комплексной плоскости состоит из таких γ, для которых применим спектральный метод. Другими словами, для всех $\gamma \in D$, выполняются $k_i \neq 0$, $\chi_{is} \neq 0$, $\Delta_s \neq 0$ и $C_{12}^0 \neq 0$. Если в этом случае $\{u, v\}$ нетривиальные решения задачи (4)-(8) при некоторой $\gamma = \gamma_0$, то соответствующая система коэффициентов $\{\varphi_l, \psi_l\}$, получаемых с помощью формулы (13), (18), является нетривиальным решением дискретного уравнения (19).

Теперь, допустим, что бесконечная система (19) при некоторой $\gamma = \gamma_0$ имеет нетривиальное решение $\{\varphi_l, \psi_l\}$. Определим $\{u, v\}$ по формулам (18), (16), (12), (10) и (9). Очевидно, что оно является нетривиальным решением уравнений (4), принадлежит классу функций $H^1\left(G^1 \cup G^2 \cup L\right)$ и удовлетворяет условиям $[v]_L = 0$ и (7), а также граничным условиям (5). Остается доказать, что $[u]_L = 0$ и $\left[\frac{1}{k^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} - \gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_L = 0$. Нетрудно показать, что

$$[u] = \sum_{s=0}^{\infty}\left[a_s \int_{-d/2}^{d/2}\varphi(\xi)X_{2s}(\xi)d\xi + b_s \int_{-d/2}^{d/2}\psi(\xi)X_{1s}(\xi)d\xi\right]X_{2s}(x),$$

$$\left[\frac{1}{k^2}\left(\omega\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y} - \gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = \sum_{s=1}^{\infty}\left[a_s^1 \int_{-d/2}^{d/2}\varphi(\xi)X_{2s}(\xi)d\xi + b_s^1 \int_{-d/2}^{d/2}\psi(\xi)X_{1s}(\xi)d\xi\right]X_{1s}(x). \qquad (21)$$

Функции, определяемые соотношением (21), можно рассматривать как периодические функции, определенные на всей действительной оси

x. Для периодической функции $F(x)$ справедлива следующая теорема, аналогичная теореме Винера-Пэли [3]:

Теорема: Для того чтобы периодическая с периодом D функция $F(x)$, интегрируемая с квадратом на отрезке действительной оси $\left[-\frac{D}{2},\frac{D}{2}\right]$, была равна нулю для значений $\frac{d}{2}<|x|<\frac{D}{2}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$g(n)=\frac{1}{D}\int\limits_{-d/2}^{d/2}F(x)e^{-i\frac{2\pi n}{D}x}dx$$

была целой функцией конечной степени $<\frac{\pi d}{D}$ *и* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty}|g(n)|^2<\infty$.

Применяя данную теорему к функциям, определенным соотношением (21) и учитывая аналитический вид коэффициентов разложения функций u и v в формулах (9), получим, что функции (21) равны нулю на отрезке $\frac{d}{2}\le|x|\le\frac{D}{2}$. Тем самым доказана теорема:

Теорема. Собственные значения $\gamma\in D$ задачи (4)-(8) и характеристические числа дисперсионного уравнения (20) совпадают, а соответствующие собственные функции связаны формулами (9), (10), (12), (13), (16), (17) и (19).

Исследование дисперсионных уравнений спектрального метода

Спектральный метод сводит исходную краевую задачу к бесконечной однородной системе линейных однородных алгебраических уравнений в функциональном пространстве l_2, которую запишем в виде

$$A(\lambda)X\equiv\sum_{l=1}^{\infty}A_{lp}(\lambda)\varphi_l=0,\quad p=1,2,...,\quad \sum_{l=1}^{\infty}|\varphi_l|^2<\infty, \qquad (22)$$

где коэффициенты $A_{lp}(\lambda)$ нелинейно зависят от спектрального параметра λ.

Для системы (22) ставится задача определения на комплексной плоскости таких значений λ, для которых существуют нетривиальные в l_2 решения системы уравнений (1), их расположения на плоскости и классификации соответствующих решений. Рассмотрим эти вопросы для определенного класса операторных уравнений.

1. Всюду в дальнейшем будем считать, что оператор-функция

$A(\lambda)$ уравнений (22) является аналитической в некоторой области D комплексной плоскости, осуществляет отображение l_2 в l_2. В этом случае справедлива

Теорема 1. *Оператор-функция* $A(\lambda)$ *является фредгольмовой для любого* $\lambda \in D$, *т.е. если* $\lambda \in R_A(\lambda)$, *то оператор-функция* $A(\lambda)$ *обратима, либо если* $\lambda \overline{\in} R_A^{\cdot}(\lambda)$, *то* $\dim \mathrm{Ker} A(\lambda) < \infty$, $\mathrm{ind}\, A(\lambda) = 0$.

Доказательство этой теоремы следует из способа получения системы (22) и эквивалентности операторного уравнения и системы интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядре [3, 4].

2. В этом пункте предположим, что оператор-функция $A(\lambda)$ действует из одного банахова пространства в другое. Пусть $\lambda_0 \in D$. Тогда в окрестности точки λ_0 оператор-функцию $A(\lambda)$ можно разложить в ряд

$$A(\lambda) = A_0 + A_1(\lambda - \lambda_0) + \ldots + A_n(\lambda - \lambda_0)^n + \ldots.$$

Допустим, что некоторые операторы B_0 и B_1 удовлетворяют следующим условиям. Оператор B_0 является F-оператором [4] и

$$\dim \mathrm{Ker} A(\lambda) < \infty.$$

Предположим, что

$$(y, B_1 x) \neq 0 \tag{23}$$

для любого $x \in \mathrm{Ker} B_0$ и для некоторого y, который является решением сопряженного уравнения $B_0^{\bullet} y = 0$.

Рассмотрим оператор-функцию $B(\lambda) = B_0 + B_1(\lambda - \lambda_0)$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (23). Тогда для некоторого положительного числа R все точки проколотого круга $0 < |\lambda - \lambda_0| < R$ регулярны для оператор-функции $B(\lambda)$.

Следуя [4], можно доказать, что

$$\left\| B^{-1}(\lambda) \right\| \leq c(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{-1}.$$

Пусть

$$c = \sup_{\lambda \in D} c(\lambda) |\lambda - \lambda_0|^{-1}; \tag{24}$$

$$\left\| (\lambda - \lambda_0)^2 A_2 + \ldots + (\lambda - \lambda_0)^n A_n + \ldots \right\| \leq c_1 < \frac{1}{c}^{-1}; \tag{25}$$

$$c_2 = c / (1 - c c_1), \tag{26}$$

где $G = \{\lambda : \quad 0 < r \leq |\lambda - \lambda_0| \leq R\}$. Далее допустим, что операторы A_0, A_1 и B_0, B_1 связаны условием

$$\|A_0 - B_0\| + |\lambda - \lambda_0| \|A_1 - B_1\| < \frac{1}{4c_2} \tag{27}$$

при $\lambda \in \gamma$, где $\gamma = \{\lambda : \quad |\lambda - \lambda_0| = R\}$.

Теорема 3. Пусть операторы B_0, B_1 удовлетворяют условиям (23). Предположим, что для оператор-функции вида (22) выполняются условия (24), (27), где константы c, c_2 определяются по формулам (25), (26).

Тогда в некотором круге $|\lambda - \lambda_0| \le R$ существует хотя бы одно характеристическое число оператор-функции $A(\lambda)$ и, кроме того,

$$m_A(\gamma) = \dim \operatorname{Ker} B_0.$$

Теорема 4. Пусть голоморфная оператор-функция вида (22) удовлетворяет следующим условиям:

1) $\|A(\lambda) - A_0\| \le M$ при $|\lambda - \lambda_0| < R$,

2) $\|A_0\| \le F = \left(\sqrt{aR + M} - \sqrt{M}\right)^2$, где $a = \|A_1\|$,

3) $\|A_1^{-1}\| \le R(R - r_0)/Mr_0$, где $r_0 = R[1 - M/(aR + M)]$.

Тогда в круге $|\lambda - \lambda_0| < r_0$ существует хотя бы одно характеристическое число оператор-функции $A(\lambda)$.

Предположим, что для коэффициентов $A_{lp}(\lambda)$ уравнения (22) выполняется

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |A_{lp}(\lambda)|^2 \le c < \infty, \quad \lambda \in D.$$

Очевидно, что $A(\lambda)$: $l_2 \to l_2$ при любых $\lambda \in D$. Редуцируя уравнение (22), получим конечную систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$A_n(\lambda) X_n = \sum_{l=1}^{n} A_{lp}(\lambda) \varphi_l = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $N_1 \subseteq N$.

Лемма. Пусть оператор-функции $A(\lambda)$ обратимы для всех $\lambda \in G$, где $G \subset D$ – компактное множество комплексной плоскости.

Тогда при достаточно больших n все оператор-функции $A_n(\lambda)$ обратимы в этом компакте.

Из этой леммы можно получить следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть λ_0 – некоторая точка спектра оператор-функции $A(\lambda)$ в ограниченной замкнутой области.

Тогда существует такая последовательность $\{\lambda_n\}$, $n \in N_1$, где λ_n

является спектральной точкой оператор-функции $A_n(\lambda)$, что

$$\lambda_n \to \lambda_0, \quad n \in N_1.$$

Теорема 6. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$, $n \in N_1$, где λ_n – точки спектра оператор-функции $A_n(\lambda)$, *сходится к некоторой предельной точке* λ_0.

Тогда эта точка является спектральной точкой оператор-функции $A(\lambda)$.

Дальнейшее изучение спектра нерегулярного экранизированного волновода направлено на исследование полноты системы нормальных волн. Это исследование опирается на теорию голоморфных оператор-функций в Гильбертовых пространствах. В работе [5] доказана теорема о полноте собственных и присоединенных функций нерегулярного волновода, который можно свести к квадратному операторному пучку.

Развитие спектрального метода на различные экранированные линии на основе волноводов содержаться в работах [5,6,7].

Литература

1. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдодиффренциальные операторы в задачах дифракции. - Москва. Издательское предприятие редакции журнала "Радиотехника", 1996 год. Объем 11.0 печ. листов. Тираж 930 экз.
2. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. – М: Изд-во МГУ, 1987.
3. Ильинский А.С., Муталлимов М.М. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 1985, т.25, №3, с. 381-391.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. – УМН, т.12, вып.2, с.43-118.
5. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Вариационный метод в задаче о собственных волнах частично заполненного волновода с нерегулярной границей // Численные методы решения обратных задач математической физики. М: Изд-во Московского университета, 1988, с.127-137.
6. Ена М.Л., Ильинский А.С. Расчет постоянных распространения и полей собственных волн щелевых линий передачи с учетом толщины проводников и произвольным распространением щелей. Радиотехника и Электроника, 1991, т.36, №2, с.290-296.
7. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Математическое моделирование процесса распространения электромагнитных колебаний в щелевых линиях передачи// Журнал вычислительная математика и математическая физика, 1987, т. 27, №2, с.252-261.