

В.П. Ильютко

ГРАНИЦЫ СПЕКТРА РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В НЕПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

1 Введение

Исследование многих задач математической физики и их разностных аппроксимаций сводится к анализу собственных значений оператора, порожденного исходной задачей. Для выяснения устойчивости разностных схем, аппроксимирующих уравнение теплопроводности, необходимо иметь представление о спектре разностного оператора Лапласа. Доказано (см. [1]), что при естественном введении скалярного произведения этот разностный оператор является самосопряженным и положительно определенным и для его спектра получены оценки снизу и сверху. При исследовании устойчивости нестационарных уравнений наиболее существенное ограничение на шаг по времени τ накладывает величина максимального собственного значения λ_{\max} этого оператора. Так, явная разностная схема для уравнения теплопроводности устойчива при условии $\tau \leq 2\lambda_{\max}^{-1}$. Представляет несомненный интерес исследование свойств самосопряженности и положительности разностного оператора Лапласа в прямоугольных областях. Важно выяснить границы собственных значений и получить оценки сверху для максимального собственного значения. Целью данной работы является исследование поведения спектра разностного оператора Лапласа в областях с границей в виде криволинейного треугольника и получение оценок спектра. В частности, интересует вопрос о зависимости максимального и минимального собственного значения от параметров области. В случае неравномерных сеток, покрывающих прямоугольную область, для спектра известны оценки снизу и сверху. Рассматриваемые далее области – это области на плоскости Ox_1x_2 , ограниченные координатными осями Ox_1 , Ox_2 и функцией $x_2 = F(x_1)$. Класс рассматриваемых функций $F(x_1)$ ограничим непрерывными и монотонно убывающими функциями (см. рис. 1). В работе рассмотрена разностная аппроксимация оператора Лапласа в таких областях, как криволинейный

треугольник, криволинейная трапеция и часть круга. Построена разностная аппроксимация на регулярных и нерегулярных сетках. Исследована самосопряженность разностного оператора. Получены оценки, теоретические и численные, границ спектра.

Остановимся на постановке дифференциальной задачи. Рассматривается задача на собственные значения для оператора Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = -\lambda u(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G; \quad (1)$$

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma,$$

где $G = \{x = (x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < F(x_1)\}$ – криволинейный треугольник, ограниченный осями Ox_1 , Ox_2 и кривой $x_2 = F(x_1)$, Γ – граница треугольника \bar{G} . Предполагаем, что $F(x_1)$ – непрерывная, монотонно убывающая функция. Прямолинейные стороны треугольника имеют длины $l_1 = F^{-1}(0)$, где $F^{-1}(x_2)$ – функция, обратная к $F(x_1)$, и $l_2 = F(0)$ соответственно.

Для перехода от дифференциальной задачи к разностной вводится сетка, покрывающая исходную область. В разделе 2 рассматриваются два вида сеток: равномерная внутри области и согласованная с областью. Такие сетки назовем сетками первого и второго рода. Сетки обоих родов являются неравномерными для произвольной области. Первая сетка неравномерна вблизи границы области, а вторая сетка – неравномерна по одному из направлений (если выбрать равномерную сетку по одному из направлений, то, в общем случае, по другому направлению сетка будет неравномерная). В этом же разделе определяются разностные аналоги вторых производных.

Раздел 3 посвящен исследованию свойств разностного оператора Лапласа. Здесь дано определение оператора, доказано его самосопряженность, положительность и ограниченность. Условия положительности и ограниченности следуют из оценок для собственных значений. Для каждой из сеток в этом разделе получены оценка снизу минимального и оценка сверху максимального собственных значений разностного оператора Лапласа. Что касается оценки снизу, то для ее получения используются оценки для одномерного случая, которые получены в работе [1] и зависят только от длин катетов. Оценка сверху для каждой рассматриваемой сетки получается своя.

Представляет интерес случай, когда Γ является четвертью окружности (раздел 4) или прямоугольным треугольником (раздел 5). Первая область характерна тем, что собственные значения находятся в аналитическом виде с помощью функций Бесселя (см. [2]). Собственные значения функций Бесселя хорошо изучены и могут быть вычислены с большой точностью. Кроме того при переходе к полярным координатам представляется возможность введения полярной сетки, и, значит, исследование задачи можно проводить на трех видах сеток. Вторая область, прямоугольный треугольник, характерна тем, что собственные значения находятся в явном виде (см. [3]) и существуют сетки как первого, так и второго рода, являющиеся равномерными. Также в разделе 5 рассматриваются области с границей в виде криволинейного треугольника.

В заключительном разделе 6 изучаются собственные значения данного оператора в криволинейной трапеции.

Автор выражает глубокую благодарность профессору А. В. Гулину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

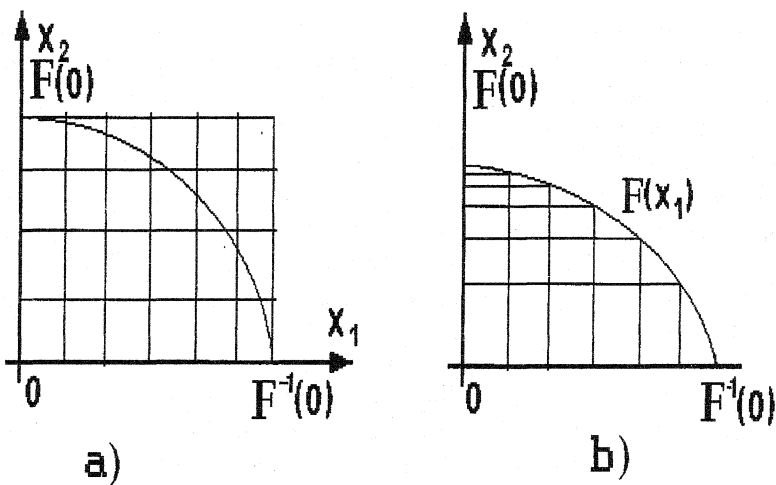


Рис. 1.

2 Способы введения сеток, покрывающих непрямоугольные области

Важную роль в исследовании схем играет сетка, покрывающая область. Так в работе [4] за счет выбора равномерной сетки по каждому направлению удалось конструктивно исследовать устойчивость разностных схем для уравнения теплопроводности в прямоугольной области. В общем случае не всегда удастся построить равномерную сетку. В случае произвольной функции $F(x_1)$ на помощь приходят неравномерные сетки. В этом разделе описываются два способа введения неравномерных сеток в декартовой системе координат, покрывающих область с криволинейной границей.

Если сетку в \bar{G} считать равномерной по каждому направлению, то не все ее граничные точки будут принадлежать $\Gamma = \partial G$ и сетка получается неравномерная вблизи границы. Если граница сетки принадлежит Γ , то сетка не будет равномерной в общем случае.

Рассмотрим первый способ построения неравномерных сеток.

Разобьем стороны криволинейного треугольника G на N_1 и N_2 частей, тогда $h_1 = l_1/N_1$ и $h_2 = l_2/N_2$. Обозначим через $N_1(j)$ количество шагов на отрезке $[0, F^{-1}(jh_2)]$, где первые $N_1(j) - 1$ шагов равны h_1 , а последний $- h_1(j) \leq h_1$, через $N_2(i)$ количество шагов на отрезке $[0, F^{-1}(ih_1)]$, где первые $N_2(i) - 1$ шагов равны h_2 , а последний $- h_2(i) \leq h_2$. Обозначим через $x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$ точку пересечения прямых $x_1 = ih_1 + \delta_{iN_1(j)}(h_1(j) - h_1)$ и $x_2 = jh_2 + \delta_{jN_2(i)}(h_2(i) - h_2)$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Множество точек x_{ij} , лежащих внутри и на границе области \bar{G} , образует сетку первого рода (Рис. 1а)).

Эта сетка характерна тем, что внутри области она равномерная по каждому направлению, а вблизи границы — неравномерная.

Перейдем к введению сеток второго рода. Сетка второго рода — эта сетка с граничными точками, принадлежащими границе области, так называемая неравномерная сетка, согласованная с областью (Рис. 1б)).

Задавая равномерную сетку по первому направлению с шагом $h_1 = l_1/N_1$ и выбирая шаги по второму направлению так, чтоб $h_1(j) = h_1$, для всех $j = 1, 2, \dots, N_1$, получаем согласованную с областью сетку. Для этой сетки получаем, что $N_1(j)$ количество шагов на отрезке $[0, F^{-1}(jh_2)]$ равно $N_1 - j$, где все шаги равны h_1 , и $N_2(i)$ количество шагов на отрезке $[0, F^{-1}(ih_1)]$, где все шаги $h_2(j)$ зависят от j . Обозначим через

$x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$ точку пересечения прямых $x_1 = ih_1$ и $x_2 = \sum_{i=1}^j h_2(i)$. Точки x_{ij} , принадлежащие области и ее границе, образуют согласованную сетку. Все граничные узлы сетки лежат на границе криволинейного треугольника. Шаги по второму направлению задаются соотношением

$$h_2(j) = x_{ij} - x_{ij-1} = F(h_1(N_1 - j)) - F(h_1(N_1 - j + 1)).$$

Сетка характерна тем, что все граничные узлы принадлежат границе криволинейного треугольника. При определенном задании функции $F(x_1)$ можно получить равномерную сетку по обоим направлениям (например, если функция $F(x_1)$ линейная). Аналогичным образом строятся квазиравномерные сетки (см. [5]).

Заметим, что если функция $F(x_1)$ является линейной, то обе сетки, при равном количестве шагов по обоим направлениям, совпадают и переходят в прямоугольную равномерную по каждому направлению сетку.

Иногда для построения равномерной сетки целесообразно перейти к другим координатам. Например, если область G есть часть круга, то переход к полярным координатам и рассмотрение исходной задачи в новых координатах оправданы.

В заключении этого раздела введем необходимые обозначения. Обозначим через $h_{ij}^{(1)}$ расстояние между точками x_{i-1j} и x_{ij} , и через $h_{ij}^{(2)}$ — расстояние между точками x_{ij-1} и x_{ij} . Пусть $y_{ij} = y(x_{ij})$. Тогда вторые разностные производные по первому и второму направлению записываются как

$$y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, ij} = \frac{1}{h_{ij}^{(1)}} \left[\frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{h_{i+1j}^{(1)}} - \frac{y_{ij} - y_{i-1j}}{h_{ij}^{(1)}} \right],$$

$$y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2, ij} = \frac{1}{h_{ij}^{(2)}} \left[\frac{y_{ij+1} - y_{ij}}{h_{ij+1}^{(2)}} - \frac{y_{ij} - y_{ij-1}}{h_{ij}^{(2)}} \right]$$

соответственно, где $i = 1, 2, \dots, N_1$, $j = 1, 2, \dots, N_2(i) - 1$.

Перенумеруем двумерный массив y_{ij} в одномерный y_k по следующему правилу:

$$k = \sum_{j_1=1}^j (N_1(j_1) - 1) + i,$$

где $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ и $i = 1, 2, \dots, N_1(j) - 1$. Составим векторы вида $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_K)^\top$, образующие конечномерное пространство H размерности $K = \sum_{i=1}^{N_1-1} (N_2(i) - 1)$. Введем в H скалярное произведение и норму

$$\begin{aligned} (y, v) &= \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)-1} y_{ij} v_{ij} h_{ij}^{(1)} h_{ij}^{(2)} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} y_{ij} v_{ij} h_{ij}^{(1)} h_{ij}^{(2)}, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для сетки первого вида скалярное произведение переписывается, как

$$(y, v) = \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2,$$

а для сетки второго вида как

$$(y, v) = \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2(i) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} y_{ij} v_{ij} h_1 h_2(i).$$

3 Свойства разностного оператора Лапласа

Обозначим через A следующий разностный оператор

$$\begin{aligned} (Ay)_{ij} &= -(\Lambda_1 y)_{ij} - (\Lambda_2 y)_{ij} = -y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, ij} - y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2, ij}, \\ y_{0j} &= y_{i0} = y_{iN_2(i)} = y_{jN_1(j)} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2(i) - 1.$$

Рассмотрим некоторые свойства разностного оператора, записанного на сетках первого и второго рода. К основным свойствам относятся: самосопряженность, положительность и ограниченность.

Лемма 1 *Оператор A является самосопряженным.*

Доказательство. Докажем для случая, когда область покрывается сеткой первого рода. Для сетки второго рода доказательство проводится аналогичным образом.

Учитывая, что точки с координатами $(ih_1, F(ih_1))$, $(F^{-1}(jh_2), jh_2)$ и $(0, jh_2)$, $(ih_1, 0)$, где $i = 1, 2, \dots, N_1$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, являются граничными, запишем скалярное произведение векторов Au и v как

$$\begin{aligned} (Ay, v) &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} (Ay)_{ij} v_{ij} h_1 h_2 = \\ &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} \left(y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1, ij} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2, ij} \right) v_{ij} h_1 h_2 = \\ &= - \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} \left(\frac{y_{\bar{x}_{1i+1j}} - y_{\bar{x}_{1ij}}}{h_{ij}^{(1)}} v_{ij} + \frac{y_{\bar{x}_{2ij+1}} - y_{\bar{x}_{2ij}}}{h_{ij}^{(2)}} v_{ij} \right) h_1 h_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое этой суммы. С учетом нулевых граничных условий получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)-1} \frac{y_{\bar{x}_{1i+1j}}}{h_{ij}^{(1)}} v_{ij} h_1 h_2 &= \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)} y_{\bar{x}_{1ij}} v_{i-1j} h_2, \\ \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} \frac{y_{\bar{x}_{2ij+1}}}{h_{ij}^{(2)}} v_{ij} h_1 h_2 &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} y_{\bar{x}_{2ij}} v_{ij-1} h_1. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что справедливо следующее тождество:

$$\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} (Ay)_{ij} v_{ij} h_1 h_2 = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} \left(v_{\bar{x}_{1ij}} y_{\bar{x}_{1ij}} + v_{\bar{x}_{2ij}} y_{\bar{x}_{2ij}} \right) h_1 h_2. \quad (4)$$

Из последнего выражения видно, что v и y входят в сумму симметричным образом. Это и доказывает самосопряженность оператора.

Лемма 2 Оператор A является положительно определенным.

Доказательство. Доказательство этого факта следует из (4). При $v = y \neq 0$ из (4) получим

$$(Ay, y) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} \left(y_{\bar{x}_1, ij}^2 + y_{\bar{x}_2, ij}^2 \right) h_1 h_2 \geq 0.$$

Скалярное произведение (Ay, y) обращается в нуль только при обращении каждого слагаемого суммы в нуль. Из этого следует, что у вектора y все компоненты совпадают и, учитывая нулевые граничные условия, получаем, что y – нулевой вектор, а это и означает, что оператор A положительно определен.

Следующие леммы показывают, что спектр оператора A ограничен сверху и снизу, а именно, справедливы оценки

$$\delta \|y\|^2 \leq (Ay, y) \leq \Delta \|y\|^2,$$

где $\delta > 0$ – постоянная, не зависящая от шагов сетки.

Для получения этой оценки воспользуемся следующей оценкой, доказанной в [1]. Для всякой сеточной функции $y(x)$, заданной на произвольной сетке

$$\hat{\omega}_h = \{x_i \in [0, l] : i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = l\}$$

и обращающейся в нуль при $x = 0$ и $x = l$, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h_i \leq \frac{l^2}{4} \sum_{i=1}^N (y_{\bar{x}})_i^2 h_i. \quad (5)$$

Пусть скалярное произведение определено согласно (2), и оператор A задан равенством (3). Справедлива

Лемма 3 Для всякой сеточной функции $y(x_1, x_2) \in H$ справедлива оценка

$$\delta \|y\|^2 \leq (Ay, y),$$

$$\text{где } \delta = 4 \left(\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} \right).$$

Доказательство.

Тождество (4) переписывается в следующем виде

$$(Ay, y) = \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)} y_{\bar{x}_1, ij}^2 h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} y_{\bar{x}_2, ij}^2 h_1 h_2. \quad (6)$$

Из неравенства (5), учитывая, что $h_{ij}^{(\alpha)} \leq h_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, получаем оценки

$$\sum_{i=1}^{N_1(j)-1} y_{ij}^2 h_1 h_2 \leq \frac{(l_j^{(1)})^2}{4} \sum_{i=1}^{N_1(j)} y_{\bar{x}_1, ij}^2 h_{ij}^{(1)} h_2 < \frac{(l_1)^2}{4} \sum_{i=1}^{N_1(j)} y_{\bar{x}_1, ij}^2 h_1 h_2, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{N_2(i)-1} y_{ij}^2 h_1 h_2 \leq \frac{(l_i^{(2)})^2}{4} \sum_{j=1}^{N_2(i)} y_{\bar{x}_2, ij}^2 h_1 h_{ij}^{(2)} < \frac{(l_2)^2}{4} \sum_{j=1}^{N_2(i)} y_{\bar{x}_2, ij}^2 h_1 h_2, \quad (8)$$

где $l_j^{(1)} = F^{-1}(jh_2) < l_1$ для всех $j = 1, 2, \dots, N_2 - 1$ и $l_i^{(2)} = F(ih_1) < l_2$ для всех $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$. Подставляя (7) и (8) в (6), имеем

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)} y_{\bar{x}_1, ij}^2 h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} y_{\bar{x}_2, ij}^2 h_1 h_2 > \\ &> \frac{4}{l_1^2} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)} y_{ij}^2 h_1 h_2 + \frac{4}{l_2^2} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} y_{ij}^2 h_1 h_2 = \\ &= \left(\frac{4}{l_1^2} + \frac{4}{l_2^2} \right) \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)-1} y_{ij}^2 h_1 h_2 = \delta \|y\|^2. \end{aligned}$$

Для согласованной сетки оценка снизу получается аналогичным образом. Следовательно, лемма 3 доказана.

Следующая лемма дает оценку сверху спектра оператора A , т.е. значение Δ :

Лемма 4 Для всякой сеточной функции $y(x_1, x_2) \in H$ справедлива оценка

$$(Ay, y) \leq \Delta \|y\|^2,$$

где $\Delta = \max_{1 \leq j \leq N_2-1} \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{2}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^2(j)} \right) + \Delta_2$.

Значение Δ_2 для сетки первого рода равно

$$\max_{1 \leq i \leq N_1-1} \left(\frac{4}{h_2^2}, \frac{2}{h_2^2} + \frac{1}{h_2^2(i)} \right),$$

а для сетки второго рода –

$$\max_{1 < i < N-1} \frac{4}{h_2(i)h_2(i+1)}.$$

Доказательство.

Значение Δ получается из следующих оценок

$$\begin{aligned} (Ay, y) &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} \left(y_{x_1, ij}^2 + y_{x_2, ij}^2 \right) h_1 h_2 = \\ &= \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{i=1}^{N_1(j)} \frac{(y_{ij} - y_{i-1j})^2}{(h_{ij}^{(1)})^2} h_1 h_2 + \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2(i)} \frac{(y_{ij} - y_{ij-1})^2}{(h_{ij}^{(2)})^2} h_1 h_2 \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 \left(\sum_{i=1}^{N_1(j)-1} \frac{(y_{ij} - y_{i-1j})^2}{h_1} + \frac{y_{N_1(j)-1j}^2}{h_1^2(j)} h_1 \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \left(\sum_{j=1}^{N_2(i)-1} \frac{(y_{ij} - y_{ij-1})^2}{h_2} + \frac{y_{iN_2(i)-1}^2}{h_2^2(i)} h_2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{N_2-1} h_2 \left(\sum_{i=1}^{N_1(j)-2} \frac{4y_{ij}^2}{h_1} + y_{N_1(j)-1j}^2 \left(\frac{2}{h_1} + \frac{h_1}{h_1^2(j)} \right) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \left(\sum_{j=1}^{N_2(i)-2} \frac{4y_{ij}^2}{h_2} + y_{iN_2(i)-1}^2 \left(\frac{2}{h_2} + \frac{h_2}{h_2^2(i)} \right) \right) \leq (\Delta_1 + \Delta_2) \|y\|^2, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = \max_{1 \leq j \leq N_2-1} \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{2}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^2(j)} \right), \Delta_2 = \max_{1 \leq i \leq N_1-1} \left(\frac{4}{h_2^2}, \frac{2}{h_2^2} + \frac{1}{h_2^2(i)} \right).$$

Для согласованной сетки оценка сверху Δ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_1 + \Delta_2 = 4/h_1^2 + \max \left(\frac{2(h_2(2) + 2h_2(1))}{h_2(2)h_2(1)(h_2(1) + h_2(2))}, \right. \\ &\quad \left. \max_{1 < i < N-1} \frac{4}{h_2(i)h_2(i+1)}, \frac{2(h_2(N-1) + 2h_2(N))}{h_2(N-1)h_2(N)(h_2(N) + h_2(N-1))} \right) = \\ &= 4/h_1^2 + \max_{1 < i < N-1} \frac{4}{h_2(i)h_2(i+1)}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Замечание 1 Нетрудно показать, что

$$\max_{1 \leq j \leq N_2-1} \left(\frac{4}{h_1^2}, \frac{2}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^2(j)} \right) = \max_{1 \leq j \leq N_2-1} \begin{cases} \frac{4}{h_1^2}, & \text{если } h_1 < \sqrt{2}h_1(j); \\ \frac{2}{h_1^2} + \frac{1}{h_1^2(j)}, & \text{если } h_1 \geq \sqrt{2}h_1(j), \end{cases}$$

$$\max_{1 \leq i \leq N_1-1} \left(\frac{4}{h_2^2}, \frac{2}{h_2^2} + \frac{1}{h_2^2(i)} \right) = \max_{1 \leq i \leq N_1-1} \begin{cases} \frac{4}{h_2^2}, & \text{если } h_2 < \sqrt{2}h_2(i); \\ \frac{2}{h_2^2} + \frac{1}{h_2^2(i)}, & \text{если } h_2 \geq \sqrt{2}h_2(i). \end{cases}$$

4 Тестовый пример

Прежде чем приступить к численному нахождению собственных значений, полезно рассмотреть искомую задачу в четверти круга. Как будет показано ниже, решение этой задачи находится в аналитическом виде. Следовательно, представляется возможность сравнить численный результат с теоретическим.

Рассмотрим случай, когда $F(x_1) = \sqrt{l_1^2 - x_1^2}$ – четверть окружности, где $0 \leq x_1 \leq l_1$, тогда граничные условия задачи (1) запишутся, как $u(x_1, 0) = u(0, x_2) = u(x_1, F(x_1)) = 0$, $0 \leq x_1 \leq l_1$ и $0 \leq x_2 \leq l_2$. Решение $(\lambda, u(x_1, x_2))$ находится тем же способом, что для круга (см. [2]). Получается, что минимальным собственным значением оператора Лапласа в области G – четверти окружности единичного радиуса, является число $5.13562^2 = 26.37462$. Данная задача применима как тестовый пример для исследования разностных схем, аппроксимирующих оператор Лапласа в непрямоугольных областях.

Далее, остановимся на вопросе, относящемся к численному решению задачи (1) в четверти круга.

Переходя к полярным координатам и вводя равномерную сетку по углу φ с шагом h_φ и равномерную сетку по радиусу ρ с шагом h_ρ , а также принимая во внимание результаты работ [1] и [6], получаем следующую разностную задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \Lambda_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho_i h_\rho} \left(\rho_{i+0.5} \frac{y_{i+1j} - y_{ij}}{h_\rho} - \rho_{i-0.5} \frac{y_{ij} - y_{i-1j}}{h_\rho} \right) + \\ + \frac{1}{\rho_i^2} \frac{y_{ij+1} - 2y_{ij} + y_{ij-1}}{h_\varphi^2} = -\lambda y_{ij}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$y_{0j} = y_{N_\rho j} = 0, \quad y_{i0} = y_{iN_\varphi} = 0,$$

где N_ρ и N_φ – количество шагов по радиусу и по углу соответственно.

В таблице 1 показаны результаты расчетов по схеме (9) (третий столбец λ_{\min} и четвертый λ_{\max}), где через λ_{\min} и λ_{\max} обозначены минимальное и максимальное собственные значения задачи. Количество точек по углу и по радиусу равно N_ρ и N_φ соответственно (первые два столбца).

Таблица 1.

N_ρ	N_φ	λ_{\min}	λ_{\max}
10	10	26.052	16015
15	10	26.172	36035
20	10	26.214	64062
10	20	26.131	64646
15	15	26.231	81625
15	20	26.252	145454
20	20	26.294	258286

Видно, что при уменьшении шагов по углу и по радиусу значение λ_{\max} неограниченно увеличивается, значение λ_{\min} монотонно увеличивается и стремится к 26.3746. Видно, что шаги по радиусу влияют более заметно, нежели шаги по углу.

5 Задача на собственные значения для разностного оператора Лапласа в криволинейном треугольнике

Рассмотрим задачу о численном отыскании собственных значений разностного оператора Лапласа в криволинейном треугольнике G с краевыми условиями первого рода:

$$\Delta y + \lambda y = 0, \quad x \in \omega_h, \quad y = 0, \quad x \in \gamma_h,$$

где $\bar{\omega}_h$ – сетка в \bar{G} , а γ_h – множество граничных узлов. Под Δ будем понимать оператор $(-A) = y_{\bar{x}_1} \hat{x}_1 + y_{\bar{x}_2} \hat{x}_2$ или оператор $\Lambda_{\rho\varphi}$, определенные выше.

Рассмотрим, во-первых, прямоугольный треугольник, для которого сетки обоих родов совпадают, при равном количестве шагов по каждому из направлений. Затем, область – четверть окружности, для которой строятся три различные сетки, и, наконец, область, когда функция $F(x_1)$ вогнута или выпукла.

В таблицах 2 и 3 приведены результаты расчетов для прямоугольных треугольников с различными катетами. Для равнобедренного прямоугольного треугольника с единичными катетами минимальное собственное значение равно $5\pi^2 \approx 49.348$ (см. [3]).

Таблица 2.

<i>треугольник со сторонами $l_1 = 1, l_2 = 1$</i>				
N_1	N_2	λ_{\min}	λ_{\max}	$\lambda_{\min} + \lambda_{\max}$
20	20	49.00411	3150.99588	3200.0
40	40	49.26184	12750.73815	12800.0

Таблица 3.

<i>треугольник со сторонами $l_1 = 1, l_2 = 3$</i>				
N_1	N_2	λ_{\min}	λ_{\max}	$\lambda_{\min} + \lambda_{\max}$
20	20	21.68580	1756.09197	1778.0
35	35	21.79283	5422.65161	5444.44444

Видим, что λ_{\min} монотонно возрастает и стремится к 49.348, а λ_{\max} неограниченно возрастает при сгущении сетки. С определенной точностью, справедливо следующее равенство

$$\lambda_{\min} + \lambda_{\max} = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}$$

(такое же равенство справедливо для прямоугольника).

В следующей таблице приводятся результаты расчетов для тестового примера – четверть окружности. Исследовались сетки первого, второго рода и полярная сетка. Количество шагов по первому и второму направлению, а также по радиусу и углу возьмем одинаковое. В таблице 4 приведены результаты расчетов. В данном примере радиус окружности равен 1. В первом столбце – количество шагов ($N_1 = N_2 = N_\rho = N_\varphi = N$), во втором и третьем – λ_{\min} и λ_{\max} для сетки, неравномерной вблизи границы, в следующих двух – λ_{\min} и λ_{\max} для сетки, согласованной с областью, и в последних двух – λ_{\min} и λ_{\max} для полярной сетки.

Таблица 4.

N	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\min}	λ_{\max}
10	26.0517	1630.7302	21.790	4803.812	26.052	16015
20	26.29300	7567.983	22.385	78199.512	26.2938	258586
30	26.33819	37899.166	23.135	397149.677	26.33872	1311326

Видно, что

1) наилучшее приближение минимального собственного значения получается на полярной сетке, затем, на равномерной внутри области и наихудшее приближение на согласованной сетке;

2) с увеличением количества шагов λ_{\min} изменяется незначительно для сетки первого рода и для полярной сетки;

3) при увеличении количества шагов λ_{\max} увеличивается, что связано с резким уменьшением минимальных шагов по первому и второму направлению;

4) заметим, что λ_{\max} для всех трех сеток значительно различаются.

В таблице 5 приведены результаты расчетов для криволинейного треугольника с функцией $F(x) = (e^{\alpha x} - e^{\alpha}) / (1 - e^{\alpha})$, где α – вещественное число. В первом столбце – количество шагов ($N_1 = N_2 = N$), во втором и третьем – λ_{\min} , λ_{\max} и $h_{1 \min}$, $h_{2 \min}$ для сетки неравномерной вблизи границы, в последних – λ_{\min} , λ_{\max} и $h_{1 \min}$, $h_{2 \min}$ для сетки, согласованной с областью. В приведенных расчетах значение параметра α бралось равным 1.

Таблица 5.

N	λ_{\min}	λ_{\max}	$h_{1 \min}$	$h_{2 \min}$	λ_{\min}	λ_{\max}	$h_{1 \min}$	$h_{2 \min}$
10	38.954	2382.9	0.0085	0.01	37.714	799.7	0.1	0.067
20	39.56	6846.8	0.0074	0.0054	39.004	4108.6	0.05	0.03
30	39.678	38575.4	0.0013	0.002	39.135	7880.6	0.3	0.02
40	39.719	181706.8	0.0004	0.000545	39.45	19285.3	0.025	0.015

Видно, что

1) с увеличением количества шагов λ_{\min} изменяется незначительно;

2) при увеличении количества шагов λ_{\max} увеличивается, что связано с резким уменьшением минимальных шагов по первому и второму направлению.

Рассмотрим область, где функция $F(x_1)$ вогнута (например, нижняя часть окружности). В зависимости от расположения центра окружности

возникают разные случаи с угловыми точками. Например, катеты являются касательными к окружности, один катет касается окружности, а другой пересекает ее и, наконец, оба катета пересекают окружность.

Определим уравнения функции $x_2 = F(x_1)$ в рассматриваемых случаях:

$$(x_1 - R)^2 + (x_2 - R)^2 = R^2 \text{ -- здесь происходят касания,}$$

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - R)^2 = R^2 \text{ при определенном выборе значений } a \text{ и}$$

R происходит пересечение катета,

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 = R^2 \text{ при } R > a \text{ имеем пересечение обоих}$$

катетов.

В таблицах 6--8 приведены расчеты с конкретными значениями. В первом случае значение для радиуса R равно 1. Таким образом, получается, что катеты равны 1. В следующем уравнении значения R и a равны 1 и $\sqrt{0.99}$ соответствуют, что соответствует криволинейному треугольнику с одним катетом длины $\sqrt{0.99}$ и другим катетом длины 0.9. Для третьего примера значение параметра R^2 равняется 2.5, а параметру a соответствует значение 1.5. Криволинейный треугольник имеет катеты единичной длины.

Данные области покрываются сетками первого и второго рода, на которых записывается разностная задача. Результаты вычислений представлены в таблицах 6--8. В первом столбце приводится значение для количества точек разбиения (брали равное количество точек по обоим направлениям). Затем минимальное и максимальное собственные значения для сетки первого рода, в последующих столбцах те же значения, но вычисленные на сетке второго рода. Для данных областей, в общем, имеем такую же ситуацию, что для рассматриваемых ранее областей. Минимальные значения убывают при увеличении площади и ограничены снизу, а максимальные неограниченно возрастают с уменьшением шага.

При исследовании разностной задачи выясняются следующие закономерности:

1) минимальные собственные значения, в первую очередь, зависят от площади области, т.е. при уменьшении площади они возрастают;

2) максимальное значение зависит не только от площади, но и от распределения шагов вблизи границы;

3) что касается использования сетки первого или второго рода, то можно сказать, что при малых шагах минимальные собственные значения отличаются незначительно. Максимальное значение для сетки второго рода значительно больше чем для сетки первого рода.

Таблица 6.

N	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\max}	λ_{\min}
10	128.934	696.450	140.8706	54522.8
15	135.317	1788.82	142.9635	276215.7
20	137.602	5181.91	143.15	873148.6
25	138.666	15437.9	143	2131887.2
30	139.2454	75575.2	142.796	4420872.2

Таблица 7.

N	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\max}	λ_{\min}
10	133.043	2305.6	143.336	55630.5
15	138.402	3627.1	145.464	281825.1
20	140.360	49251	145.655	890879
25	141.290	171635.7	145.503	2175176.1
30	141.809	23917.6	145.294	4510638.1

Таблица 8.

N	λ_{\min}	λ_{\max}	λ_{\max}	λ_{\min}
10	78.9411	736.302	83.1774	2122.650
15	81.1927	1930.220	83.8536	5478.395
20	81.9735	4713.074	83.9065	10541.757
25	82.3284	17837.791	83.8491	17367.089
30	82.5179	19107.361	83.7742	25989.245

6 Задача на собственные значения для разностного оператора Лапласа в криволинейной трапеции

Пусть $\bar{Q} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq F(x_1)\}$ – криволинейная трапеция с основаниями $OA = l_1$ и $BC = l$, прямым углом AOC и стороной $OC = l_2$, Γ – ее граница (Рис. 2).

Рассмотрим случай, когда область \bar{Q} есть трапеция. Построим в \bar{Q} равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}_h$. Для получения равномерной прямоугольной сетки в трапеции Q необходимо выбрать шаг по первому направлению так, что точка $(l, 0)$ является узлом сетки, а

количество шагов по второму направлению равно количеству шагов на отрезке $[l, l_1]$.

Обозначим через

$$\bar{\omega}_h = \{x_{ij} = (x_1^{(i)}, x_2^{(j)}), \quad x_1^{(i)} = ih_1, \quad x_2^{(j)} = jh_2,$$

$$i = 0, 1, \dots, N_1, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - i,$$

$$N_1 h_1 = l_1, \quad N_2 h_2 = l_2, \quad l_2/N_2 = (l_2 - l)/N_1\}$$

– множество всех узлов сетки в области \bar{Q} , ω_h – множество внутренних узлов, а $\gamma_h = \bar{\omega}_h - \omega_h$ – множество граничных узлов.

Если область \bar{Q} – криволинейная трапеция, то ее можно покрыть сеткой первого или второго рода.

Рассмотрим конкретные трапециевидные области и конкретные значения для N_1 и N_2 .

В таблицах 3, 4 и 5 приведены результаты расчетов для трапециевидных областей.

Таблица 9.

трапеция $l_1 = 1, l_2 = 1, l = 0.1$					
N_1	N_2	λ_{\min}	λ_{\max}	$\lambda_{\min} + \lambda_{\max}$	$4/h_1^2 + 4/h_2^2$
9	10	43.30797	680.69202	724.0	724.0
18	20	44.22777	2851.77222	2896.0	2896.0
27	30	44.40	6471.59	6516.0	6516.0

Таблица 10.

трапеция $l_1 = 1, l_2 = 1, l = 0.5$					
N_1	N_2	λ_{\min}	λ_{\max}	$\lambda_{\min} + \lambda_{\max}$	$4/h_1^2 + 4/h_2^2$
5	10	27.83857	472.16142	500.0	500.0
10	20	28.48606	1971.51393	2000.0	2000.0
15	30	28.60543	4471.39456	4500.0	4500.0

Таблица 11.

трапеция $l_1 = 1, l_2 = 1, l = 0.9$					
N_1	N_2	λ_{\min}	λ_{\max}	$\lambda_{\min} + \lambda_{\max}$	$4/h_1^2 + 4/h_2^2$
2	20	18.91095	1597.08904	1616.0	1616.0
4	40	20.32684	6443.6731	6464.0	6464.0
8	80	20.70877	25835.29112	25856.0	25856.0

Из таблиц 9, 10, 11 видно, что минимальное собственное значение меньше минимального собственного значения для треугольника с катетами $l_1 = 1, l_2 = 1$ и больше минимального собственного значения для прямоугольника со сторонами $l_1 = 1, l_2 = 1$.

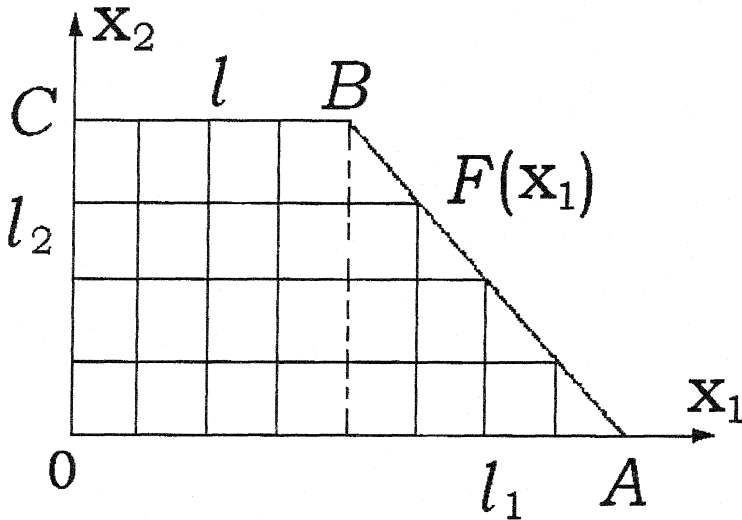


Рис. 2.

Литература

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 8-е, испр. и доп. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. – М.: Изд-во ``Наука'', 1968. – 504 с.
4. Гулин А.В., Шереди́на А.В. Границы устойчивости разностных схем. // Изв. вузов. Математика. 2000. N 11. С. 26-33
5. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 224 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 384 с.