В.И. Дмитриев, Ж.Г. Ингтем

ДВУМЕРНЫЙ СПЛАЙН С МИНИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ *

Введение.

Очень часто при решении двумерных задач интерполяции возникает необходимость использовать двумерные параболические сплайны [1], для однозначного определения которых кроме значений функции на сетке нужно задать еще краевые условия. В работах [2-4] было предложено построение и применение одномерных параболических сплайнов с минимальной нормой производной, для построения которых не требовалось задавать краевые условия. В настоящей работе будет показано, как построить двумерный сплайн, не прибегая к краевым условиям.

Построение двумерного параболического сплайна с минимальной производной.

Пусть на прямоугольнике $\Pi=[a,b]\times[c,d]$ задана сетка $\Delta_{N,M}: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$, $c=y_0<y_1<\dots<y_M=d$, в узлах которой известны значения интерполируемой функции $f_{i,j}$, $i=0,1,\dots,N$, $j=0,1,\dots,M$. Будем строить двумерную интерполяционную сплайн функцию $S(x,y)$ таким образом, чтобы она была представлена в виде квадратичного полинома по x с коэффициентами, которые, в свою очередь, тоже являются квадратичными сплайнами по y. Этот сплайн будет иметь вид:

$$S_{ij}(x,y)=a_{ij}(y)x^2+b_{ij}(y)x+c_{ij}(y),$$

где

$$a_{ij}(y)=a_2^{ij}y^2+a_1^{ij}y+a_0^{ij},$$

$$b_{ij}(y)=b_2^{ij}y^2+b_1^{ij}y+b_0^{ij},$$

$$c_{ij}(y)=c_2^{ij}y^2+c_1^{ij}y+c_0^{ij}.$$

Итак, мы свели построение двумерного сплайна к последовательному построению одномерных сплайнов.

---

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 08-01-00189.

Сначала, положив $y = y_j$, строим одномерный сплайн по x [2] на каждом уровне $y = y_j$, $j = 0,1,\ldots,M$:

$$S_{ij}(x_i, y_j) = f_{ij},$$
$$S_{ij}(x_{i+1}, y_j) = f_{i+1\,j},$$

$\left.\dfrac{\partial S_{ij}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j}} = p_x^{ij}$, где f_{ij} заданные значения функции в узлах сетки, а p_x^{ij} – значения частной производной сплайна по x на уровне $y = y_j$ в узлах (x_i, y_j), $i = 0,1,\ldots,N-1$. Значения p_x^{ij} находим из условия непрерывности производной одномерного сплайна $S(x, y_j)$:

$$\left.\frac{\partial S_{ij}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_i+1 \\ y=y_j}} = \left.\frac{\partial S_{i+1\,j}}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{i+1} \\ y=y_j}} \tag{1}$$

и из условия, что значение p_x^{0j} должно быть таким, чтобы достигался минимум нормы производной $\min\limits_{px_{0j}} \left\| \left.\dfrac{\partial S}{\partial x}\right|_{y_j} \right\|_{L_2}^2$ [2-4]. Таким образом, для каждого уровня $y = y_j$ находим значения p_x^{0j}, т. е. производную в начальной точке уровня $y = y_j$ или, что тоже самое, в узле (x_0, y_j); далее по рекуррентной формуле (1) находим для этого же уровня остальные значения p_x^{ij} и так для каждого $j = 0,1,\ldots,M$.

Эти условия нам последовательно дают для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ значения коэффициентов $a_{ij}(y_j)$, $b_{ij}(y_j)$, $c_{ij}(y_j)$ одномерного сплайна j-го уровня, т. е.:

$$a_{ij}(y_j) = -\frac{p_x^{ij}}{h} - \frac{f_{ij}}{h^2} + \frac{f_{i+1\,j}}{h^2},$$
$$b_{ij}(y_j) = \frac{(x_i + x_{i+1})p_x^{ij}}{h} + \frac{2x_i f_{ij}}{h^2} - \frac{2x_i f_{i+1\,j}}{h^2},$$
$$c_{ij}(y_j) = -\frac{x_{i+1}x_i p_x^{ij}}{h} - \frac{x_{i+1}(2x_i - x_{i+1})f_{ij}}{h^2} + \frac{x_i^2 f_{i+1\,j}}{h^2}.$$

Следовательно, мы находим все значения функций $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$ на сетке Δ_{NM}.

Зная значения $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$ в узлах сетки (x_i, y_j) $i = 0,1,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,M$, строим сплайн по y, т. е. строим одномерные сплайны [2] для коэффициентов $a(y)=S_a(y)$; $b(y)=S_b(y)$; $c(y)=S_c(y)$. Они имеют следующий вид:

$$a(y)=S_a(y)=S_a^{ij}(y)=$$
$$=-\frac{(y-y_j)(y-y_{j+1})p_a^{ij}}{l}+\frac{(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})p_x^{ij}}{hl^2}-\frac{(y-y_j)^2 p_x^{ij+1}}{hl^2}+$$
$$+\frac{(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})f_{ij}}{h^2l^2}-\frac{(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})f_{i+1j}}{h^2l^2}-$$
$$-\frac{(y-y_j)^2 f_{ij+1}}{h^2l^2}+\frac{(y-y_j)^2 f_{i+1j+1}}{h^2l^2},\ y\in[y_j,y_{j+1}];$$

$$b(y)=S_b(y)=S_b^{ij}(y)=$$
$$=-\frac{(y-y_j)(y-y_{j+1})p_b^{ij}}{l}-\frac{(x_i+x_{i+1})(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})p_x^{ij}}{hl^2}+$$
$$+\frac{(x_i+x_{i+1})(y-y_j)^2 p_x^{ij+1}}{hl^2}-\frac{2x_i(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})f_{ij}}{h^2l^2}+$$
$$+\frac{2x_i(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})f_{i+1j}}{h^2l^2}+\frac{2x_i(y-y_j)^2 f_{ij+1}}{h^2l^2}-\frac{2x_i(y-y_j)^2 f_{i+1j+1}}{h^2l^2},$$
$$y\in[y_j,y_{j+1}];$$

$$c(y)=S_c(y)=S_c^{ij}(y)=$$
$$=-\frac{(y-y_j)(y-y_{j+1})p_c^{ij}}{l}+\frac{x_{i+1}x_i(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})p_x^{ij}}{hl^2}-$$
$$-\frac{x_{i+1}x_i(y-y_j)^2 p_x^{ij+1}}{hl^2}-\frac{x_{i+1}(2x_i-x_{i+1})(y-y_j)^2 f_{ij+1}}{h^2l^2}+\frac{x_i^2(y-y_j)^2 f_{i+1j+1}}{h^2l^2}+$$
$$+\frac{x_{i+1}(2x_i-x_{i+1})(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})f_{ij}}{h^2l^2}-\frac{x_i^2(y-y_{j+1})(y-2y_j+y_{j+1})f_{i+1j}}{h^2l^2},$$
$$y\in[y_j,y_{j+1}];$$

где $j=0,1,\dots,M-1$, $h-$ шаг по x, $l-$ шаг по y, p_a^{ij}, p_b^{ij}, $p_c^{ij}-$ соответственно производные сплайнов $S_a(y)$; $S_b(y)$; $S_c(y)$ по y. В результате построен полный двумерный сплайн. При этом на каждом шаге строится обычный одномерный квадратичный сплайн [2] с минимальной нормой производной.

Докажем, что построенный таким образом сплайн принадлежит классу $C^{(1,1)}$, т. е. $S(x,y)\in C^{(1,1)}$.

Ясно, что $S(x, y)$ принимает требуемые значения в узлах сетки (x_i, y_j). Внутри области $\Pi_{ij} : \{x \in [x_i, x_{i+1}], y \in [y_j, y_{j+1}]\}$ сплайн $S(x, y)$ как полином второй степени по x и второй степени по y принадлежит $C^{(2,2)}$. Рассмотрим непрерывность $S(x, y)$ и её частных производных на границах области Π_{ij}.

Рассмотрим границу $y = y_j$, $x \in (x_i, x_{i+1})$, где должны выполняться условия непрерывности

$$S(y_j + 0, x) = S(y_j - 0, x); \; \left.\frac{\partial S}{\partial y}\right|_{y_j+0} = \left.\frac{\partial S}{\partial y}\right|_{y_j-0}$$

или

$a(y_j + 0)x^2 + b(y_j + 0)x + c(y_j + 0) = a(y_j - 0)x^2 + b(y_j - 0)x + c(y_j - 0);$

$a'(y_j + 0)x^2 + b'(y_j + 0)x + c'(y_j + 0) = a'(y_j - 0)x + b'(y_j - 0)x + c'(y_j - 0);$

$a_{ij}(y_j)x^2 + b_{ij}(y_j)x + c_{ij}(y_j) = a_{ij-1}(y_j)x^2 + b_{ij-1}(y_j)x + c_{ij-1}(y_j);$

$a'_{ij}(y_j)x^2 + b'_{ij}(y_j)x + c'_{ij}(y_j) = a'_{ij-1}(y_j)x + b'_{ij-1}(y_j)x + c'_{ij-1}(y_j).$

Эти условия выполняются, если:

$a(y_j + 0) = a(y_j - 0)$;

$b(y_j + 0) = b(y_j - 0)$; $c(y_j + 0) = c(y_j - 0)$; $a'(y_j + 0) = a'(y_j - 0)$;

$b'(y_j + 0) = b'(y_j - 0)$; $c'(y_j + 0) = c'(y_j - 0)$ то есть $a_{ij}(y_j) = a_{ij-1}(y_j)$;

$b_{ij}(y_j) = b_{ij-1}(y_j)$; $c(y_j) = c(y_j)$; $a'(y_j) = a'(y_j)$; $b'(y_j) = b'(y_j)$;

$c'_{ij}(y_j) = c'_{ij-1}(y_j)$ (условия равенства полиномов).

Справедливость этих выражений следует из построения сплайнов для $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, так как $a(y) = S_a(x, y)$, $b(y) = S_b(x, y)$, $c(y) = S_c(x, y)$ являются сплайнами класса C^1 на $[c, d]$.

Рассмотрим далее непрерывность $S(x, y)$ и $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ на границе $x = x_i$, $y \in [y_j, y_{j+1}]$.

Надо доказать что

$$S(x_i + 0, y) = S(x_i - 0, y), \; \left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=x_i+0} = \left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=x_i-0}$$

или, что тоже самое,

$$S_{i-1j}(x_i, y) = S_{ij}(x_i, y), \; \left.\frac{\partial S_{i-1j}}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \left.\frac{\partial S_{ij}}{\partial x}\right|_{x=x_i}.$$

Известно, что в узлах (x_i, y_j) и (x_i, y_{j+1}) $S_{i-1j}(x_i, y_j) = S_{ij}(x_i, y_j) = f_{ij}$ и $S_{i-1j}(x_i, y_{j+1}) = S_{ij}(x_i, y_{j+1}) = f_{ij+1}$. Так как $S_{ij}(x_i, y)$ является квадратичным полиномом на $y \in [y_j, y_{j+1}]$, то для однозначного его определения необходимо задать значения в трёх точках. Нам известны значения в двух точках и для любого промежутка $y \in [y_j, y_{j+1}]$, $j = 0,1,\ldots,M-1$, а также известно значение производной $\left.\frac{\partial S_{ij}}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}}$ из построения сплайна, что позволяет однозначно определить квадратичный полином.

Итак, получаем

$$\left.\frac{\partial S_{ij}}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = 2\frac{\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k} f_{ik})}{l} - 2\frac{\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k} f_{ik-1}}{l} - \frac{(-1)^j \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k f_{ik}}{lM} +$$

$$+2\frac{(-1)^j \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{k}(-1)^m f_{im-1}}{lM} + 2\frac{(-1)^{j+1}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{k}(-1)^m f_{im}}{lM} + \frac{(-1)^j \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k f_{ik+1}}{lM}$$

и

$$\left.\frac{\partial S_{i-1j}}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_i\\ y=y_j}} = 2\frac{\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k} f_{ik})}{l} - 2\frac{\sum_{k=1}^{j}(-1)^{j-k} f_{ik-1}}{l} - \frac{(-1)^j \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k f_{ik}}{lM} +$$

$$+2\frac{(-1)^j \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{k}(-1)^m f_{im-1}}{lM} + 2\frac{(-1)^{j+1}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{m=1}^{k}(-1)^m f_{im}}{lM} + \frac{(-1)^j \sum_{k=0}^{M-1}(-1)^k f_{ik+1}}{lM}.$$

Откуда имеем равенство производных справа и слева границы $x = x_i$. Это означает, что мы имеем два полинома с равными коэффициентами, а из условия равенства полиномов следует, что $S_{i-1j}(x_i, y) = S_{ij}(x_i, y)$. Аналогично доказывается равенство производных $\left.\frac{\partial S_{i-1j}}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \left.\frac{\partial S_{ij}}{\partial x}\right|_{x=x_i}$. Следовательно, построенный нами сплайн принадлежит классу $C^{(1,1)}$.

Применение к задачам интерполяции

В качестве примера приведем построение сплайн интерполяционной функции, которая восстанавливает функцию

$f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ на прямоугольнике $[-2,2]\times[-1,1]$ по значениям заданным на равномерной сетке $\Delta_{N,N}$.

Была построена сплайн интерполяционная функция на сетке с шагом $h_x = 2/3$ и с шагом $h_y = 1/3$, т.е. на прямоугольнике было взято 49 узлов. Даже с таким крупным шагом разбиения сплайн функция хорошо приближает искомую функцию. Некоторое уклонение возникает на границе прямоугольника. На рис.1 приведены точные значения функции $f(x, y = -\frac{1}{8})$ (сплошная кривая) и соответствующая сплайн функция (пунктирная кривая). Для улучшения интерполяции были несколько уменьшены шаги разбиения $h_x = 1/2$ и $h_y = 1/4$, т.е. был взят 81 узел, где заданы значения интерполируемой функции. Хотя шаг разбиения еще достаточно большой, сплайн функция приближает искомую функцию очень хорошо, и на графике они не отличаются. Приведенный пример показывает эффективность предложенного метода построения двумерной сплайн функции.

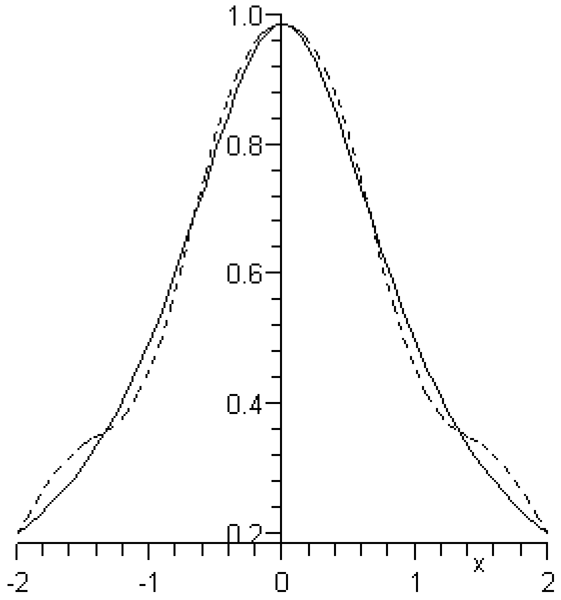

Рис. 1

Литература

1. Стечкин С.Б. Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. Изд-во “Наука”, М., 1976, 248 с.

2. Ингтем Ж.Г. Сплайн функция с минимальной нормой производной в задачах интерполяции и аппроксимации// Вестник Московского Университета Вычислительная математика и кибернетика №4, 2008, с.16-27.
3. Дмитриев В.И. Ингтем Ж.Г. Использование сплайн аппроксимации при решении интегрального уравнения первого рода//Прикладная математика и информатика №14, М: Изд-во ВМиК МГУ, 2003, с.5-10.
4. V.I.Dmitriev, Zh.Ingtem Solving an Integral Equation of the First Kind by Spline Approximation // Computational Mathematics and Modeling vol.15, №2, 2004, p.99-104.