

*В.А. Исаков*

## ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИАКУСТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ К РЕШЕНИЮ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ\*

### 1. Введение

Нелинейные уравнения и системы гиперболического типа, классическим примером которых являются уравнения Эйлера газовой динамики, часто составляют основу математических моделей, применяемых для решения многих задач современной науки и техники. Круг прикладных и теоретических вопросов здесь весьма широк, постоянно расширяется, выдвигая всё новые требования к качеству и эффективности численных методов исследования соответствующих задач. В связи с этим развитие разностных схем для уравнений газовой динамики сохраняет свою актуальность, как в практическом отношении, так и в плане продвижения современной теории численных методов.

Представленная в данной работе разностная схема примыкает к классу консервативных схем Годуновского типа [1] и к сеточно-характеристическим схемам [2, с.3-40], а также является обобщением алгоритма, который подробно рассмотрен в случае одного [3] и двух [4] пространственных измерений.

### 2. Построение разностной схемы

Рассматривается система уравнений Эйлера газовой динамики в случае трёх пространственных измерений в дивергентной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где  $f = \{\rho, q^{(1)} = \rho u, q^{(2)} = \rho v, q^{(3)} = \rho w, e = \rho(\varepsilon + (u^2 + v^2 + w^2)/2)\}^T$  – вектор-столбец консервативных переменных, а  $F, G, H$  – вектор-столбцы потоков:

$$\begin{aligned} F &= \{\rho u, uq^{(1)} + p, uq^{(2)}, uq^{(3)}, u(e + p)\}^T, \\ G &= \{\rho v, vq^{(1)}, vq^{(2)} + p, vq^{(3)}, v(e + p)\}^T, \\ H &= \{\rho w, wq^{(1)}, wq^{(2)}, wq^{(3)} + p, w(e + p)\}^T. \end{aligned}$$

\* Работа выполнена при поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы.

Здесь и в дальнейшем  $\rho$  – плотность газа,  $u, v, w$  – составляющие вектора скорости  $V$  вдоль направлений  $x, y, z$  соответственно,  $p$  – давление газа,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия единицы массы газа,  $e$  – полная энергия единицы объёма газа.

Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,$$

где  $\gamma > 1$  – показатель адиабаты.

Построение схемы проводится с помощью интегро-интерполяционного метода [5, с. 157]: интегрируя уравнения системы (1) по пространственно-временной ячейке

$$\Omega_{ijk}^n = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}] \times [t_n, t_n + \Delta t],$$

образованной равномерными по координатным направлениям  $x, y, z$  и времени  $t$  сетками с шагами  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и  $\Delta t$  соответственно, приходим к балансным соотношениям

$$\begin{aligned} (f_{ijk}^{n+1} - f_{ijk}^n) \Delta x \Delta y \Delta z + [IF_{i+1/2}^n - IF_{i-1/2}^n] + [IG_{j+1/2}^n - IG_{j-1/2}^n] + \\ + [IH_{k+1/2}^n - IH_{k-1/2}^n] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

выражающим законы сохранения массы, импульса и полной энергии.

Здесь под величиной

$$f_{ijk}^n = \langle f \rangle_{ijk}^n = \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} f(x, y, z, t_n) dz dy dx \quad (3)$$

понимается среднее по ячейке

$$\Omega_{ijk} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$$

значение функции  $f$  на момент времени  $t = t_n$ , а величины

$$IF_{i\pm 1/2}^n = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} F(x_{i\pm 1/2}, y, z, t) dz dy dt,$$

$$IG_{j\pm 1/2}^n = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} G(x, y_{i\pm 1/2}, z, t) dz dx dt,$$

$$IH_{k\pm 1/2}^n = \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} H(x, y, z_{k\pm 1/2}, t) dy dx dt$$

суть интегральные потоки  $F, G, H$  за время  $\Delta t$  через границы  $x = x_{i\pm 1/2}, y = y_{j\pm 1/2}, z = z_{k\pm 1/2}$  ячейки  $\Omega_{ijk}$  соответственно.

Принимая во внимание (3), построение схемы по существу сводится к аппроксимации интегральных потоков за время  $\Delta t$ .

### 3. Аппроксимация интегральных потоков за время $\Delta t$

Процесс аппроксимации интегральных потоков за время  $\Delta t$  состоит из следующих этапов.

#### 3.1. Линейная реконструкция опорных функций систем

В пределах каждой ячейки  $\Omega_{ijk}$  приблизим каждую из опорных функций системы  $f = \{\rho, u, v, w, p\}^T$  на момент времени  $t = t_n$  линейной поверхностью [3,4], уравнение которой имеет следующий вид:

$$f(x, y, z; x_i, y_j, z_k, t_n) \cong f_{ijk}^n + (x - x_i) D_{ijk,x}^n + (y - y_j) D_{ijk,y}^n + (z - z_k) D_{ijk,z}^n, \quad (4)$$

где  $f = \{\rho, u, v, w, p\}^T$  – вектор-столбец опорных функций системы.

Величины  $D_{ijk,x}^n, D_{ijk,y}^n, D_{ijk,z}^n$  задают вектор нормали к поверхности и вычисляются согласно следующей формуле

$$D_{ijk,\xi}^n = \frac{|f_{\xi,ijk}^n|}{|f_{\xi,ijk}^n| + |f_{\xi,ijk}^n|} f_{\xi,ijk}^n + \frac{|f_{\xi,ijk}^n|}{|f_{\xi,ijk}^n| + |f_{\xi,ijk}^n|} f_{\xi,ijk}^n,$$

где  $\xi = \{x, y, z\}^T$ ,  $f_{\xi,ijk}^n$  – левая производная (производная назад) вдоль направления  $\xi$  в узле  $(x_i, y_j, z_k)$  в момент времени  $t = t_n$ ,  $f_{\xi,ijk}^n$  – правая производная (производная вперёд) вдоль направления  $\xi$  в узле  $(x_i, y_j, z_k)$  в момент времени  $t = t_n$ .

Такой способ определения величин  $D_{ijk,x}^n, D_{ijk,y}^n, D_{ijk,z}^n$  позволяет обеспечить монотонность решения на соответствующих участках монотонности сеточной функции  $\{f_{ijk}^n\}$  вдоль каждого координатного направления [6].

Представленная линейная функция обладает также свойством преемственности: зафиксировав любые два из трёх координатных направлений, получаем уравнение линейной функции, которая используется при расчёте одномерной системы уравнений [3], а зафиксировав одно из координатных направлений, – линейную плоскость, применяемую при расчёте системы уравнений в случае двух пространственных измерений [4].

### 3.2. Замена линейной функции суперпозицией “вертикальных столбцов”

Построив линейные функции  $f(x, y, z; x_i, y_j, z_k, t_n)$  для каждой ячейки расчётной сетки, разбиваем каждую ячейку  $\Omega_{ijk}$  на  $N_{part}^{(x)} \times N_{part}^{(y)} \times N_{part}^{(z)}$  подъячеек, имеющих форму прямоугольных параллелепипедов. В пределах каждой из подъячеек, в свою очередь, заменяем линейную функцию (4) её средним значением, определённым в центре подъячейки, которое назовём “вертикальным столбцом”. Данную процедуру проводим для каждой опорной функции системы.

### 3.3. Определение фоновых подобластей и фоновых значений опорных функций

Выделим на расчётной сетке прямоугольный параллелепипед, вершинами которого являются центры ячеек:

$$\Omega_{i-1, j-1, k-1}; \Omega_{i, j-1, k-1}; \Omega_{i-1, j, k-1}; \Omega_{i, j, k-1} \\ \Omega_{i-1, j-1, k}; \Omega_{i, j-1, k}; \Omega_{i-1, j, k}; \Omega_{ijk}.$$

Назовём его первой фоновой подобластью и обозначим  $\bar{\Omega}_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}$ . Определим на  $\bar{\Omega}_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}$  фоновое значение опорной функций  $\bar{f}_{i-1/2, j-1/2, k-1/2}$  как среднее по объёму, составленному из суммы объёмов “вертикальных столбцов”, основанием которых являются подъячейки, отсекаемые фоновой подобластью от задающих её ячеек.

Аналогичным образом вводим другие фоновые подобласти, пересекающие ячейку  $\Omega_{ijk}$ , которые обозначим как

$$\bar{\Omega}_{i+1/2, j-1/2, k-1/2}; \bar{\Omega}_{i-1/2, j+1/2, k-1/2}; \bar{\Omega}_{i+1/2, j+1/2, k-1/2} \\ \bar{\Omega}_{i-1/2, j-1/2, k+1/2}; \bar{\Omega}_{i+1/2, j-1/2, k+1/2}; \bar{\Omega}_{i-1/2, j+1/2, k+1/2}; \bar{\Omega}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}.$$

Следует заметить, что на каждой из введённых фоновых подобластей определены фоновые значения пяти опорных функций:

$$\bar{\rho}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}; \bar{u}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}; \bar{v}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}; \bar{w}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}; \bar{p}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma = \pm 1/2$ .

### 3.4. Разбиение “вертикальных столбцов” на блоки малых возмущений

Определив значения опорных функций на фоновых подобластях, представим функцию  $f$  на каждой группе из  $N_{part}^{(Vol)}$  подъячеек,

отсекаемых фоновой подобластью от задающих её ячеек, в виде композиции фонового значения  $\bar{f}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}$  и расположенных на нём “усечённых вертикальных столбцов” высотой

$$f_{i+\tilde{\alpha}, j+\tilde{\beta}, k+\tilde{\gamma}}^{(column)}(p) - \bar{f}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – индексы, определяющие соответствующую фоновую подобласть ячейки  $\Omega_{ijk}$ ;  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} = \{-1, 0, 1\}$  – индексы, определяющие ячейку, пересекаемую фоновой подобластью  $\bar{\Omega}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}$ ;  $p$  – локальный номер подъячейки в пределах ячейки  $\Omega_{i+\tilde{\alpha}, j+\tilde{\beta}, k+\tilde{\gamma}}$ ;  $f_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}^{(column)}(p)$  – высота  $p$ -го “вертикального столбца”.

Каждый такой “усечённый вертикальный столбец”, в свою очередь, разделим на  $N_{blocks}$  блоков одинаковой высоты

$$|\Delta f| = \frac{\left| f_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma}^{(column)}(p) - \bar{f}_{i+\alpha, j+\beta, k+\gamma} \right|}{N_{blocks}},$$

которые будем отождествлять с малыми возмущениями опорной функции системы.

Фоном для распространения каждого из таких малых возмущений будем считать либо значение опорной функции на соответствующей фоновой подобласти, либо значение опорной функции на границе, разделяющей данный блок и блок, прилегающий к нему со стороны общего фона.

Таким образом, линейная функция  $f(x, y, z; x_i, y_j, z_k, t_n)$  в пределах ячейки  $\Omega_{ijk}$  расчётной сетки заменяется конструкцией, состоящей из восьми групп “усечённых вертикальных столбцов”, каждый из которых, в свою очередь, разделён на  $N_{blocks}$  блоков малых возмущений одинаковой амплитуды.

Правомерность такого представления проверялась многочисленными одномерными расчётами, результаты которых практически совпадали с результатами расчётов с горизонтальным разбиением линейной функции  $f(x, y, z; x_i, y_j, z_k, t_n)$  [3], а также сравнением с точными решениями.

### 3.5. Аппроксимация интегральных потоков за время $\Delta t$

Интегральный поток за время  $\Delta t$  через границу ячейки  $\Omega_{ijk}$  складывается из потока, обусловленного фоновыми значениями опорных функций, определённых в пределах фоновых подобластей, пересекающих

границу ячейки  $\Omega_{ijk}$ , и интегрального потока от малых возмущений опорных функций.

Интегральный поток от малых возмущений связан с распространением акустических возмущений, на которые за время  $\Delta t$  распадаются блоки малых возмущений опорных функций системы из соответствующих ячеек, определяющих фоновые подобласти, пересекающие границу ячейки  $\Omega_{ijk}$ . Акустические возмущения рассчитываются на основе метода аддитивного расщепления линеаризованных уравнений Эйлера газовой динамики по координатным направлениям. В результате интегральный поток от малых возмущений опорных функций распадается на сумму четырёх интегральных добавок потока от акустических возмущений опорных функций, соответствующих фоновым подобластям, пересекающим границу ячейки  $\Omega_{ijk}$ . При этом каждая из интегральных добавок потока, в свою очередь, складывается из трёх компонент, отвечающих характеристическим скоростям, с которыми распространяются акустические возмущения опорных функций.

### 3.6. Вычисление компоненты интегральной добавки потока

В процессе вычисления компоненты интегральной добавки участвуют две группы из  $N_{part}^{(Vol)}$  “усечённых вертикальных столбцов”, расположенных в  $\Omega_{ijk}$  и в соседней с ней ячейке в пределах одной фоновой подобласти, пересекающей границу ячейки  $\Omega_{ijk}$ . Блоки акустических возмущений из первой группы “усечённых вертикальных столбцов” перемещаются каждый со своей характеристической скоростью из соседней ячейки в ячейку  $\Omega_{ijk}$ , а блоки из второй группы – из ячейки  $\Omega_{ijk}$  в соседнюю. Вклад каждой группы блоков в результирующее значение компоненты интегральной добавки потока определяется суммарным объёмом тех частей блоков, которые за время  $\Delta t$ , двигаясь каждый по своему фону, пересекли границу ячейки  $\Omega_{ijk}$ .

Описанная процедура вычисления компоненты интегральной добавки является корректной при соблюдении условия устойчивости Куранта, которое в данном случае принимает следующий вид:

$$\begin{cases} V_{\max,x}^{(n)} \Delta t < 0.5 \Delta x \\ V_{\max,y}^{(n)} \Delta t < 0.5 \Delta y \\ V_{\max,z}^{(n)} \Delta t < 0.5 \Delta z \end{cases}$$

где  $V_{\max,x}^{(n)} = \max_{\{ijk\}} \{ |u_{ijk}^n| + c_{ijk}^n \}$ ,  $V_{\max,y}^{(n)} = \max_{\{ijk\}} \{ |v_{ijk}^n| + c_{ijk}^n \}$ ,  $V_{\max,z}^{(n)} = \max_{\{ijk\}} \{ |w_{ijk}^n| + c_{ijk}^n \}$ .

#### 4. Применение квазиакустической схемы к решению прикладной задачи

В качестве примера практического применения описанной квазиакустической схемы рассмотрим расчёт задачи о взаимодействии газовых струй, истекающих из двигателей самолёта, с отражающим экраном-отбойником (см. рис. 1).

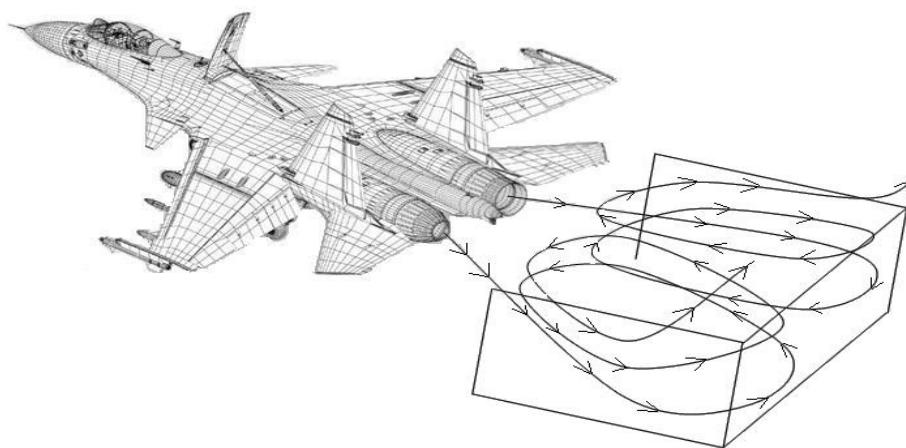


Рис.1. Взаимодействие газовых струй с отражающим экраном-отбойником

Данная задача имеет практическое значение: как показали модельные и натурные эксперименты, использование экранов-отбойников на пути следования истекающих газовых струй позволяет снизить негативное воздействие на окружающую среду, вызванное продуктами сгорания авиационного топлива, в приземном слое атмосферы в районе аэропорта[7].

Процесс распространения, а также взаимодействия газовых струй с отражающими стенками экрана-отбойника, имеющего форму прямоугольной скобы, с приемлемой точностью описывается уравнениями Эйлера газовой динамики в случае трёх пространственных измерений, для численного решения которых используется квазиакустическая схема (2). Цель математического моделирования данной задачи состоит в том, чтобы выяснить качественное поведение течения во внутренней и внешней областях скобы, а также определить суммарное (интегральное) давление газовых струй на стенки скобы (в особенности на заднюю стенку скобы).

#### 4.1. Картина течения во внутренней и внешней областях экрана-отбойника

Размер и местоположение скобы выбираются таким образом, чтобы основная часть истекающих газовых струй попадала во внутреннюю область экрана-отбойника.

Проведённые численные расчёты показали, что во внутренней области скобы газовые струи, отражаясь от её внутренних стенок, а также взаимодействуя с набегающими струями, формируют закрученный, вихревой поток, основная часть которого устремляется вверх (см. рис. 2а).

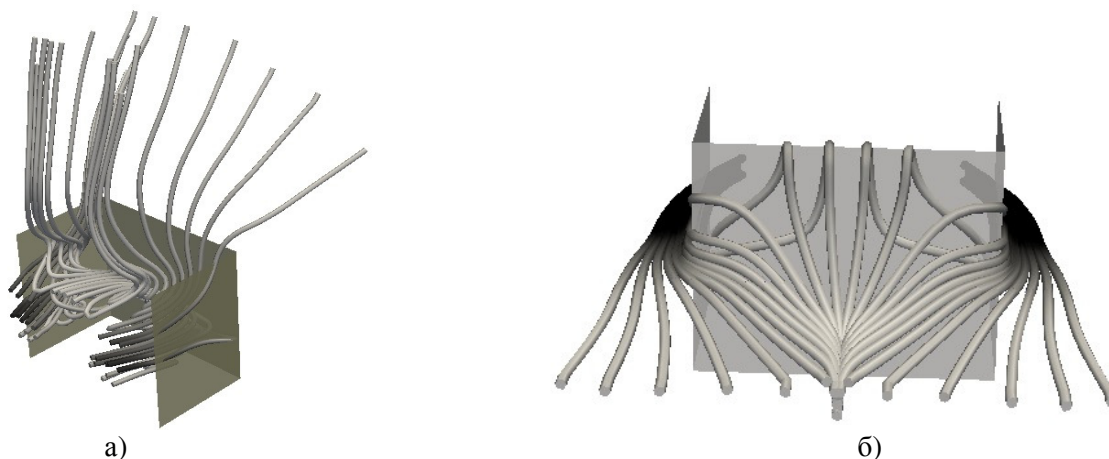


Рис.2. Линии тока: а) во внутренней области экрана-отбойника, б) с внешней стороны экрана-отбойника.

Такой характер течения приводит к интенсивному перемешиванию газовых струй с окружающим воздушным пространством, как снаружи, так и внутри вихревого потока, что способствует разбавлению продуктов сгорания истекающих газов и, как следствие, снижению концентрации вредных веществ в окружающем пространстве [7].

С внешней стороны скобы вблизи её боковых стенок часть газовых струй, не попавших во внутреннюю область экрана-отбойника, взаимодействует с боковыми стенками. В результате взаимодействия основная часть газовых струй устремляется в стороны от боковых стенок экрана-отбойника, а небольшая их часть затекает за заднюю стенку скобы, где происходит их взаимодействие с частью вихревого потока, перетекающей через верхний край задней стенки скобы (см. рис. 2б).

Проведённые численные расчёты показали, что качественно картина течения во внутренней и внешней областях скобы близка к той, что наблюдалась при проведении натуральных экспериментов [7]. Это позволяет воспользоваться квазиакустической схемой для изучения характера течения в интересующих областях экрана-отбойника без проведения довольно затратных и трудоёмких натуральных экспериментов.



#### 4.2. Давление газовых струй на заднюю стенку экрана-отбойника

Одним из главных факторов, который следует учитывать при проведении натурных экспериментов, является давление, оказываемое газовыми струями, на стенки экрана-отбойника, в особенности, на заднюю стенку скобы.

На рис. 3 представлена характерная зависимость суммарной (интегральной) силы давления газовых струй на заднюю стенку скобы от времени.

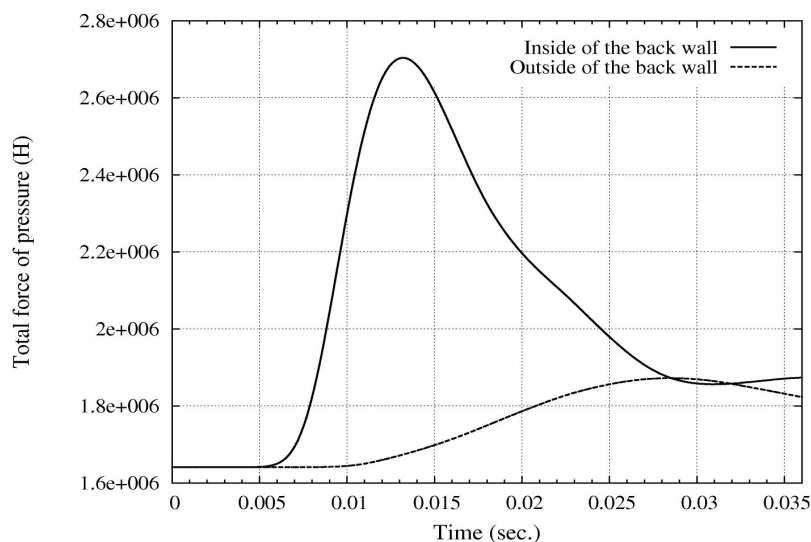


Рис. 3. Характерная зависимость суммарной (интегральной) силы давления, оказываемой газовыми струями, на заднюю стенку скобы от времени.

Проведённые численные расчёты показали, что максимальное значение суммарной силы давления газовых струй на внутреннюю сторону задней стенки скобы соответствует моменту формирования вихревого потока (см. рис. 3). После того, как вихревое образование сформировалось, наблюдается постепенное понижение суммарного давления на внутреннюю сторону задней стенки скобы до момента времени, пока вихревое образование не покинет внутреннее пространство экрана-отбойника.

На внешнюю сторону задней стенки скобы оказывает воздействие часть истекающих газовых струй, затекающих за заднюю стенку экрана-отбойника. Это приводит к повышению суммарной силы давления на неё. Дополнительный вклад в результирующее значение суммарной силы давления вносит часть вихревого потока, перетекающая через верхний край задней стенки скобы. Повышение давления на стенку скобы наблюдается до момента времени, пока газовые струи не начали взаимодействовать с частью вихревого потока (см. рис. 3). В результате их взаимодействия происходит перераспределение газовых струй: основная их часть устремляется в стороны от задней стенки скобы, что

приводит к постепенному понижению суммарной силы давления на внешнюю сторону задней стенки скобы.

Представленные зависимости позволяют получить и проанализировать числовые значения суммарной силы давления на заднюю стенку скобы и на их основе внести необходимые поправки в конструкцию экрана-отбойника до проведения натурального эксперимента.

## 5. Вывод

Таким образом, подтверждена принципиальная возможность перестройки продольных газовых струй, истекающих из двигателей самолёта, в вертикально поднимающиеся вихри, образующиеся вследствие отражения струй от стенок экрана-отбойника. Такая картина течения приводит к интенсивному перемешиванию газовых струй с окружающим воздухом на больших высотах, что способствует, в конечном счёте, снижению концентрации вредных веществ вблизи земной поверхности.

Автор выражает благодарность научному руководителю А.П. Фаворскому, С.И. Мухину, М.В. Абакумову за оказанную помощь при подготовке работы, а также И.К. Ермолаеву за любезно предоставленные данные натуральных экспериментов.

## Литература

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики. Мат. сборник, 1959, т.47(89), вып.3. – с. 271-306.
2. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988, 290 с.
3. Абакумов М.В., Галанина А.М., Исаков В.А., Тюрина Н.Н., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики // Дифференциальные уравнения, 2011, т. 47, № 8, с. 1092-1098.
4. Исаков В.А., Фаворский А.П. Квазиакустическая схема для уравнений Эйлера газовой динамики в случае двух пространственных измерений// Мат. Моделирование, 2012, т. 24, № 12, с. 55-60.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, 656 с.
6. Фаворский А.П., Тыглиян М.А., Тюрина Н.Н., Галанина А.М., Исаков В.А. Численное моделирование распространения гемодинамических импульсов // Мат. Моделирование, 2009, т. 21, № 12, с. 21-34.
7. Фадеев В.А., Шарапов В.И., Ермолаев И.К. Математическое моделирование и экспериментальная обработка методов снижения загазованности приземного слоя атмосферы в районе аэропорта// Вестник компьютерных и информационных технологий, 2012, № 7, с. 16-20.