И.Г. Исмаилов

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Спектр практических проблем, которые приводят к задачам условной оптимизации при наличии связей в виде граничных или начально-краевых задач для уравнений с частными производными, весьма широк [1–4]. В книгах [1] и [2] обращается внимание на специфику задач оптимизации старших коэффициентов эллиптических уравнений второго порядка, на аспектах разрешимости [1] и вывода необходимых условий оптимальности [2]. Упомянутые в [2] проблемы на пути получения необходимых условий оптимальности решены в работе [5]. В данной работе доказываются необходимые условия оптимальности для некоторых классов задач условной оптимизации с ограничениями в виде операторных уравнений при дополнительных функциональных ограничениях. Из доказанных условий выводятся принцип максимума Понтрягина и правило множителей Лагранжа.

1. Постановка задач и примеры

Пусть B – банахово пространство, V – рефлексивное банахово пространство, V' – пространство, сопряженное к V, $K \subset B$ – некоторое множество. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\textbf{З.} \quad J(k,u) \to \min,\ k \in K$$

$$A(k)u = f(k), \tag{1}$$

где $A(k): V \to V', f(k) \in V'$ при $k \in K$. Предполагается, что уравнение (1) имеет единственное решение $u(k) \in V$ для любого $k \in K$.

Пример 1. Поиск оптимального распределения толщины пластины в области $\Omega \subset R^2$ с границей $\partial\Omega$ заключается в минимизации функционала $J(u)$ на решениях граничной задачи, которая моделирует изгиб нагруженной пластины с опирающимися краями:

$$A(k)u = \Delta(k^3(x)\Delta u(x)) = f(x),\ \forall x \in \Omega, \qquad (2)$$

$$u_{|\partial\Omega} = \Delta u_{|\partial\Omega} = 0\,, \qquad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа, а толщина пластины $k(x)$ меняется, например, на множестве $K = \{k \in L_2(\Omega) \mid 0 < \alpha \le k(x) \le \beta < \infty,\ \forall x \in \Omega\}$.

Решением задачи ((2),(3)) является функция[1] $u \in W_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_\Omega k^3(x)\Delta u(x)\Delta v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in W_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

В виде задачи 3 формулируются также задачи математического программирования.

Пример 2. Пусть в задаче **3** $B = B_1 \times V'$, $K = K_1 \times K_2$, $K_1 \subset B_1$, $K_2 \subset V'$, $A(k)u = A(k_1)u$, $f(k) = k_2$, $k_2 \in K_2$.. Тогда уравнение (1) приобретает вид $A(k_1)u = k_2$ и мы имеем задачу условной оптимизации с ограничением в виде операторного включения $A(k_1)u \in K_2$. В частности, если положить $K_1 = B_1$, $V' = R^2$, а $K_2 = \{k_2 = (k_{21}, k_{22}) \mid k_{21} \ge 0, k_{22} \ge 0\}$, то задача **3** переходит в задачу математического программирования с двумя ограничениями в виде неравенств. Если $K_2 = V'$, то ограничение $A(k_1)u = k_2$ отсутствует.

Пример 3. Пусть в примере 2 $A(k_1)u = Au$, $J(k,u) = J(u)$, $K_2 = AU$, где $A: V \to V'$ – линейное взаимно однозначное отображение, а $U \subset V$ – некоторое множество. В результате получаем общую задачу условной оптимизации $J(u) \to \min,\ u \in U \subset V$.

В п. 2 находятся условия оптимальности для задач из примеров 1-3, а в п.п. 3 и 4 – аналогичные условия для задач с функциональными ограничениями.

2. Условия оптимальности

Пару (k,u) назовем *допустимой* в задаче 3, если $k \in K$, $u = u(k)$. Значение функционала $f \in V'$ на элементе $u \in V$ обозначим через $\langle f, u\rangle_V$, а норму элемента $u \in V$ – через $\| u \|_V$. Индекс иногда будут опущен, если из контекста понятно, о каком пространстве идет речь. Рассмотрим функционал Понтрягина $H(k,u,w) = \langle A(k)u - f(k), w\rangle_V - J(k,u)$, где $w \in V$. Оператор $A(k)$ называется сильно монотонным, если для некоторого положительного числа χ выполнено неравенство

[1] Определение пространств $W_2^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ см., например, в [6].

$$\chi \| u-v \|^2 \le \langle A(k)u - A(k)v, u-v \rangle,\ \forall k \in K. \quad (4)$$

Лемма 1 [5]. *Пусть* $z(x): R^1 \to R^1$, $z(x)/x \to 0$ *при* $x \to 0$, $x = x(y)$, $|x(y)| \le L|y|^{\chi}$, $\chi \ge 1$. *Тогда* $z(x(y))/y \to 0$ *при* $y \to 0$.

Лемма 2 [5]. *Пусть* $A(k)$ *– сильно монотонный оператор, функционал* $H(k,u,w)$ *дифференцируем на множестве пар* $K \times Z(K)$, *где* $Z(K) = \{v \in V \mid \|v\| \le \alpha^{-1} \| f(k) - A(k)0 \|\}$, $A(k)u$ *– отображение, дифференцируемое по* u, *оператор* $A(k)$ *и функционал* $f(k)$ *– липшицевые с коэффициентами* L_1 *и* L_2 *соответственно:*
$\| A(k)u - A(p)u \| \le L_1 \| k-p \|_B \| u \|_V$, $\| f(k) - f(p) \| \le L_2 \| k-p \|, \forall k, p \in K.$
Тогда оптимальная пара (p,v) *в задаче* 3 *удовлетворяет следующему условию: при любых* $k \in K$, *достаточно близких к* p, *выполнено неравенство* $H(p,v,w) - H(k,v,w) \ge o(\| p-k \|)$, *где* w *– решение сопряженного уравнения*

$$H'_u(p,v,w) = 0. \quad (5)$$

Из леммы 2 можно получить необходимые условия оптимальности для некоторых оптимизационных задач.

Следствие 1. *Пусть* $J(u)$ *– функционал, дифференцируемый на* $W_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$, $p \in K$ *реализует минимум функционала* $J(u)$ *на множестве* K, *а* v *– соответствующее ему решение граничной задачи* ((2),(3)). *Тогда выполнено следующее условие оптимальности:*

$$p^3(x)\Delta v(x)\Delta w(x) = \max_{\xi \in [a,b]} [\xi^3 \Delta v(x) \Delta w(x)],\ \forall x \in \Omega,$$

где w *– решение сопряженной граничной задачи*

$$\Delta\left(p^3(x)\Delta w(x)\right) = J'\left(v(x)\right),\ \forall x \in \Omega,$$

$$w|_{\partial\Omega} = \Delta w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Схему доказательства см. в [7].

Следствие 2 (*Правило Лагранжа). Пусть в задаче* 3 (p,v) *– оптимальная пара,* $(k-p)$ *– допустимое направление для точки* p, *а* w *– решение сопряженного уравнения* (5). *Тогда справедливо неравенство*

$$\langle H'_k(p,v,w), p-k \rangle \ge 0. \quad (6)$$

Если K – выпуклое множество, то неравенство (6) выполняется для любого $k \in K$. Неравенство (6) вместе с сопряженным уравнением (5) утверждает справедливость правила Лагранжа для задачи 3.

Множество $K \subset B$ называется *конусом* в пространстве B, если

$$K = \{k \in B \mid k \in K \Rightarrow \alpha k \in K, \forall \alpha \ge 0\}.$$

Следствие 3. *Пусть в задаче из примера* 2 (p_1, p_2, v) *– оптимальная тройка, а* w *– решение сопряженного уравнения* (5). Тогда

1) *если* K_2 *– конус, то* $(p_2, w) = 0$*;*

2) *если* K_2 *– выпуклое множество, то* $\langle k_2 - p_2, w\rangle \geq 0, \forall k_2 \in K_2$;

3) *если* K_2 *– выпуклый конус, то*

$$\langle k_2, w\rangle \geq 0, \forall k_2 \in K_2. \tag{7}$$

Запишем задачу из примера 3 в виде $J(u) \to \min,\ u \in U \subset V$.

Следствие 4. *Если функционал* $J(u)$ *дифференцируем на выпуклом множестве* $U \subset V$, *то для оптимального элемента* v *в задаче из примера* 3 *выполнено*

$$\langle J'(v), u - v\rangle \geq 0, \forall u \in U. \tag{8}$$

Пусть V – сепарабельное гильбертово пространство и $\langle a,b\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов a и b в этом пространстве. Следствие 3 показывает, что если w – ненулевой элемент, то p_2 – крайняя точка выпуклого множества K_2. Если w – нулевой элемент, то из сопряженного уравнения (5) получаем

$$J'_u(p, v) = 0. \tag{9}$$

В этом случае v нужно найти из уравнения (9).

Пусть $U \subset V$ – ограниченное замкнутое выпуклое множество, а в задаче из примера 2 $K_2 = \{p_2\}$ – одноэлементное множество, где p_2 – решение вариационного неравенства $\langle p_2, y - u\rangle \geq 0, \forall y \in U \subset V$. Тогда операторное уравнение $A(k_1)u = p_2$ эквивалентно вариационному неравенству $\langle A(k_1)u, y - u\rangle \geq 0, \forall y \in U \subset V$, а задача 3 становится задачей математического программирования с равновесными ограничениями в произвольном банаховом пространстве:

31. $$J(k_1, u) \to \min,\ k_1 \in K_1$$
$$\langle A(k_1)u, y - u\rangle \geq 0, \forall y \in U \subset V.$$

Следствие 5. *Оптимальная пара* (p_1, v) *в задаче* 31 *удовлетворяет следующему условию: при любых* $k_1 \in K_1$, *достаточно близких к* p_1, *выполнено неравенство* $H(p_1, v, w) - H(k_1, v, w) \geq o(\| p_1 - k_1 \|)$, *где* w *– решение сопряженного уравнения* $H'_u(p_1, v, w) = 0$.

3. Задача с функциональными ограничениями

Определим задачу

32. Пусть минимизируется функционал $J(k,u)$ на решениях уравнения состояния $A(k)u = f(k)$ при дополнительном ограничении

$$F(k,u) + z = 0. \tag{10}$$

Здесь параметр k меняется на некотором множестве K банахова пространства B, функционал F отображает пару (k,u) в банахово пространство $G,$ а $z\in Z\subset G$. Рассмотрим функционал

$$H(k,z,u,w,\lambda)=\langle A(k)u-f(k),w\rangle_V-J(k,u)+\langle\lambda,F(k,u)+z\rangle_G, \qquad (11)$$

где $\lambda\in G',\ w\in V$. Тройку (k,z,u) назовем допустимой, если $k\in K,\ u=u(k),\ z\in Z,\ F(k,u)+z=0.$

Лемма 3. *Пусть $A(k)$ – сильно монотонный оператор, $J(k,u)$ – функционал, дифференцируемый на множестве $K\times U(k)$, где*

$$U(k)=\{v\in V\,|\,\|v\|\le\alpha^{-1}\|f(k)-A(k)0\|\},$$

функционал $H(k,z,u,w,\lambda)$ дифференцируем по переменным k и u, оператор $A(k)$ и функционал $f(k)$ – липшицевые с коэффициентами L_1 и L_2 соответственно:

$$\|A(k)u-A(p)u\|\le L_1\|k-p\|\cdot\|u\|,\ \ \|f(k)-f(p)\|\le L_2\|k-p\|,\forall k,p\in K,$$

(p,d,v) – оптимальная тройка в задаче 32, *$\lambda\in G'$, а w – решение сопряженного уравнения $H'_u(p,d,v,w,\lambda)=0$. Тогда оптимальная пара удовлетворяет следующему условию: при любых $k\in K$, достаточно близких к p, выполнено неравенство*

$$H(p,d,v,w,\lambda)-H(k,z,v,w,\lambda)\ge o(\|p-k\|),\forall z\in Z. \qquad (12)$$

Доказательство. Так как тройка (p,d,v) – оптимальная, то для любой допустимой тройки (k,z,u)

$$0\le J(k,u)-J(p,v). \qquad (13)$$

С другой стороны, для допустимой тройки (k,z,u)

$$\begin{aligned}J\big(k,u\big)-J\big(p,v\big)&=\langle A(p)v-f(p),w\rangle_V-J(p,v)+\langle\lambda,F(p,v)+d\rangle_G-\\&-[\langle A(k)u-f(k),w\rangle_V-J(k,u)+\langle\lambda,F(k,u)+z\rangle_G]=\\&=H(p,d,v,w,\lambda)-H(k,z,u,w,\lambda).\end{aligned} \qquad (14)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}H(k,z,u,w,\lambda)&=H(p,d,v,w,\lambda)+\langle H'_u(p,d,v,w,\lambda),u-v\rangle+\\&+\langle H'_k(p,d,v,w,\lambda),k-p\rangle+\langle\lambda,z-d\rangle_G+o\big(\|k-p\|+\|u-v\|\big)=\\&=H(k,d,v,w,\lambda)+\langle\lambda,z-d\rangle_G+o\big(\|k-p\|\big)+o\big(\|k-p\|+\|u-v\|\big)=\\&=H(k,z,v,w,\lambda)+o\big(\|k-p\|\big)+o\big(\|k-p\|+\|u-v\|\big),\end{aligned} \qquad (15)$$

оценивая норму $\|u-v\|$ через норму $\|k-p\|$ (см. [5]), с учетом соотношений (13), (14) и леммы 1 получим неравенство (12). +

Дополнительное ограничение (10) обобщает функциональные ограничения в виде неравенств и равенств. В частности, если $K\subset B$ – выпуклое множество, а $Z\subset G$ – конус, то в условиях леммы 3 получаем:

1. $\langle H'_k(p,d,v,w,\lambda),p-k\rangle\ge 0,\forall k\in K;$

2. а) $\langle \lambda, F(p,v)\rangle_G = 0$, б) $\langle \lambda, z\rangle_G \ge 0, \forall z \in Z$.

Условие 1 – это условие стационарности функционала Лагранжа. Равенство 2а выражает условия дополняющей нежесткости. Неравенство 2б показывает, что λ принадлежит конусу, сопряженному к Z. Если G – сепарабельное гильбертово пространство и Z – множество векторов с неотрицательными компонентами, тогда Z – самосопряженный конус. В этом случае из условия 2б следует включение $\lambda \in Z$, что означает неотрицательность компонент вектора λ. В этих предположениях условия 1 и 2 отражают принцип Лагранжа (см., например, [9, с. 148] и [10, с. 47]).

Из формулы (11) для функционала H следует равенство

$$H'_z(p,d,v,w,\lambda) = \lambda. \tag{16}$$

Учитывая (16), заметим, что условия 2а и 2б вместе выражают условия оптимальности типа (8), сформулированные для минимизации функционала (11) на конусе Z (см. [9, с. 140]). Условие 1 означает запись вариационного неравенства типа (8) для задачи минимизации функционала (11) на выпуклом множестве K.

Теорема 1. *Пусть K и Z – выпуклые множества банаховых пространств B и G соответственно, а также выполнены условия леммы* 3. *Кроме того, функционал $H(k,\mathrm{z},v,w,\lambda)$ вогнут по k. Тогда для оптимальной тройки (p,d,v) в задаче* 32 *выполнено следующее условие:*

$$H(p,d,v,w,\lambda) = \max_{k\in K, z\in Z} H(k,z,v,w,\lambda).$$

Доказательство. Функционал H вогнут по (k,z). Поэтому

$$H(p+t(q-p), d+t(z-d), v,w,\lambda) \ge tH(q,z,v,w,\lambda) + (1-t)H(p,d,v,w,\lambda)$$

для любого $t \in (0,1)$. Следовательно,

$$H(p,d,v,w,\lambda) - H(p+t(q-p), d+t(z-d), v,w,\lambda) \le$$
$$\le t(H(p,d,v,w,l) - H(q,z,v,w,\lambda)).$$

Взяв в (12) $k = p+t(q-p)$, $z = d+t(z-d)$, отсюда выводим неравенство $t(H(p,d,v,w,\lambda) - H(q,z,v,w,\lambda)) \ge o(\| t(q-p) \|)$. Деля его на t и устремляя t к 0, получим $H(p,d,v,w,\lambda) - H(q,z,v,w,\lambda) \ge 0, \forall q \in K, \forall z \in Z$. +

Утверждение 1. *Пусть G – некоторое банахово пространство с конусом $Z \subset G$, и пусть в задаче* 32 $F(k,u): K \times V \to G$, $\lambda \in G'$, $z \in Z$. *Тогда если (p,d,v) – оптимальная тройка в задаче* 32, *то* $\langle \lambda, F(p,v)\rangle_G = 0$.

Доказательство. Для любого $t \ge 0$ и $(k,z) = (p,td) \in K \times Z$. Подставив эту пару в (12) получим $\langle \lambda, F(p,v)+d\rangle_G - \langle \lambda, F(p,v)+td\rangle_G \ge 0$. Следовательно, $\langle \lambda, (1-t)d\rangle_G \ge 0$ при любом $t \ge 0$. Отсюда

$$\langle \lambda, d\rangle_G = 0. \tag{17}$$

Так как $F(p,v)+d = 0$, то $\langle \lambda, F(p,v)\rangle_G = 0$. +

Утверждение 2. *Пусть G – банахово пространство, $Z \subset G$ – выпуклое множество, а в задаче 32 функционал $F(k,u): K \times V \to G$, $\lambda \in G'$. Тогда если (p,d,v) – оптимальная тройка, то*

$$\langle \lambda, d - z \rangle_G \geq 0, \forall z \in Z. \qquad (18)$$

Доказательство. Для любого $t \in [0,1]$ определим пару $(k,z) = (p, td + (1-t)z) \in K \times Z$. Подставив эту пару в неравенство (12), имеем

$$\langle \lambda, F(p,v) + d \rangle_G - \langle \lambda, F(p,v) + td + (1-t)z \rangle_G \geq 0, \forall z \in Z.$$

Следовательно, $\langle \lambda, (1-t)(d-z) \rangle_G \geq 0, \forall z \in Z.$ Поделив последнее неравенство на $1-t$, получим $\langle \lambda, d - z \rangle_G \geq 0, \forall z \in Z.$ +

Замечание 1. Используя (16), неравенство (18) запишем в виде

$$\langle H_z'(p,d,v,w,\lambda), d - z \rangle_G \geq 0, \forall z \in Z.$$

Это вариационное неравенство является необходимым условием максимума функционала (11) в точке d. Если Z – выпуклый конус, то из (17) и (18) следует, что $\langle \lambda, z \rangle_G \leq 0$, $\forall z \in Z$.

4. Эволюционные уравнения состояния

Обозначим через W и H два гильбертова пространства, через W' обозначим пространство, сопряженное к W. Предположим, что $H' = H$, $W \subset H \subset W'$. Пусть $\{u(t)\}$ – семейство отображений из отрезка $[0,T] \subset R^1$ в гильбертово пространство W, чьи производные отображают отрезок $[0,T]$ в пространство W': $u(t):[0,T] \to W$, $u'(t):[0,T] \to W'$. Множество отображений $\{u(t)\}$ образует банахово пространство [1], которое обозначим через $V = \{[0,T], W\}$. Пусть B – некоторое банахово пространство, $L(t,k,u)$ – семейство сильно монотонных операторов из W в W', т.е. удовлетворяющих неравенству

$$a \| u - v \|_W^2 \leq \langle L(t,k,u) - L(t,k,v), u - v \rangle, \ \forall u, v \in W, \qquad (19)$$

где $k \in K \subset B$. Пусть $A(k): V \to \{[0,T], W'\} \times H$,

$$A(k)u = \{u'(t) + L(t,k,u), u(0)\}.$$

Для гильбертова пространства H и элемента $u \in \{[0,T], H\}$ положим

$$\| u \|_{L_2\{[0,T],H\}} = \int_0^T \| u(t) \|_H^2 dt.$$

Определим задачу

33. $$J(k,u) = \int_0^T g(t,k,u(t))dt + \varphi(u(T)) \to \min, \ k \in K$$

$$A(k)u = \{f(k), u_0\},$$

где $u_0 \in H$ – заданный элемент, $K \subset B$, $g:[0,T]\times K\times W \to R^1, \varphi: H \to R^1$, $\varphi: H \to R^1, f(k)\in \{[0,T],W'\}$, при дополнительных функциональных ограничениях $F(t,k(t),u(t))+z(t)=0,\ t\in[0,T]$. Здесь параметр k меняется на некотором множестве K банахова пространства B, функционал $F(t,k,u)$ отображает тройку (t,k,u) в банахово пространство $G(t),\ z(t)\in Z(t)\subset G(t),.\ \ t\in[0,T]$. Аналогичную задачу без функциональных ограничений см. в [5]. Для $w\in V$ положим

$$H(k,z,u,w,\lambda)=\int_0^T[g(t,k,u(t))+\langle u'(t)+L(t,k,u(t))-f(t,k),w(t)\rangle]dt+\varphi(u(T))+$$
$$+\int_0^T\langle \lambda(t),F(t,k(t),u(t))+z(t)\rangle_G dt .$$

Утверждение 3. *Пусть* $L(t,k,u)$ *– оператор, удовлетворяющий неравенству* (19) *при всех* $k\in K$, *отображения* $\varphi(\cdot), g(t,k,\cdot), F(t,k,\cdot)$ *и* $L(t,k,\cdot)$ *дифференцируемы, функционал* $H(k,z,u,w,\lambda)$ *дифференцируем по* k, *оператор* $L(t,k,u)$ *и функционал* $f(t,k)$ *– липшицевые:*

$$\| L(t,k,u)-L(t,p,u)\|_{L_2\{[0,T],W'\}}\le L_1\|k-p\|_B\|u\|_{L_2\{[0,T],W\}},$$
$$\| f(t,k)-f(t,p)\|_{L_2\{[0,T],W'\}}\le L_2\|k-p\|_B .$$

Тогда оптимальная тройка (p,d,v) *в задаче* 33 *для любых* $z(t)\in Z(t)$, $Z(t)\subset G(t),\ t\in[0,T]$, *удовлетворяет неравенству*

$$H(p,d,v,w,\lambda)-H(k,z,v,w,\lambda)\le o(\|p-k\|_B), \qquad (20)$$

где w *– решение сопряженного уравнения*

$$-w'(t)+L'_u(t,p,v)w(t)=\ -g'_u(t,p,v(t)), \qquad (21)$$
$$w(T)=\ -\varphi'_{u(T)}(v(T)). \qquad (22)$$

О разрешимости задачи ((21),(22)) см. [1,8].

Доказательство. По предположению $A(p)v=\{f(p),u_0\}$ и

$$0\le J(k,u)-J(p,v)=H(k,z,u,w,\lambda)-H(p,d,v,w,\lambda).$$

Так же, как и в [5], можем получить оценки

$$\|u-v\|_{L_2\{[0,T],W\}}\le a^{-1}(L_2+L_1\|v\|_{L_2\{[0,T],W\}})\|k-p\|_B,$$
$$\|u(T)-v(T)\|_H\le\sqrt{2}(L_2+L_1\|v\|_{L_2\{[0,T],W\}})\|k-p\|_B .$$

Ясно, что

$$H(k,z,u,w,\lambda)=\int_0^T[g(t,k,u(t))+\langle -w'(t),u(t)\rangle+\langle L(t,k,u(t))-f(t,k),w(t)\rangle]dt+$$
$$+\varphi(u(T))+\langle u(T),w(T)\rangle-\langle u(0),w(0)\rangle+\int_0^T\langle\lambda(t),F(t,k(t),u(t))+z(t)\rangle_G dt .$$

Следовательно,

$$H(k,z,u,w,\lambda)-H(p,d,v,w,\lambda)=$$

$$=\int_0^T \langle g'_u(t,p,v(t))-w'(t)+L'_u(t,p,v)w(t),u(t)-v(t)\rangle dt+$$

$$+\langle \varphi'_{u(T)}(v(T)),u(T)-v(T)\rangle+\langle w(T),u(T)-v(T)\rangle-\langle w(0),u(0)-v(0)\rangle+$$

$$+\langle H'_k(p,d,v,w),k-p\rangle_B+o(\|k-p\|_B)+o(\|u-v\|_{L_2\{[0,T],W\}})+$$

$$+o(\|u(T)-v(T)\|_H)+\int_0^T \langle \lambda(t),z(t)-d(t)\rangle_G dt\,.$$

С помощью преобразований, аналогичных (14), и леммы 1 получим неравенство (20). +

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
2. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975.
3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
4. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
5. Исмаилов И.Г. Некоторые задачи условной оптимизации при наличии связей в виде операторных уравнений. Принцип максимума Понтрягина.// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1998. №3. С. 31–38.
6. Ладыженская О.А., Солонников В.Н., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
7. Исмаилов И.Г. Об условиях оптимальности в задачах оптимизации на решениях операторных уравнений.// Проблемы математической физики. М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 55–67.
8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения М.: Мир, 1978.
9. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.
10. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1989.