

## О ВЫЧИСЛЕНИИ РАДИУСА ОПАСНОЙ ЗОНЫ ВОКРУГ ВИХРЯ\*

### Введение.

Во многих странах существует проблема перегруженности аэропортов. Для решения этой проблемы создают системы вихревого прогноза (СВП), позволяющие повысить эффективность работы аэропорта. Цель создания СВП – это моделирование и прогнозирование движения вихревых жгутов, сходящих с крыльев самолёта, с учётом параметров движения, высоты полёта погодных условий (в особенности наличия бокового ветра). В результате такого моделирования можно определить минимальный безопасный временной или пространственный интервал для пролёта следующего самолёта.

Для этого вычисляются времена освобождения от опасных вихрей окон, расположенных вдоль траектории движения самолёта. При этом окно считается свободным от вихрей в следующих случаях:

- 1) вихрь покинул пределы окна, расширенного на радиус опасной зоны, и стал безопасным для пролетающего самолёта;
- 2) вихрь разрушился вследствие трения о воздух.

Радиус опасной зоны тонкой вихревой нити определяется как максимальный радиус окружающего её цилиндра, при котором он представляет опасность для самолёта. В данной работе исследуется оптимизационная задача, связанная с вычислением радиуса опасной зоны.

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим систему координат  $Oxyz$ , связанную с самолётом, находящимся в горизонтальном полёте. Начало координат  $O$  поместим в центр тяжести крыла. Ось  $Ox$  является продольной осью самолёта, ось  $Oy$  лежит в местной вертикальной плоскости перпендикулярно оси  $Ox$  и направлена вверх. Ось  $Oz$  перпендикулярна к осям  $Ox$ ,  $Oy$  и образует с ними правую тройку. Угол между осью  $Ox$  и вектором скорости самолёта называется углом атаки.

Тонкая вихревая нить, параллельная оси  $Ox$ , воздействует на крыло и вызывает его вращение вокруг оси  $Ox$ . Угловая скорость вращения сначала возрастает, а через некоторое время устанавливается постоянной, равной  $\omega_x$ . Влиянием вихря на киль и заднее оперение самолёта будем

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, проект № 01-01-00437.

пренебрегать. Предполагается, что  $\omega_x > 0$ , если самолёт кренится вправо. Найдём формулу для  $\omega_x$ .

Рассмотрим плоское крыло размаха  $l$ , разбиваемое плоскостью симметрии самолёта на две части: левое и правое полукрыло. В начальном положении точки крыла располагаются в плоскости  $Oxz$  и имеют координаты  $(x, 0, z)$ ,  $\tilde{L}(x) \leq |z| \leq L(x)$ ,  $x_1 \leq x \leq x_2$ , где неотрицательные функции  $L(x)$  и  $\tilde{L}(x)$  при  $z \geq 0$  задают границы контура правого полукрыла. Например, для прямоугольного крыла  $L(x) \equiv l/2$ ,  $\tilde{L}(x) \equiv 0$  (см. рис.1). Для полукрыла, имеющего форму трапеции, функции  $L(x)$  и  $\tilde{L}(x)$  - кусочно-линейные.

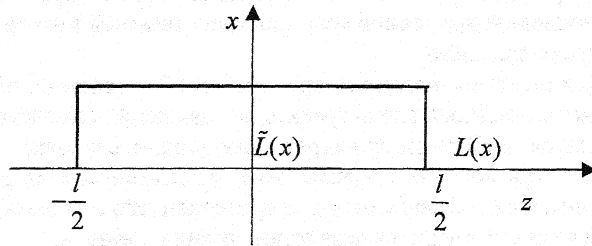


Рис.1. Вид прямоугольного крыла в плане.

Произвольная точка крыла  $(x, 0, z)$  при вращении его вокруг оси  $Ox$  имеет вектор скорости  $\Delta \vec{V}(z) = (0, \Delta V(z), 0)$ , где  $\Delta V(z) = -\omega_x z$ . Подсчитаем величину  $\Delta V(z)$  другим способом. Пусть вихрь пересекает плоскость  $Oyz$  в точке  $(0, y_0, z_0)$ . В точке  $(x, 0, z)$  такой вихрь вызывает перемещение частиц воздушной среды\* вдоль оси  $Oy$  со скоростью, равной [1, стр. 315]

$$v(z) = -\frac{\Gamma_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu^* t}}\right) (z - z_0)}{2\pi r^2} \quad (1)$$

где  $r = \sqrt{(y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  - расстояние между точками  $(x, 0, z)$  и  $(x, y_0, z_0)$ ,  $\Gamma_0$  - начальная циркуляция вихря,  $\nu^*$  - кинематический коэффициент вязкости,  $t > 0$  - текущее время «жизни» вихря. Разность скоростей частиц среды  $v(z) - v(0)$  в точках  $(x, 0, z)$  и  $(x, 0, 0)$  вызывает вращение крыла.

\*Воздушная среда предполагается вязкой и несжимаемой.

При этом

$$v(z) - v(0) = \Delta V(z) = -\omega_x z. \quad (2)$$

Умножим равенство (2) на  $z$  и проинтегрируем по площади крыла. В результате получим

$$\omega_x = \omega_x(y_0, z_0) = - \frac{\int_{x_1}^{x_2} \int_{\bar{L}(x) \leq |z| \leq L(x)} z v(z) dz dx}{\int_{x_1}^{x_2} \int_{\bar{L}(x) \leq |z| \leq L(x)} z^2 dz dx}.$$

В частности, для крыла прямоугольной формы

$$\omega_x = \omega_x(y_0, z_0) = - \frac{12}{l^3} \int_{-l/2}^{l/2} z v(z) dz. \quad (3)$$

Вихрь вызывает момент крена относительно оси  $Ox$ , который при постоянной скорости вращения  $\omega_x$  уравнивается демпфирующим моментом [2] с коэффициентом

$$m_x(\bar{\omega}_x) = m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x = m_x^{\bar{\omega}_x} \omega_x \frac{l}{2V},$$

где  $V$  – скорость движения самолёта,  $\bar{\omega}_x = \omega_x \frac{l}{2V}$  – безразмерная угловая скорость вращения, а  $m_x^{\bar{\omega}_x}$  – аэродинамическая производная коэффициента по  $\bar{\omega}_x$ . Чтобы заставить самолёт вращаться в противоположном направлении, нужно преодолеть оба этих момента и создать момент сил с удвоенным коэффициентом

$$2m_x(\bar{\omega}_x) = m_x^{\bar{\omega}_x} \omega_x \frac{l}{V}.$$

Противодействующий момент осуществляется с помощью элеронов. Элероны с углом отклонения  $\delta$  создают момент сил с коэффициентом  $m_x(\delta) = m_x^\delta \delta$ , где  $m_x^\delta$  – аэродинамическая производная коэффициента по  $\delta$ . Величины  $m_x^{\bar{\omega}_x}$  и  $m_x^\delta$  предполагаются известными.

Запишем следующее условие, при котором вихрь с координатами  $(x, y_0, z_0)$  представляет опасность для самолёта:

$$m_x^{\bar{\omega}_x} \left| \omega_x(y_0, z_0) \right| \frac{l}{V} \geq \frac{1}{2} m_x^\delta \delta_{\max},$$

где  $\delta_{\max}$  – максимальный угол отклонения элеронов. Множитель  $\frac{1}{2}$  озна-

часть двойной запас по моменту. Он необходим, поскольку лётчик не сразу реагирует на крен, а элероны не сразу создают противодействующий момент. Положим

$$f(R) = \max_{\substack{(y_0, z_0): \\ y_0^2 + z_0^2 = R^2}} |\omega_x(y_0, z_0)|. \quad (4)$$

Если выполнено неравенство

$$f(R) \geq \frac{V}{2l} \frac{m_x^\delta}{m_x^{\partial_x}} \delta_{\max}, \quad (5)$$

то цилиндр вокруг вихря радиуса  $R$  следует считать опасной зоной. Условие (5) зависит от времени  $t$ . Таким образом, цилиндр вокруг вихря радиуса  $R$ , является опасной зоной, если выполнено хотя бы одно из неравенств (5). Отсюда условие (5) будет условием опасной зоны

При заданном  $t$  определим радиус опасной зоны  $R(t)$  как максимальное  $R$ , при котором выполняется неравенство (6).

В системах вихревого прогноза основное место отводится моделированию движения вихрей, сходящих с крыла пролетающего самолёта. При этом вычисляются времена освобождения от опасных вихрей окон, расположенных вдоль траектории его движения, с целью нахождения временного и пространственного интервалов, безопасных для полёта следующего самолёта. На каждом шаге интегрирования системы дифференциальных уравнений движения вихрей требуется вычислять радиусы опасных зон вихрей, по возможности наиболее быстрым способом. В следующем параграфе рассматриваются условия, обеспечивающие аналитическое решение экстремальной задачи (4).

## 2. Исследование экстремальной задачи

С целью упрощения записей крыло будем предполагать прямоугольным и использовать формулу (3). Максимум в задаче (4) ищется по всем точкам  $(y_0, z_0)$  плоскости  $Oyz$ , лежащим на окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $(0, 0)$ . Учитывая, что  $\omega_x(-y_0, z_0) = \omega_x(y_0, z_0)$  и  $\omega_x(y_0, -z_0) = \omega_x(y_0, z_0)$ , достаточно искать максимум только по части окружности, лежащей в первой координатной четверти. Положим

$$s = s(z, z_0) = r^2 = (y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 + z^2 - 2zz_0 \geq 0, \quad a = 4v^*t > 0$$

и введём функции

$$\varphi(s) = \frac{1 - e^{-\frac{s}{a}}}{s}, \quad s > 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{a}, \quad \psi(z, z_0) = z(z - z_0)\varphi(s(z, z_0)).$$

Нетрудно проверить, что  $\varphi'(s) < 0$ ,  $\varphi''(s) > 0$  и функция  $\varphi(s)$  убывает и выпукла при  $s \geq 0$ . Задача (4) сводится к нахождению максимального и минимального значения функции  $\Phi(z_0) = \int_{-l/2}^{l/2} \psi(z, z_0) dz$  на отрезке  $[0, R]$ .

**Теорема.** При  $R \geq l/2$  функция  $\Phi(z_0)$  вогнута, её максимальное значение на отрезке  $[0, R]$  достигается в точке  $z_0 = 0$ , а минимальное - в точке  $z_0 = R$ .

*Доказательство.* Найдём производную

$$\begin{aligned} \Phi'(z_0) &= \int_{-l/2}^{l/2} \psi'_{z_0}(z, z_0) dz = - \int_{-l/2}^{l/2} z \varphi(s(z, z_0)) dz - \\ &- 2 \int_{-l/2}^{l/2} z^2 (z - z_0) \varphi'(s(z, z_0)) dz = \\ &= - \frac{l^2}{4} \left( \varphi\left(s\left(\frac{l}{2}, z_0\right)\right) - \varphi\left(s\left(-\frac{l}{2}, z_0\right)\right) \right) + \int_{-l/2}^{l/2} z \varphi(s(z, z_0)) dz. \end{aligned}$$

При  $z_0 = 0$  функция  $\varphi(s(z, z_0))$  является чётной по  $z$  и  $\Phi'(0) = 0$ . Осталось доказать, что функция  $\Phi(z_0)$  вогнута. Имеем

$$\psi''_{z_0 z_0}(z, z_0) = 4z^2 \varphi'(s) + 4z^3 (z - z_0) \varphi''(s) = \frac{4z^2}{s^2} e^{-\frac{s}{a}} \left[ \frac{(z^2 - R^2)g(s)}{s} - \frac{1}{2} \frac{s^2}{a^2} \right]$$

где  $g(s) = e^{\frac{s}{a}} - 1 - \frac{s}{a} - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^2$ .

Из неравенств  $R \geq \frac{l}{2} \geq |z|$ , вытекает, что,  $\psi''_{z_0 z_0}(z, z_0) \leq 0$ ,  $0 \leq z_0 \leq R$ , и, следовательно,

$$\Phi''(z_0) = \int_{-l/2}^{l/2} \psi''_{z_0 z_0}(z, z_0) dz \leq 0.$$

Теорема доказана.

Пусть  $R < \frac{l}{2}$ . В этом случае функция  $\Phi(z_0)$  может не быть вогнутой. Однако, мы укажем оценку для её второй производной, позволяющую установить вогнутость  $\Phi(z_0)$  при  $R$ , близких к  $\frac{l}{2}$ . Запишем вторую производную в виде

$$\Phi''(z_0) = 4 \int_{|2z| \geq R} z^2 (z^2 - R^2) \frac{g(s)}{s^3} e^{-\frac{s}{a}} dz + 4 \int_{-R}^R z^2 (z^2 - R^2) \frac{g(s)}{s^3} e^{-\frac{s}{a}} dz - \frac{2}{a^2} \int_{-1/2}^{1/2} z^2 e^{-\frac{s}{a}} dz \quad (6)$$

Оценим в (6) отдельно каждое из трёх слагаемых. Заметим, что функция  $e^{-\frac{s}{a}} - \left(1 - \frac{s}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{s}{a}\right)^3\right)$  выпукла и достигает минимума в точке  $s = 0$ . Поэтому при  $s \geq 0$

$$e^{-\frac{s}{a}} \geq 1 - \frac{s}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{s}{a}\right)^3.$$

Отсюда

$$g\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{s}{a}} = 1 - \left(1 + \frac{s}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^2\right) e^{-\frac{s}{a}} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{s}{a}\right)^3 - \frac{1}{12} \left(\frac{s}{a}\right)^4 + \frac{1}{12} \left(\frac{s}{a}\right)^5.$$

Используя это неравенство, найдём оценку сверху для первого интеграла в (6)

$$4 \int_{|2z| \geq R} z^2 (z^2 - R^2) \frac{g(s)}{s^3} e^{-\frac{s}{a}} dz \leq \frac{2}{3a^3} \int_{|2z| \geq R} z^2 (z^2 - R^2) \left[1 - \frac{s}{2a} + \frac{s^2}{2a^2}\right] dz.$$

Подставим в  $1 - \frac{s}{2a} + \frac{s^2}{2a^2}$  явное выражение для  $s = R^2 + z^2 - 2zz_0$

и отбросим слагаемые с  $z$  и  $z^3$ , поскольку соответствующие интегралы от них равны нулю. Положим

$$c_0 = 1 - \frac{R^2}{2a} + \frac{R^4}{2a^2}, \quad c_2 = \left[-\frac{1}{2a} + \frac{2z_0^2 + R^2}{a^2}\right], \quad c_4 = \frac{1}{2a^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3a^3} \int_{|2z| \geq R} z^2 (z^2 - R^2) \left[1 - \frac{s}{2a} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a}\right)^2\right] dz = \\ & = \frac{4}{3a^3} \left[ \frac{1}{3} (-R^2 c_0) \left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - R^3\right) + \frac{1}{5} (c_0 - R^2 c_2) \left(\left(\frac{l}{2}\right)^5 - R^5\right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{7} (c_2 - R^2 c_4) \left(\left(\frac{l}{2}\right)^7 - R^7\right) + \frac{1}{9} c_4 \left(\left(\frac{l}{2}\right)^9 - R^9\right) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$c_0 - R^2 c_2 = 1 - \left( \frac{4z_0^2 R^2 + R^4}{2a^2} \right), \quad c_2 - R^2 c_4 = -\frac{1}{2a} + \frac{4z_0^2 + R^2}{2a^2}.$$

Коэффициент при  $(z_0)^2$  в выражении (7) имеет вид

$$\frac{4}{3a^3} \left[ \frac{1}{5} \left( \frac{-2R^2}{a^2} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^5 - R^5 \right) + \frac{1}{7} \left( \frac{2R^2}{a^2} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^7 - R^7 \right) \right].$$

Он положителен, поскольку  $\frac{1}{7} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^7 - R^7 \right) > \frac{1}{5} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^5 - R^5 \right)$  при  $\left( \frac{l}{2} \right)^2 > \frac{7}{5}$ ,

что имеет место для всех типов самолётов. Таким образом, оценка (7) достигает максимального значения при  $z_0 = R$ . Подставим это значение в равенство (7)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3a^3} \int_{l/2 \leq |z| \leq R} z^2 (z^2 - R^2) \left[ 1 - \frac{s}{2a} + \frac{1}{2} \left( \frac{s}{a} \right)^2 \right] dz = \\ & = \frac{4}{3a^3} \left[ \frac{R^2}{3} \left( \frac{R^2}{2a} - 1 - \frac{R^4}{2a^2} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^3 - R^3 \right) + \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{5R^4}{2a^2} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^5 - R^5 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{7} \left( \frac{5R^2}{2a^2} - \frac{1}{2a} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^7 - R^7 \right) + \frac{1}{9} \frac{1}{2a^2} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^9 - R^9 \right) \right] \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в (6). Нетрудно показать, что функция

$P(s) = g(s) \frac{e^{-\frac{s}{a}}}{s^3}$  убывает при  $s \geq 0$ . Зафиксируем  $z \in \left[ -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right]$  и положим

$$s^*(z) = \max_{0 \leq z_0 \leq R} s(z, z_0) = \begin{cases} R^2 + z^2, & 0 \leq z \leq l/2, \\ (R - z)^2, & -l/2 \leq z \leq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$4 \int_{-R}^R z^2 (z^2 - R^2) P(s) dz \leq 4 \int_{-R}^R z^2 (z^2 - R^2) P(s^*(z)) dz. \quad (8)$$

Аналогично

$$-\frac{2}{a^2} \int_{-l/2}^{l/2} z^2 e^{-\frac{s}{a}} dz \leq -\frac{2}{a^2} \int_{-l/2}^{l/2} z^2 e^{-\frac{s^*(z)}{a}} dz. \quad (9)$$

Соберем вместе полученные оценки, для слагаемых из равенства (6).

$$\begin{aligned}
 \Phi''(z_0) &= 4 \int_{l/2 \leq |z| \leq R} z^2 (z^2 - R^2) \frac{g(s)}{s^3} e^{-\frac{s}{a}} dz + 4 \int_{-R}^R z^2 (z^2 - R^2) \frac{g(s)}{s^3} e^{-\frac{s}{a}} dz - \\
 &- \frac{2}{a^2} \int_{-l/2}^{l/2} z^2 e^{-\frac{s}{a}} dz \leq \\
 &\leq \frac{4}{3a^3} \left[ \frac{R^2}{3} \left( \frac{R^2}{2a} - 1 - \frac{R^4}{2a^2} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^3 - R^3 \right) + \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{5R^4}{2a^2} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^5 - R^5 \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{7} \left( \frac{5R^2}{2a^2} - \frac{1}{2a} \right) \left( \left( \frac{l}{2} \right)^7 - R^7 \right) + \frac{1}{18a^2} \left( \left( \frac{l}{2} \right)^9 - R^9 \right) \right] + \\
 &+ 4 \int_{-R}^R z^2 (z^2 - R^2) P(s^*(z)) dz - \frac{2}{a^2} \int_{-l/2}^{l/2} z^2 e^{-\frac{s^*(z)}{a}} dz. \quad (10)
 \end{aligned}$$

При малых размахах для каждого значения параметра  $l$  можно указать такое значение радиуса опасной зоны  $R^* \in (0, l/2)$ , что при любом  $R \in (R^*, l/2)$  правая часть неравенства (10) отрицательна, т.е. при  $R \in (R^*, l/2)$  функция  $\Phi(z_0)$  вогнута по  $z_0$ . Следовательно,  $z_0 = 0$  - точка её максимума, а  $z_0 = R$  - точка минимума. Аналогично определяется  $\tilde{R}$  как наименьшее  $R$ , при котором функция  $\Phi''(z_0) \leq 0$  для всех  $z_0 \in [0, R]$ . При  $a = 150$  и  $a = 200$   $\tilde{R} = 0$  при указанных в таблице размахах крыла. Расчёты показывают, что при  $a \geq 100$  и  $l \in [14, 21]$   $\tilde{R} = R^* = 0$ , т.е. оценка (14) оказывается точной и, следовательно, на классе «прямоугольных крыльев» она является неуплучшаемой. Для остальных значений размахов и  $R \in (0, R^*]$  расчёты показывают, что максимум функции  $\Phi(z_0)$  достигается также либо в точке  $z_0 = 0$ , либо в точке  $z_0 = R$ .

Правая часть неравенства (10) для каждого фиксированного размаха  $l$  является функцией двух переменных  $a$  и  $R$ . В таблице показаны те значения  $l$ , для которых при данном  $a$  целесообразно использовать неравенство (10).



Таблица 1.  $\tilde{R}$  – длина отрезка вогнутости функции  $\Phi(z_0)$  при заданных  $a$  и  $l$ ,  $R^*$  – оценка для  $\tilde{R}$ .

	a=100		a=150	a=200
$l/2$	$\tilde{R}$	$R^*$	$R^*$	$R^*$
11.0	0.0	7.2	0.0	0.0
11.5	0.0	9.3	7.2	0.0
12.0	0.0	10.4	9.3	0.0
12.5	0.0	11.2	10.4	0.0
13.0	0.0	11.9	11.2	0.0
13.5	0.0	12.6	11.9	0.0
14.0	0.0	13.2	12.6	0.0
14.5	0.0	13.9	13.2	0.0
15.0	0.0	14.4	13.9	0.0
15.5	0.0	15.0	14.4	0.0
16.0	3.0	15.6	15.0	12.5
16.5	4.5	16.1	15.6	13.8
17.0	6.0	16.7	16.1	14.7
17.5	6.5	17.2	16.7	15.6
18.0	7.0	17.7	17.3	16.4

## Литература

1. Седов Л.Н. Механика сплошной среды. т. II – М.: Наука, 1976.
2. Практическая аэродинамика манёвренных самолётов / Ред. Н.М. Лысенко.- М.: Военное издательство министерства обороны СССР, 1977.