

К.А. Карцев

ЗАДАЧА ДОПЛЕРОВСКОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ВИХРЯ

Проблема реконструкции векторного поля по измеренным доплеровским спектрам первоначально возникла как частная задача радиометеорологии, целью которой являлось определение поля скорости ветра в атмосфере по измерениям, полученным на базе непрерывных доплеровских радиолокаторов [2]. Вместе с тем подобная схема эксперимента применима для исследования более широкого круга разнообразных объектов и процессов. Возникающие при этом постановки задач имеют как ряд общих черт, так и существенные отличия от традиционной реконструктивной томографии [3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу восстановления двумерного векторного поля, которая была поставлена в [1]. Пусть D - выпуклая, ограниченная область на плоскости. $\vec{V}(x, y) = \{v_1(x, y), v_2(x, y)\}$ - векторная функция, определённая на всей плоскости, вне D тождественно равная нулю.

Рассмотрим на плоскости семейство прямых $L(p, \varphi)$: $|p| < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, заданных параметрически

$$\begin{aligned}x &= x(p, \varphi, s) = p \cos \varphi - s \sin \varphi \\y &= y(p, \varphi, s) = p \sin \varphi + s \cos \varphi, \quad |s| < \infty.\end{aligned}$$

Обозначим через \vec{k} единичный вектор, определяющий направление прямой $L(p, \varphi)$: $\vec{k} = \{-\sin \varphi, \cos \varphi\}$. На прямой $L(p, \varphi)$ введём функцию $W(p, \varphi, s)$, которая есть скалярное произведение функции $V(x(p, \varphi, s), y(p, \varphi, s))$ на вектор \vec{k} :

$$W(p, \varphi, s) = -(\sin \varphi)v_1(x(p, \varphi, s), y(p, \varphi, s)) + (\cos \varphi)v_2(x(p, \varphi, s), y(p, \varphi, s)). \quad (1)$$

Пусть $S(p, \varphi, \omega)$ - множество точек прямой $L(p, \varphi)$, которые принадлежат области D и для которых выполнено $W(p, \varphi, s) \leq \omega$. И пусть $M(p, \varphi, \omega)$ есть линейная лебегова мера множества $S(p, \varphi, \omega)$.

Ставится следующая задача: требуется определить вектор-функцию $V(x, y)$ по функции $M(p, \varphi, \omega)$, заданной для всех $|p| < \infty$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $|\omega| < \infty$.

В работе [1] было показано, что решение этой задачи неединственно.

В связи с неединственностью решения этой задачи, рассмотрим специальную модель поля. Такое сужение позволит нам перейти от общей постановки к более простой, в которой измерения проводятся вдоль конечного числа прямых.

Рассмотрим специальную модель векторного поля

$$\vec{V}(x, y) = \left\{ a(x, y) \cdot \left(-\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right), \right. \\ \left. a(x, y) \cdot \left(\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \right) \right\}. \quad (2)$$

Функция $a(x, y) = a(\bar{r})$ — радиально-симметричная относительно центра вихря, где $\bar{r} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Будем рассматривать два варианта функции $a(\bar{r})$:

$$a(\bar{r}) = \begin{cases} 0, & (\bar{r} < r) \cup (\bar{r} > R); \\ A, & \bar{r} \in [r, R]. \end{cases} \quad (3)$$

и

$$a(\bar{r}) = \begin{cases} \bar{r} \frac{A}{r}, & 0 \leq \bar{r} \leq r; \\ -\frac{A\bar{r}}{R-r} + \frac{AR}{R-r}, & \bar{r} \in [r, R]; \\ 0, & \bar{r} > R. \end{cases} \quad (3')$$

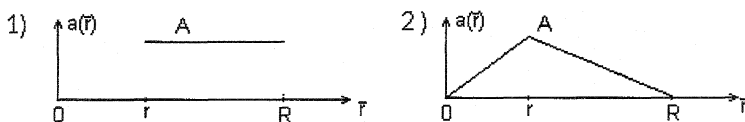


Рис. 1 Функция $a(\bar{r})$

Отметим, что знак A определяет направление вращения вихря, r, R : $0 < r < R$ — внутренний и внешний радиусы вихря.

В такой постановке векторное поле $\vec{V}(x, y)$ определяется пятью параметрами: (x_0, y_0) , r, R, A .

Рассмотрим обратную задачу. Пусть есть семейство прямых, которое определяется следующим образом: все прямые распределяются по одному или нескольким пучкам, центры которых находятся на границе области D . Каждый пучок содержит конечное число прямых (угол между прямыми постояен), как показано на рис. 2.

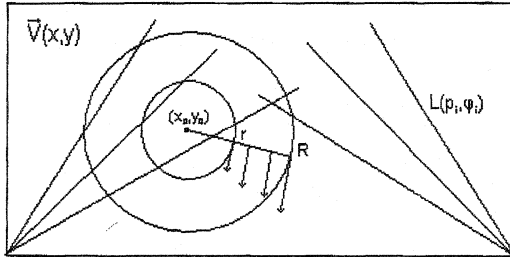


Рис. 2 Расположение прямых, вдоль которых проводятся измерения

Требуется найти все пять параметров конечномерных моделей, используя как можно меньшее число прямых из указанного семейства, вдоль которых проводятся измерения.

2. Исследование обратной задачи в случае 1-ой модели

Выведем некоторые формулы, общие для двух рассматриваемых конечномерных моделей.

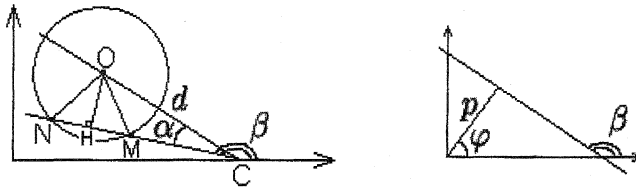


Рис. 3. Пересечение вихря прямой

Пусть точка $O(x_0, y_0)$ – центр вихря. R и r – внешний и внутренний радиусы вихря.

Рассмотрим одну из прямых измерения, пересекающую вихрь.

$C(x_c, y_c)$ – центр пучка прямых (их общая точка). $|CO| = d$ – расстояние от центра вихря до точки C . CN – одна из прямых семейства

$L(p, \varphi)$, она проходит через точку C и пересекает окружность радиуса R с центром $O(x_0, y_0)$ в точках M и N .

β – угол наклона прямой CN , $\beta \in [0; 2\pi)$. α – угол между направлением на центр вихря и прямой CN (отсчитывается от прямой CO): $\alpha = (\widehat{CO}, \widehat{CN})$, $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$. Прямая CO составляет с горизонталью угол $(\beta - \alpha)$.

Величина β и точка стрельяния $C(x_c, y_c)$ нам известны, т.к. мы выбираем их сами при измерениях. Центр вихря $O(x_0, y_0)$ определяется по формулам

$$x_0 = x_c + d \cos(\beta - \alpha), \quad y_0 = y_c + d \sin(\beta - \alpha). \quad (4)$$

Из $\triangle COH$: $\frac{|OH|}{|MH|} = \frac{d |\sin \alpha|}{\sqrt{|OM|^2 - |OH|^2}} = \frac{d |\sin \alpha|}{\sqrt{R^2 - |OH|^2}} = \frac{d |\sin \alpha|}{\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}}$. Из $\triangle MOH$: $|MH| = \sqrt{|OM|^2 - |OH|^2} = \sqrt{R^2 - |OH|^2} = \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}$. (Считаем, что точка стрельяния лежит вне вихря, и, значит, $d > R$.)

$$\Rightarrow |MN| = 2\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}$$

Из $\triangle COH$: $|CH| = d \cos \alpha$ (модуль не ставим, т.к. $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$).

$$\Rightarrow |CM| = |CH| - |MH| = d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha};$$

$$|CN| = |CH| + |MH| = d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}.$$

Координаты точек $M(x_M, y_M)$ и $N(x_N, y_N)$ вычисляются по формулам

$$x_M = x_c + |CM| \cos \beta, \quad y_M = y_c + |CM| \sin \beta;$$

$$x_N = x_c + |CN| \cos \beta, \quad y_N = y_c + |CN| \sin \beta.$$

$$M \left(x_c + \cos \beta (d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}), y_c + \sin \beta (d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}) \right)$$

$$N \left(x_c + \cos \beta (d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}), y_c + \sin \beta (d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}) \right)$$

Представим прямую CN как член семейства $L(p, \varphi)$:

$$x(p, \varphi, s) = p \cos \varphi - s \sin \varphi, \quad y(p, \varphi, s) = p \sin \varphi + s \cos \varphi.$$

$$\varphi = \beta - \pi/2; \quad \cos \varphi = \cos(\beta - \pi/2) = \sin \beta, \quad \sin \varphi = \sin(\beta - \pi/2) = -\cos \beta$$

$$\Rightarrow x(p, \beta, s) = p \sin \beta + s \cos \beta, \quad y(p, \beta, s) = -p \cos \beta + s \sin \beta$$

Найдём s_M и s_N – параметры s , соответствующие точкам M и N :

$$x_M = p \sin \beta + s_M \cos \beta = \underbrace{p \sin \beta + s_c \cos \beta}_{x_c} + \cos \beta (d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha})$$

$$\Rightarrow s_M = s_c + (d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha});$$

Аналогично

$$s_N = s_c + (d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}),$$

где s_c – значение параметра s прямой, соответствующее $(\cdot)C$.

Теперь выразим $W(p, \varphi, s)$ ($W(p, \beta, s)$).

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= (p \sin \beta + s \cos \beta - x_c - d \cos(\beta - \alpha))^2 + \\ &\quad + (-p \cos \beta + s \sin \beta - y_c - d \sin(\beta - \alpha))^2 = \\ &= (p \sin \beta + s \cos \beta - p \sin \beta - s_c \cos \beta - d \cos(\beta - \alpha))^2 + \\ &\quad + (-p \cos \beta + s \sin \beta + p \cos \beta - s_c \sin \beta - d \sin(\beta - \alpha))^2 \\ &= (\cos \beta (s - s_c) - d \cos(\beta - \alpha))^2 + (\sin \beta (s - s_c) - d \sin(\beta - \alpha))^2 \\ &= \cos^2 \beta (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \beta \cos(\beta - \alpha) + d^2 \cos^2(\beta - \alpha) + \\ &\quad + \sin^2 \beta (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \sin \beta \sin(\beta - \alpha) + d^2 \sin^2(\beta - \alpha) \\ &= (s - s_c)^2 + d^2 - 2d(s - s_c)(\cos \beta \cos(\beta - \alpha) + \sin \beta \sin(\beta - \alpha)) \\ &= (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{r}^2 = (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2$.

Из формул (1), (2) \Rightarrow

$$\begin{aligned} W(p, \beta, s) &= \cos \beta a(\bar{r}) \times \\ &\times \left(\frac{p \cos \beta - s \sin \beta - p \cos \beta + s_c \sin \beta + d \sin(\beta - \alpha)}{\bar{r}} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \beta a(\bar{r}) \left(\frac{p \sin \beta + s \cos \beta - p \sin \beta - s_c \cos \beta - d \cos(\beta - \alpha)}{\bar{r}} \right) = \\
& = \frac{a(\bar{r})}{\bar{r}} (\cos \beta \sin \beta (s_c - s) + d \cos \beta \sin(\beta - \alpha) + \\
& \quad + \sin \beta \cos \beta (s - s_c) - d \sin \beta \cos(\beta - \alpha)) = \\
& = -\frac{a(\bar{r}) d \sin \alpha}{\bar{r}}
\end{aligned}$$

В итоге получаем, что $W(p, \beta, s)$ явно не зависит от β :

$$W(s) = -\frac{a(\bar{r}) \cdot d \sin \alpha}{\bar{r}}; \quad \bar{r} = \sqrt{(s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2} \quad (5)$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить раздельно для (3) и (3').

Рассмотрим первую модель, когда функция $a(\bar{r})$ определяется формулой (3).

При пересечении прямой CN области $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$ возможны два случая:

1) Она не пересекает внутренний круг. Тогда из (5), (3) следует, что

$$W(s) = \begin{cases} \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{(s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2}}, & s \in [s_M, s_N]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2) Пересекает внутренний круг

$$W(s) = \begin{cases} \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{(s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2}}, & s \in [s_M, s_{M1}] \cup [s_{N1}, s_N]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

где

$$s_M = s_c + (d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}), \quad s_{M1} = s_c + (d \cos \alpha - \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha})$$

$$s_N = s_c + (d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}), \quad s_{N1} = s_c + (d \cos \alpha + \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}).$$

Исследуем $W(s)$. Сначала рассмотрим случай 1).

При $\alpha = 0$ $W(s) \equiv 0$ (CN прошла через точку O).

Пусть $\alpha \neq 0 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$ (т.к. $\alpha \in (-\pi/2; \pi/2)$)
 $\Rightarrow (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2 > 0$.

$$W'(s) = \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{((s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2)^3}} \cdot (-1/2) \cdot (2(s - s_c) - 2d \cos \alpha) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Ad \sin \alpha}{\sqrt{((s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2)^3}} \cdot (s - (s_c + d \cos \alpha)). \\
&\Rightarrow W'(s) = 0 \text{ при } s = s_c + d \cos \alpha \text{ (и это есть точка экстремума)} \\
W(s_c + d \cos \alpha) &= \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - 2d^2 \cos^2 \alpha + d^2}} = -\frac{A \sin \alpha}{|\sin \alpha|} = -A \operatorname{sgn}(\sin \alpha) \\
&\Rightarrow W(s_c + d \cos \alpha) = -A \operatorname{sgn} \alpha \tag{6}
\end{aligned}$$

Заметим, что функция $W(s)$ симметрична относительно точки $s = s_c + d \cos \alpha$:

$$\begin{aligned}
W(s_c + d \cos \alpha \pm s) &= \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{(d \cos \alpha \pm s)^2 - 2d(d \cos \alpha \pm s) \cos \alpha + d^2}} = \\
&= \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{d^2 \cos^2 \alpha \pm 2ds \cos \alpha + s^2 - 2d^2 \cos^2 \alpha \mp 2ds \cos \alpha + d^2}} = \\
&= \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{s^2 - d^2 \cos^2 \alpha + d^2}}.
\end{aligned}$$

На концах отрезка

$$\begin{aligned}
W(s_N) &= \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{(d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha})^2 - 2d(d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}) \cos \alpha + d^2}} = \\
&= -Ad \sin \alpha / (d^2 \cos^2 \alpha + 2d \cos \alpha \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha} + \\
&\quad + R^2 - d^2 \sin^2 \alpha - 2d^2 \cos^2 \alpha - 2d \cos \alpha \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha} + d^2)^{1/2}; \\
&\Rightarrow W(s_N) = W(s_M) = -\frac{Ad \sin \alpha}{R} \tag{7}
\end{aligned}$$

Для случая 2) аналогично имеем:

$$\begin{aligned}
W(s_M) &= W(s_N) = -\frac{Ad \sin \alpha}{R}; \\
W(s_{M1}) &= W(s_{N1}) = -\frac{Ad \sin \alpha}{r} \tag{8}
\end{aligned}$$

Найдём A .

Для определения A достаточно пересечь вихрь двумя прямыми, одна из которых пересекает внутренний круг, а другая нет. Измеряя $M(p, \varphi, \omega)$, мы всегда можем определить либо положительный максимум

функции $W(s)$, либо её отрицательный минимум. Сравнив значения этих экстремумов по модулю, определим, какая из двух выбранных прямых является прямой, не пересекающей внутренний круг (у неё модуль экстремума больше). И по взаимному расположению этих прямых определим $\text{sgn}(\alpha)$ (для каждой). И, зная $\text{sgn}(\alpha)$, из формулы (6) находим А. Т. е. в итоге имеем

$$A = -\text{sgn} \alpha \cdot \min_{\omega} \text{Arg sup } M(p, \varphi, \omega) \quad \text{для заданных } p, \varphi.$$

Далее определим положение вихря (d и $\sin \alpha$).

Для этого нужны две прямые, не пересекающие внутренний круг. Для них, с помощью третьей прямой, пересекающей внутренний круг, определяем $\text{sgn}(\alpha)$ (для каждой).

Решим уравнение $W(s) = \omega$.

$$\begin{aligned} \frac{-Ad \sin \alpha}{\sqrt{(s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2}} &= \omega \\ \Downarrow \\ (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2 - \frac{A^2 d^2 \sin^2 \alpha}{\omega^2} &= 0 \\ \Downarrow \\ (s - s_c)_{1,2} &= d \cos \alpha \pm \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha (A^2/\omega^2 - 1)} \end{aligned}$$

(это соответствует двум точкам пересечения (см. рис.))

Если $\omega < 0$, берём $M(\omega) : S(\omega) \leq \omega$. Если же $\omega > 0$, берём $M(\omega) : S(\omega) \geq \omega$. Т.е. для любой прямой, пересекающей вихрь, но не пересекающей внутренний круг, $\forall \omega$ нам известна $M(\omega) = 2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha (A^2/\omega^2 - 1)}$ (ω всегда выбираем между максимальным и минимальным допустимыми значениями).

Итак, рассматриваем две прямые, не пересекающие внутренний круг: первой соответствует α_1 , второй — α_2 . Для первой прямой находим $M_1 = 2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha_1 (A^2/\omega_1^2 - 1)}$ для некоторого допустимого ω_1 , для второй находим $M_2 = 2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha_2 (A^2/\omega_2^2 - 1)}$ для некоторого допустимого ω_2 .

$$\begin{cases} d^2 \sin^2 \alpha_1 = \frac{M_1^2}{4} / \left(\frac{A^2}{\omega_1^2} - 1 \right) \equiv C_1^2 \\ d^2 \sin^2 \alpha_2 = \frac{M_2^2}{4} / \left(\frac{A^2}{\omega_2^2} - 1 \right) \equiv C_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \sin \alpha_1 = C_1 \\ d \sin \alpha_2 = C_2 \end{cases}$$

(т.к. знаем $\text{sgn}(\alpha_1)$ и $\text{sgn}(\alpha_2)$).

Также нам известна разница углов между прямыми измерения $\beta_1 - \beta_2 = \Delta\beta$. И т.к. $\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2$, то $\beta_1 - \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\beta$.

$$\Rightarrow \begin{cases} d \sin \alpha_1 = C_1 \\ d \sin \alpha_2 = C_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\beta \end{cases} \text{ - система относительно } \alpha_1, \alpha_2, d; \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (-\pi/2; \pi/2)$$

Из системы получаем уравнение $C_2 \sin(\alpha_2 + \Delta\beta) = C_1 \sin \alpha_2$. На интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ это уравнение имеет один корень, который можно найти численно.

Покажем единственность корня. Пусть это не так и есть два корня: $\bar{\alpha}$ и $\bar{\bar{\alpha}}$; $\Delta\beta \in (0; \pi)$; $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}} \in (-\pi/2; \pi/2)$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin(\bar{\alpha} + \Delta\beta) = C \sin \bar{\alpha} \\ \sin(\bar{\bar{\alpha}} + \Delta\beta) = C \sin \bar{\bar{\alpha}} \end{cases} &\Rightarrow \frac{\sin(\bar{\alpha} + \Delta\beta)}{\sin(\bar{\bar{\alpha}} + \Delta\beta)} = \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin \bar{\bar{\alpha}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin(\bar{\alpha} + \Delta\beta) \sin \bar{\bar{\alpha}} = \sin(\bar{\bar{\alpha}} + \Delta\beta) \sin \bar{\alpha} \\ &\Rightarrow \sin \bar{\alpha} \sin \bar{\bar{\alpha}} \cos \Delta\beta + \cos \bar{\alpha} \sin \bar{\bar{\alpha}} \sin \Delta\beta = \\ &= \sin \bar{\bar{\alpha}} \sin \bar{\alpha} \cos \Delta\beta + \sin \bar{\alpha} \cos \bar{\bar{\alpha}} \sin \Delta\beta \\ &\Rightarrow \sin \Delta\beta (\sin(\bar{\alpha} - \bar{\bar{\alpha}})) = 0 \end{aligned}$$

и т.к. $\Delta\beta \in (0; \pi)$, $\Rightarrow \sin(\bar{\alpha} - \bar{\bar{\alpha}}) = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} - \bar{\bar{\alpha}} = \pi n$ - невозможно. Т.е. однозначно находим α_1, α_2, d и тем самым определяем местоположение вихря.

Нахождение R и r : Берём прямую, пересекающую внутренний круг. Т.к. центр вихря уже установлен, для этой прямой знаем d, α (и A). И из формул (7) и (8), измеряя $W(s_M)$ и $W(s_{M1})$, определяем R и r .

Выводы

Для нахождения всех параметров задачи достаточно трёх прямых, исходящих из одного источника и пересекающих вихрь следующим образом: одна пересекает внутренний круг, а две другие пересекают вихрь, но не пересекают его внутренний круг.

3. Исследование обратной задачи в случае 2-ой модели

Рассмотрим вторую модель, когда функция $a(\bar{r})$ определяется формулой (3').

Выше была получена формула (5)

$$W(s) = -\frac{a(\bar{r}) \cdot d \sin \alpha}{\sqrt{(s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2}}$$

Как и выше, введём обозначения:

$$s_M = s_c + (d \cos \alpha - \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}), s_{M1} = s_c + (d \cos \alpha - \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}),$$

$$s_N = s_c + (d \cos \alpha + \sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \alpha}), s_{N1} = s_c + (d \cos \alpha + \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}).$$

Рассмотрим два случая:

1) Прямая CN не пересекает внутренний круг. Тогда из (5), (3') следует, что

$$W(s) = \begin{cases} \frac{Ad \sin \alpha}{R-r} - \frac{ARd \sin \alpha}{(R-r)\sqrt{(s-s_c)^2 - 2d(s-s_c) \cos \alpha + d^2}}, & s \in [s_M, s_N]; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$W(s_M) = W(s_N) = 0;$$

$$\begin{aligned} W'(s) &= \frac{ARd \sin \alpha}{R-r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(s_c - s) - 2d \cos \alpha}{\sqrt{((s-s_c)^2 - 2d(s-s_c) \cos \alpha + d^2)^3}} = \\ &= \frac{ARd \sin \alpha}{R-r} \cdot \frac{s - (s_c + d \cos \alpha)}{\sqrt{((s-s_c)^2 - 2d(s-s_c) \cos \alpha + d^2)^3}} \end{aligned}$$

Экстремум достигается в точке $s = s_c + d \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} W(s_c + d \cos \alpha) &= \frac{Ad \sin \alpha}{R-r} - \frac{ARd \sin \alpha}{\sqrt{d^2 \cos^2 \alpha - 2d^2 \cos^2 \alpha + d^2}} = \\ &= \frac{Ad \sin \alpha}{R-r} - \frac{AR}{R-r} \operatorname{sgn} \alpha; \end{aligned}$$

$$W(s_c + d \cos \alpha) = \frac{A}{R-r} (d \sin \alpha - R \operatorname{sgn} \alpha) \quad (9)$$

2) Прямая CN пересекает внутренний круг

$$W(s) = \begin{cases} \frac{Ad \sin \alpha}{R-r} - \frac{ARd \sin \alpha}{(R-r)\sqrt{(s-s_c)^2 - 2d(s-s_c) \cos \alpha + d^2}}, & s \in [s_M, s_{M1}] \cup [s_{N1}, s_N]; \\ -\frac{Ad \sin \alpha}{r}, & s \in (s_{M1}, s_{N1}); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$W(s_M) = W(s_N) = 0;$$

Максимум функции $W(s)$ в этом случае достигается на $[s_{M1}, s_{N1}]$ и равен

$$W_{\max} = -\frac{Ad \sin \alpha}{r} \quad (10)$$

Определим центр вихря.

По результатам измерений меры вдоль прямой, мы можем определить, пересекает она (прямая) внутренний круг, или нет (у пересекающей внутренний круг прямой будет наблюдаться скачок меры).

Для однозначного определения положения центра вихря используем два пучка прямых (два источника). Пусть один источник расположен в точке C , другой – в точке D .

с) Берем две прямые, проходящие через точку C , пересекающие внутренний круг вихря. Из формулы (10) имеем:

$$\begin{cases} -\frac{\Delta}{r} d \sin \alpha_1 = W_1 \\ -\frac{\Delta}{r} d \sin \alpha_2 = W_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_2 \sin \alpha_1 = W_1 \sin \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \Delta\beta \end{cases}$$

где W_1 и W_2 – измерения экстремумов на прямых соответственно. Из такой системы можно однозначно найти α_1 и α_2 (было показано выше). Таким образом мы знаем направление α от источника C на центр вихря.

д) Берем две прямые, проходящие через точку D , пересекающие внутренний круг вихря. Из формулы (10) имеем:

$$\begin{cases} -\frac{\Delta}{r} d' \sin \alpha'_1 = W'_1 \\ -\frac{\Delta}{r} d' \sin \alpha'_2 = W'_2 \\ \alpha'_1 - \alpha'_2 = \Delta\beta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W'_2 \sin \alpha'_1 = W'_1 \sin \alpha'_2 \\ \alpha'_1 - \alpha'_2 = \Delta\beta' \end{cases}$$

где W'_1 и W'_2 – измерения экстремумов на прямых соответственно. Аналогичным образом нам становится известно направление α' от источника D на центр вихря.

Берём по одной из рассмотренных прямых от каждого источника. Для них из геометрических соображений:

$$\begin{cases} x_c + d \cos(\beta - \alpha) = x_D + d' \cos(\beta' - \alpha') \\ y_c + d \sin(\beta - \alpha) = y_D + d' \sin(\beta' - \alpha') \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ уже знаем. Это линейная система относительно d и d' , которые из неё и находим.

Таким образом положение центра вихря считаем определённым.

Определение остальных параметров при известном положении центра.

Рассматриваем только один источник, находящийся в точке C .

Берём прямую, пересекающую внутренний круг. Для неё из (10) и из того, что положение центра вихря уже известно, получаем

$$A = C_1 r \quad (11)$$

где C_1 – известная константа.

Теперь рассмотрим прямую, не пересекающую внутренний круг. Проведём измерения меры на уровне ω .

$$\begin{aligned} \frac{Ad \sin \alpha}{R - r} - \frac{ARd \sin \alpha}{(R - r)\sqrt{(s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2}} &= \omega \\ \Downarrow \\ (s - s_c)^2 - 2d(s - s_c) \cos \alpha + d^2 &= \left(\frac{ARd \sin \alpha}{Ad \sin \alpha - \omega(R - r)} \right)^2 \\ \Downarrow \\ s_{1,2} = s_c + d \cos \alpha \pm \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{A^2 R^2}{(Ad \sin \alpha - \omega(R - r))^2} - 1 \right)} \end{aligned}$$

Следовательно мера, измеренная на уровне ω , записывается так:

$$\begin{aligned} M &= 2 \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{A^2 R^2}{(Ad \sin \alpha - \omega(R - r))^2} - 1 \right)} \\ \Downarrow \\ A^2 R^2 &= \frac{M^2}{4d^2 \sin^2 \alpha} + 1 \end{aligned}$$

Проводя измерения на одной прямой на двух разных уровнях ω_1 и ω_2 , получим:

$$\begin{cases} AR = C_3(Ad \sin \alpha - (R - r)\omega_1) \\ AR = C_4(Ad \sin \alpha - (R - r)\omega_2) \end{cases}$$

$$\text{где } C_3 = \sqrt{\frac{M_1^2}{4d^2 \sin^2 \alpha} + 1}, \quad C_4 = \sqrt{\frac{M_2^2}{4d^2 \sin^2 \alpha} + 1}$$

$$\Rightarrow (R - r)(C_3\omega_1 - C_4\omega_2) = Ad \sin \alpha (C_3 - C_4)$$

$$R = r + \frac{Ad \sin \alpha (C_3 - C_4)}{C_3\omega_1 - C_4\omega_2} \quad (12)$$

Из (9),(11),(12) получаем систему относительно A , R и r :

$$\begin{cases} \frac{A}{R-r}(d \sin \alpha - R \operatorname{sgn} \alpha) = W_0 \\ A = C_1 r \\ R = r + \frac{Ad \sin \alpha (C_3 - C_4)}{C_3 \omega_1 - C_4 \omega_2} \end{cases}$$

из которой их и находим.

Выводы.

Для нахождения всех параметров задачи достаточно двух источников: двух прямых от одного источника, пересекающих внутренний круг вихря, и трех прямых от другого источника, две из которых пересекают внутренний круг, а одна не пересекает.

4. Численное решение задачи для 1-ой модели вихря

Для этой модели было доказано, что для разрешения задачи достаточно одного пучка, состоящего из трёх прямых, две из которых должны пересекать вихрь, не пересекая внутреннего круга, а третья именно пересекать внутренний круг. При этом вопрос устойчивости решения не рассматривался.

На практике оказалось, что решение задачи с использованием одного пучка прямых сильно неустойчиво, и был реализован метод, использующий большее количество прямых, по которым проводятся измерения. Рассмотрим его алгоритм.

Поиск первого приближения

Берем два пучка прямых, расположенных на границе области, в которой ищется вихрь. Из каждого пучка "пускаем" прямые с некоторым фиксированным углом $\Delta\varphi$ (параметр счёта). Фиксируем те из них (прямые), на которых получены ненулевые значения меры. Таким образом, для двух пучков имеем два набора прямых L_{1i} и L_{2i} , которые пересекают вихрь. За начальное приближение для точки центра вихря (x_0, y_0) берем точку пересечения "средних" прямых из каждого пучка.

За начальное приближение для R выбирается, исходя из максимального угла между прямыми, пересекающими вихрь, и начального приближения для его центра. За начальное приближение для r берем $R/2$.

Затем для каждой из зафиксированных прямых ищутся пределы по ω , в которых мера $M(p, \varphi, \omega)$ остаётся ненулевой. (Это делается перебором значений ω с заданным фиксированным шагом $\Delta\omega$, который также есть параметр счёта.) Исходя из этих пределов определяется, какие прямые

пересекают внутренний круг, а какие нет. Прямые, не пересекающие внутренний круг вихря, имеют один и тот же максимальный предел обнуления функции $M(p, \varphi, \omega)$ по ω , превосходящие аналогичные пределы для прямых, пересекающих внутренний круг (это следует из формул (6) и (8)).

Для прямых, не пересекающих внутренний круг, верхний предел по ω больше, чем для пересекающих, и равен по модулю A . Поэтому за первое приближение для A берется верхний предел обнуления $M(p, \varphi, \omega)$ по ω по одной из прямой, не пересекающих внутренний круг вихря (а точнее среднее таких значений по всем прямым, не пересекающим внутренний круг вихря).

Дальнейшее определение значений параметров

Дальнейшее уточнение ищется методом наименьших квадратов с простым перебором значений параметров в некоторой окрестности начального приближения.

Для участия в этом процессе берутся все прямые от двух источников, пересекающие вихрь. На каждой из этих прямых берется по три значения ω и соответствующие им значения мер $M(p, \varphi, \omega)$. Для каждой прямой, не пересекающей внутренний круг вихря, $M(\omega) = 2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha (A^2/\omega^2 - 1)}$ для каждого рассматриваемого ω . Для прямых, пересекающих внутренний круг вихря $M(\omega) = 2\sqrt{d^2 \sin^2 \alpha (A^2/\omega^2 - 1)} - 2\sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}$. По сумме квадратов невязок для всех прямых и всех ω определяем значения параметров A , x_0 и y_0 , для которых эта сумма минимальна. Подбор значений параметров осуществляется с некоторым фиксированным шагом для каждого из параметров. Шаг и пределы изменения параметров выбирались из соображений баланса между точностью решения задачи и эффективностью (скоростью) счёта. Подбор параметров осуществляется в два этапа: сначала с более крупным шагом, а потом вокруг полученного приближения с более мелким шагом.

Как видно из формул, минимизация ведется по четырем параметрам: A , r , x_0 и y_0 ($d = \sqrt{(x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2}$, $\sin \alpha = \sin(\varphi + \pi/2 - \arctan((y_0 - y_c)/(x_0 - x_c)))$, где (x_c, y_c) – центр пучка прямых).

Оставшийся параметр R определяем из соотношений $W_{min} = -\frac{Ad \sin \alpha}{R}$ для любой из рассматриваемых прямых.

Результаты счёта

В процессе численного эксперимента использовалась следующая модель. В качестве прямоугольной области D взяли квадрат $[0, 100] \times [0, 100]$. Первый источник поместили в точку $(0, 0)$, второй --- в точку $(88, 0)$.

При разных значениях параметров были получены следующие результаты:

Table 1: Результаты для 1-ой модели

	x_0	y_0	A	R	r	$\Delta\varphi$	$\Delta\omega$
Заданные значения	20	60	10	12	4	0.1	0.3
Посчитанные значения	19.68	60.21	9.95	12.16	3.93	---	---
Заданные значения	20	60	10	12	4	0.03	0.3
Посчитанные значения	19.93	60.35	9.95	12.05	4.57	---	---
Заданные значения	20	60	10	12	4	0.1	0.1
Посчитанные значения	19.68	60.21	9.95	12.16	3.93	---	---
Заданные значения	20	60	10	12	4	0.03	0.1
Посчитанные значения	19.93	60.35	9.93	12.05	3.77	---	---
Заданные значения	40	30	-5	9	6	0.03	0.3
Посчитанные значения	40.02	29.90	-5.15	8.92	7.24	---	---
Заданные значения	40	30	-5	16	6	0.03	0.3
Посчитанные значения	40.80	30.30	-4.95	16.02	6.34	---	---
Заданные значения	40	30	-5	16	9	0.03	0.3
Посчитанные значения	40.82	30.30	-4.95	16.02	9.54	---	---
Заданные значения	80	80	-5	12	5	0.03	0.1
Посчитанные значения	80.37	80.52	-4.95	12.15	5.38	---	---

Можно сделать следующие выводы:

Координаты центра вихря x_0 и y_0 находятся с точностью, не зависящей от других параметров задачи. Все параметры, кроме r находятся с хорошей точностью. Недостаточная точность нахождения r связана с методом решения.

5. Численное решение задачи для 2-ой модели вихря

Для этой модели было доказано, что для разрешения задачи достаточно двух пучков, один из которых состоял бы из трёх прямых (двух пересекающихся внутренний круг и одной нет), а второй из двух прямых (обе пересекающие внутренний круг).

Рассмотрим алгоритм решения этой задачи:

Поиск первого приближения

Первое приближение для центра вихря ищется абсолютно аналогично предыдущей модели. Берем два пучка прямых, расположенных на границе области, в которой ищется вихрь. Из каждого пучка "пускаем" прямые с некоторым фиксированным углом $\Delta\varphi$ (параметр счёта). Фиксируем те из них (прямые), на которых получены ненулевые значения измеряемой меры. За начальное приближение для точки центра вихря (x_0, y_0) берем точку пересечения "средних" прямых из каждого пучка.

Внешний радиус вихря находим из информации о начальном приближении для центра и о прямых от одного источника, которые пересекают вихрь (геометрически). Первое приближение для внутреннего радиуса находим по формуле $r = R/2$.

Первое приближение для параметра A можно определить из формулы (10), взяв начальные приближения для других параметров.

Затем для каждой из зафиксированных прямых ищутся пределы по ω (верхние, т.к. нижние всегда нулевые), в которых мера $M(p, \varphi, \omega)$ остаётся ненулевой. (Это делается перебором значений ω с заданным фиксированным шагом $\Delta\omega$, который также есть параметр счёта.)

Дальнейшее определение значений параметров

Уточнение всех параметров задвчи ведется методом наименьших квадратов, где параметры подбираются перебором и подставляются в формулу для меры

$$M = 2 \sqrt{d^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{A^2 R^2}{(Ad \sin \alpha - \omega(R-r))^2} - 1 \right)}$$

и минимизируется невязка разницы суммы квадратов мер для разных ω и прямых, полученных измерениями и результатом подстановки параметров в приведенную формулу.

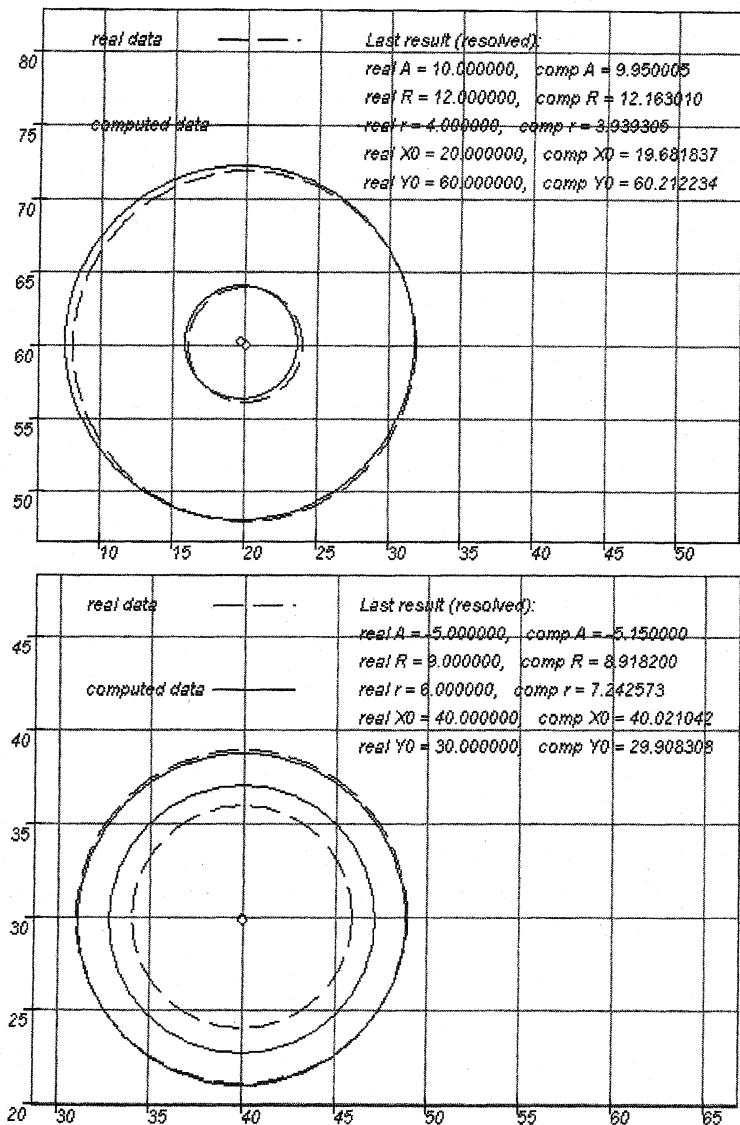


Рис. 4 Примеры результатов для 1-ой модели (1,2,5)

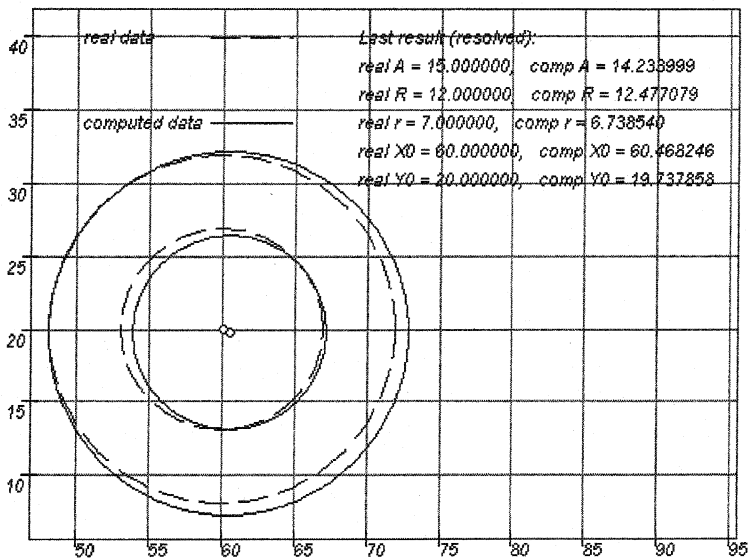
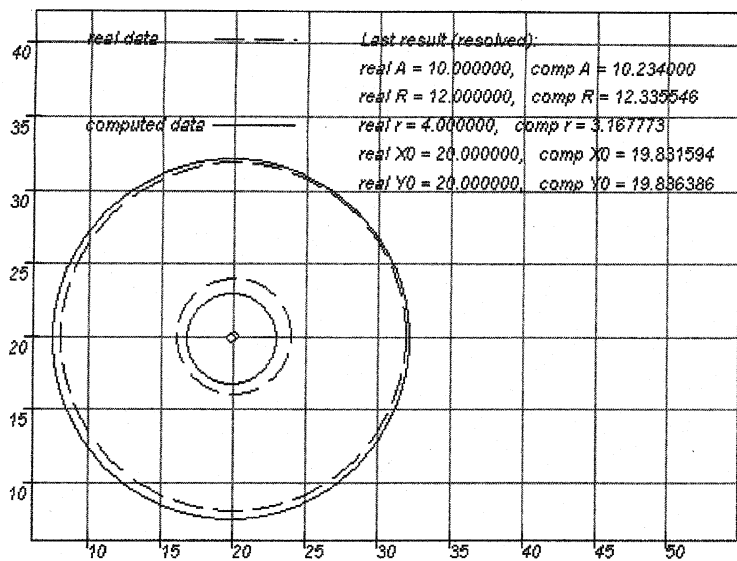


Рис. 5 Примеры результатов для 2-ой модели (1,4)

Процесс счёта

В процессе численного эксперимента использовалась следующая модель. В качестве прямоугольной области D взяли квадрат $[0, 100] \times [0, 100]$. Первый источник поместили в точку $(0, 0)$, второй – в точку $(88, 0)$. При разных значениях параметров были получены следующие результаты:

Table 2: Результаты для 2-ой модели

	x_0	y_0	A	R	r	$\Delta\varphi$	$\Delta\omega$
Заданные значения	20	20	10	12	4	0.1	0.1
Посчитанные значения	19.83	19.83	10.23	12.34	3.17	---	---
Заданные значения	20	20	10	12	4	0.1	0.5
Посчитанные значения	19.83	19.84	10.23	12.34	3.17	---	---
Заданные значения	60	20	15	12	7	0.1	0.1
Посчитанные значения	58.62	21.11	15.23	12.24	7.62	---	---
Заданные значения	60	20	15	12	7	0.03	0.1
Посчитанные значения	60.47	19.74	14.23	12.48	6.74	---	---

Можно сделать следующие выводы:

В целом результат приближения несколько хуже, чем для первой модели, хотя нестабильности по каким-то отдельно взятым параметрам не наблюдается.

Литература

1. Денисов А.М., Попов А.А. Двумерная задача доплеровской томографии. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т.36. N 2. С.126-133.
2. Горелик А.Г., Стерлядкин В.В. Доплеровская томография в радиолокационной метеорологии. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. 26, N 1. С.47-54.
3. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. М., 1990.