

Раздел I. Математическое моделирование

Е.С. Комарова, В.А. Трофимов, М.В. Федотов

ПРОХОЖДЕНИЕ МАЛОПЕРИОДНОГО ФЕМТОСЕКУНДНОГО ИМПУЛЬСА ОПТИЧЕСКИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ*

1. Введение

Взаимодействие фемтосекундных (малопериодных) импульсов со средой представляет собой одну из актуальных проблем лазерной физики [1-9]. Это связано, по крайней мере, с двумя обстоятельствами. Во-первых, их малая длительность позволяет изучать различные сверхбыстрые процессы. Во-вторых, как правило, они высокоинтенсивные (их электрическое поле превосходит внутриатомное), и для таких импульсов электрическое поле атома является возмущением. Имеются также и другие специфические черты, присущие только этим импульсам. Так, например, отклик среды зависит от абсолютной фазы малопериодного фемтосекундного импульса. Если длительность импульса не превышает некоторого критического значения, то отклик среды происходит на собственной частоте среды даже при условии, что частота оптического излучения достаточно далека от нее. Имеют место и гистерезисные зависимости наиболее яркой спектральной амплитуды отклика среды от амплитуды воздействующего импульса (эти явления изучались, в частности, в [10-11]). Для малопериодного импульса становится несправедливым [12] широко используемая модель Дуффинга для описания отклика среды. Более того, при распространении малопериодного оптического импульса в среде с насыщающимся потенциалом возможно появление высокочастотных субимпульсов, которые могут иметь солитонную форму [13].

Существенное влияние оказывает абсолютная фаза малопериодного оптического импульса и на генерацию третьей гармоники в среде с кубичной нелинейностью [14-16]. При этом даже возможно появление отклика на четных частотах [16], что не имеет место для достаточно длинных оптических импульсов.

Фемтосекундные оптические импульсы, в том числе и малопериодные импульсы, проявляют новые особенности при взаимодействии с на-

* Работа выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда (проект 14-21-00081)

веденными временными периодическими структурами (так называемыми, временными фотонными кристаллами [17]). Для анализа этого взаимодействия, в частности, в линейном случае, разрабатываются новые подходы [18,19].

Новые закономерности взаимодействия электромагнитной волны появляются также, если поперечный размер среды становится меньшим, чем ее длина волны [20-22]. В этом случае аномально возрастает поглощение энергии электромагнитной волны, если среда обладает поглощением. Поэтому анализ взаимодействия малопериодных импульсов, относящихся к различному частотному диапазону (оптическому, терагерцовому, микронному) с веществом, является актуальным.

В настоящей работе анализируются закономерности взаимодействия малопериодного импульса с оптически тонкой как прозрачной, так и поглощающей средой. Рассмотрение проводится в рамках 1D уравнений Максвелла с использованием компьютерного моделирования на основе численных методов, предложенных в [23-26].

2. Постановка задачи

Распространение лазерного импульса в одномерном случае описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial z} - \sigma_E E, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial z}, \quad D = \varepsilon E, \quad 0 < z \leq L_z, \quad 0 < t \leq L_t \quad (1)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$E|_{z=0} = H|_{z=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq L_t, \quad E|_{t=0} = E_0(z), \quad H|_{t=0} = H_0(z), \quad 0 \leq z \leq L_z. \quad (2)$$

Выше $E(z,t)$ – нормированная напряженность электрического поля, $H(z,t)$ – напряженность магнитного поля, ε – диэлектрическая проницаемость среды, σ_E – электропроводность среды, t – нормированное время, z – координата, вдоль которой распространяется оптическое излучение. Параметры L_z и L_t равны соответственно длине среды и максимальному значению времени, в течение которого анализируется распространение оптического излучения.

Схема распространения фемтосекундного импульса в среде изображена на рис. 1. Начальное распределение импульса задается в среде с диэлектрической проницаемостью ε_l и с электрической проводимостью σ_l . Центр импульса находится в сечении z_0 . В сечении z_n начинается слой

(пластина) толщиной d , с диэлектрической проницаемостью ε_2 и проводимостью σ_2 . В сечении z_n+d начинается подложка с диэлектрической проницаемостью ε_3 и проводимостью σ_3 , которая простирается до сечения L_z .

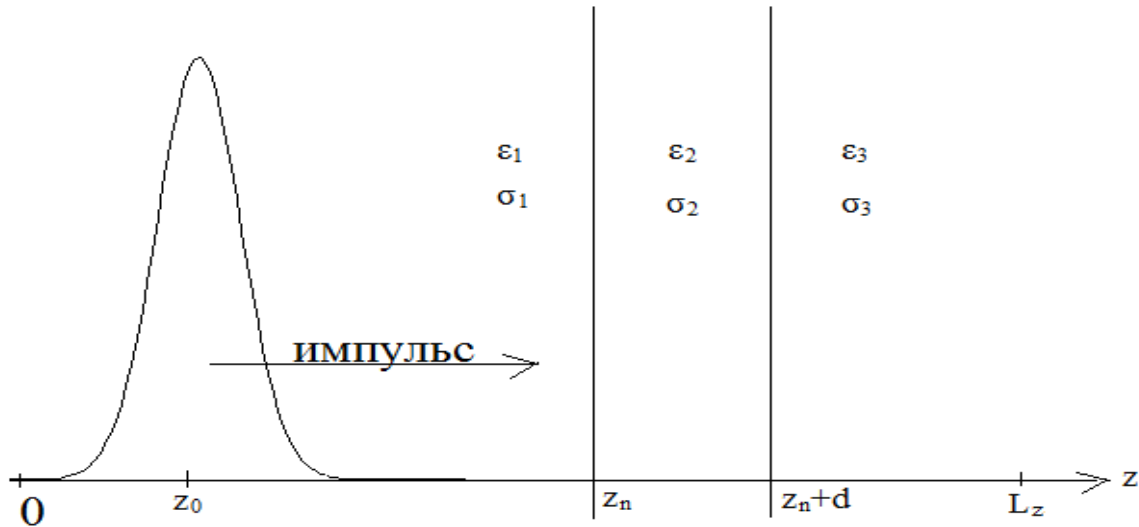


Рис.1. Схема распространения фемтосекундного импульса.

Система уравнений (1) обладает следующими инвариантами (законами сохранения) в случае среды без поглощения ($\sigma_E = 0$):

$$I_E = \int_0^{L_z} \varepsilon E dz, \quad I_H = \int_0^{L_z} H dz \quad (3)$$

- для среды с произвольным распределением диэлектрической проницаемости по пространственной координате и

$$I_{EH} = \int_0^{L_z} \varepsilon E H dz, \quad I_\varepsilon = \int_0^{L_z} \frac{(\varepsilon E^2 + H^2)}{2} dz \quad (4)$$

- для среды с однородным распределением диэлектрической проницаемости по пространственной координате.

Для практики представляет интерес изучение доли отраженной (R), прошедшей (T) и поглощенной (A) энергии оптического излучения в зависимости от параметров его взаимодействия со средой. Они рассчитываются по формулам:

$$R(t) = \frac{\int_0^{z_n} (\varepsilon E^2 + H^2) dz}{\int_0^{L_z} (\varepsilon E^2 + H^2) dz \Big|_{t=0}}, \quad T(t) = \frac{\int_{z_n+d}^{L_z} (\varepsilon E^2 + H^2) dz}{\int_0^{L_z} (\varepsilon E^2 + H^2) dz \Big|_{t=0}}, \quad A(t) = 1 - R(t) - T(t). \quad (5)$$

Знаменатель этих выражений представляет собой начальную энергию импульса. Аналогичные выражения рассматриваются также относительно только электрического поля:

$$R_E(t) = \frac{\int_0^{z_n} \varepsilon E^2 dz}{\int_0^{L_z} \varepsilon E^2 dz \Big|_{t=0}}, T_E(t) = \frac{\int_0^{z_n+d} \varepsilon E^2 dz}{\int_0^{L_z} \varepsilon E^2 dz \Big|_{t=0}}, A_E(t) = 1 - R_E(t) - T_E(t). \quad (6)$$

Важно также знать изменение спектра электрического поля и его индукции, которые рассчитываются следующим образом:

$$E_\omega(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(z, t) e^{-i\omega z} dz, D_\omega(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon E(z, t) e^{-i\omega z} dz. \quad (7)$$

Фурье спектры используются как для контроля энергии, сконцентрированной в электрическом поле, используя равенство Парсеваля:

$$\int |E(z, t)|^2 dz = \frac{1}{2\pi} \int |E_\omega(\omega, t)|^2 d\omega, \quad (8)$$

так и для контроля выбора шага сетки разностной схемы по спектральному распределению электромагнитного поля: спектральная яркость ($|E_\omega(\omega, t)|^2$) высокочастотных гармоник должна равняться нулю с целью правильного описания происходящих в среде процессов.

3. Разностная схема.

Введем в области $[0, L_z] \times [0, L_t]$ равномерные сетки $\Omega = \omega_z \times \omega_t$, $\tilde{\Omega} = \tilde{\omega}_z \times \tilde{\omega}_t$ с шагами h и τ соответственно по пространственной координате и времени:

$$\omega_z = \left\{ z_i = ih; i = \overline{0, N_z}; h = \frac{L_z}{N_z} \right\}, \tilde{\omega}_z = \left\{ \tilde{z}_i = (i + 0.5)h; i = \overline{0, N_z}; h = \frac{L_z}{N_z} \right\}, \quad (9)$$

$$\omega_t = \left\{ t_j = j\tau; j = \overline{0, N_t}; \tau = \frac{L_t}{N_t} \right\}, \tilde{\omega}_t = \left\{ \tilde{t}_j = (j + 0.5)\tau; j = \overline{0, N_t}; \tau = \frac{L_t}{N_t} \right\}.$$

Определим сеточные функции: E_h на Ω , H_h на $\tilde{\Omega}$, ε_h и σ_h на ω_z :

$$E_{h,i,j} = E_h(z_i, t_j), \quad H_{h,i,j} = H_h(\tilde{z}_i, \tilde{t}_j),$$

$$\varepsilon_{h,i} = \varepsilon_h(z_i) = \begin{cases} \varepsilon_1, 0 \leq i < i_{d_1}, \\ 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), i = i_{d_1}, \\ \varepsilon_2, i_{d_1} < i < i_{d_2}, \\ 0.5(\varepsilon_2 + \varepsilon_3), i = i_{d_2}, \\ \varepsilon_3, i_{d_2} < i \leq N_z, \end{cases} \quad (10)$$

$$\sigma_{h,i} = \sigma_h(z_i) = \begin{cases} \sigma_1, 0 \leq i < i_{d_1}, \\ 0.5(\sigma_1 + \sigma_2), i = i_{d_1}, \\ \sigma_2, i_{d_1} < i < i_{d_2}, \\ 0.5(\sigma_2 + \sigma_3), i = i_{d_2}, \\ \sigma_3, i_{d_2} < i \leq N_z, \end{cases}$$

где $i_{d_1} = \frac{z_n}{h}$ и $i_{d_2} = \frac{z_n + d}{h}$. В дальнейшем для краткости опустим индекс h для сеточных функций (10). Схематично точки определения сеточных функций изображены на рис. 2.

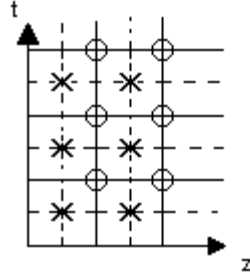


Рис.2. Схематичное изображение точек задания сеточных функций. Прямые линии изображают целые значения узлов сетки, а пунктирные — их полуцелые. Сеточные функции E задаются в точках O , а сеточная функция H в точках X .

Разностная схема для исходной системы уравнений (1) имеет вид:

$$\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h} + \varepsilon_{i+1} \frac{E_{i+1,j+1} - E_{i+1,j}}{\tau} + \sigma_{i+1} \left(\frac{E_{i+1,j+1} + E_{i+1,j}}{2} \right) = 0, \\ \frac{E_{i+1,j+1} - E_{i,j+1}}{h} + \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\tau} = 0, \quad i = 0 \div (N_z - 1), \quad j = 0 \div (N_t - 1). \quad (11)$$

В начальный момент времени сеточные функции задаются в виде:

$$E(z_i, t_0) = E_{i,0}, \quad H(z_i, t_0) = H_{i,0}, \quad i = \overline{0, N_z}, \quad (12)$$

при этом $E_{i,0} = H_{i,0}$.

На каждом слое по времени контролировались разностные аналоги законов сохранения (3,4). Ввиду нулевых граничных условий, слагаемые с $E_{0,j}$, $E_{N_z,j}$, $H_{0,j}$, $H_{N_z,j}$ в соответствующих суммах можно опустить:

$$I_{Ej} = h \sum_{i=1}^{N_z-1} \varepsilon_{i,j} E_{i,j}, \quad (13)$$

$$I_{Hj} = h \sum_{i=1}^{N_z-1} H_{i,j}, \quad (14)$$

$$I_{EHj} = h \sum_{i=1}^{N_z-1} \varepsilon_{i,j} E_{i,j} H_{i,j}, \quad (15)$$

$$I_{\varepsilon j} = \frac{1}{2} h \sum_{i=1}^{N_z-1} (\varepsilon_{i,j} E_{i,j}^2 + H_{i,j}^2) \quad (16)$$

при $j = \overline{0, N_t}$.

Спектр электрического поля и его индукции рассчитывается следующим образом:

$$E_{\omega}(\omega_j, t_j) = \sum_{k=0}^{N_z-1} E_{k,j} e^{-\frac{2\pi ijk}{N_z} z_{k,j}}, \quad D_{\omega}(\omega_j, t_j) = \sum_{k=0}^{N_z-1} \varepsilon_k E_{k,j} e^{-\frac{2\pi ijk}{N_z} z_{k,j}} \quad j = \overline{0, N_t}, \quad (17)$$

где i означает мнимую единицу, $\omega_j = \frac{2\pi j}{L_z}$ – частота пространственной гармоники. Подчеркнем еще раз, что в процессе расчетов контролировалась спектральная яркость $|E_{\omega}(\omega_j, t_j)|^2 = \text{Re}(E_{\omega}(\omega_j, t_j))^2 + \text{Im}(E_{\omega}(\omega_j, t_j))^2$ гармоники с наибольшей частотой, значение которой равно $\frac{\pi N_z}{L_z}$, что соответствует половине частотного интервала, поскольку его вторая половина располагается симметрично относительно нулевой частоты.

В случае распространения оптического импульса с достаточно большой длительностью в среде без поглощения его энергии ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) справедливы законы Снеллиуса. Тогда коэффициент отражения волны по амплитуде на первой границе раздела двух сред может быть вычислен по формуле:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right)^2.$$

Такое же значение коэффициента отражения можно получить, воспользовавшись формулой (6).

4. Результаты компьютерного моделирования

Компьютерное моделирование распространения электромагнитного поля проводилось в области $L_z=1000$ вплоть до момента времени, равного $L_t=500$. В начальный момент времени задается Гауссов импульс электромагнитного поля:

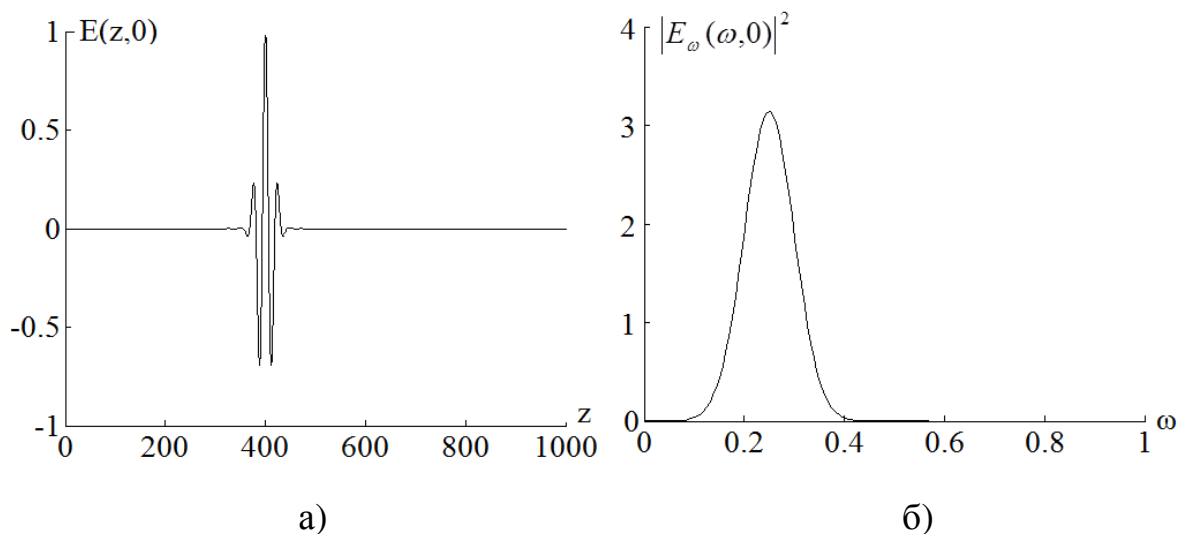
$$E_{i,0} = e^{-((z_i-z_0)/a)^2} \cos(\omega(z_i - z_0)), \quad (17)$$

$$H_{i,0} = e^{-((z_{i+0,5}-z_0)/a)^2} \cos(\omega(z_{i+0,5} - z_0)), \quad i = \overline{0, N_z},$$

где параметр $a = 20$ обозначает длительность лазерного импульса. Параметр ω обозначает несущую частоту волнового пакета, которая выбиралась равной $\omega=0.25; 1.0$. Начальное положение центра оптического импульса задано в сечении $z_0 = 400$.

4.1. Прозрачный слой

В этом случае распространение оптического излучения описывается уравнениями (1) с $\sigma_E = 0$. Диэлектрическая проницаемость среды вне слоя выбиралась равной $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$. Внутри слоя, начинающегося в сечении $z_n=500$, диэлектрическая проницаемость равна $\epsilon_2=2.5$. Начальный импульс и его спектр показаны на рис. 3. Зависимость прошедшей и отраженной энергии от толщины слоя приведена на рис. 4. На нем хорошо видна не-монотонная зависимость этих характеристик от толщины слоя. Причем,



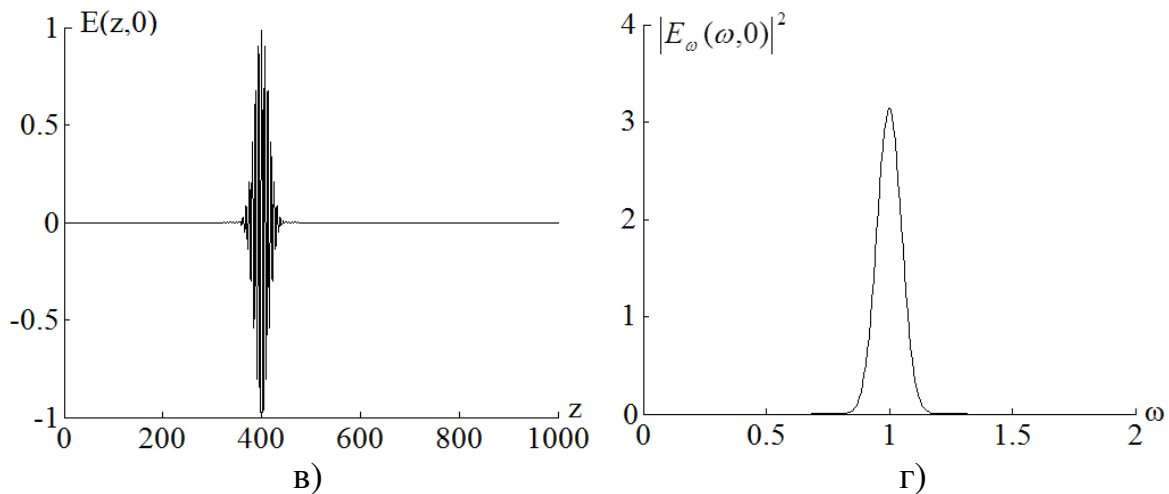


Рис. 3. Начальный импульс (а, в) и его спектр (б, г) для импульса с несущей частотой $\omega=0.25$ (а, б), 1.0 (в, г).

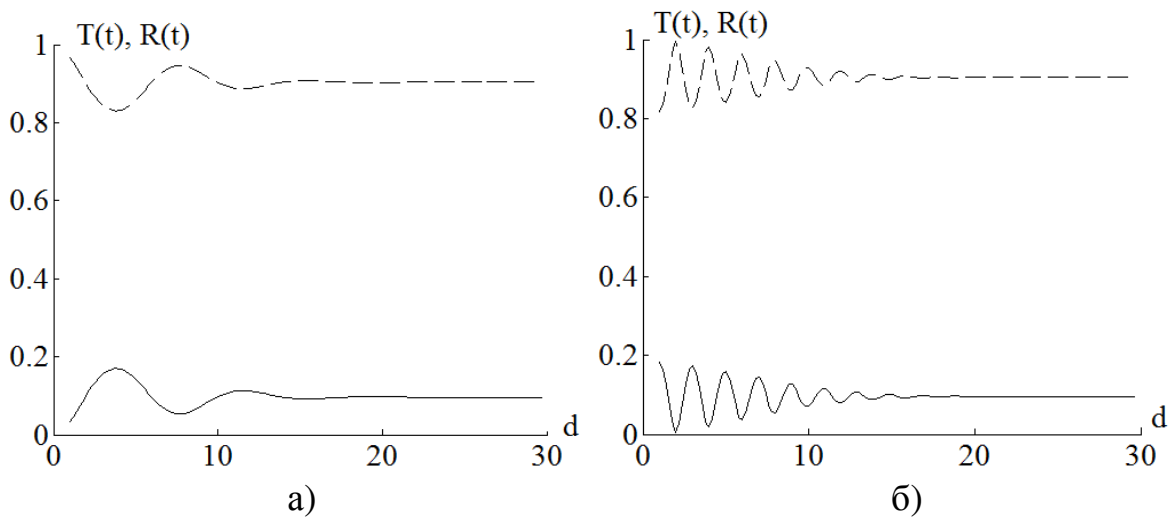


Рис. 4. Зависимость прошедшей энергии (пунктир) и отраженной энергии (сплошная кривая) от толщины пластины для импульса с несущей частотой $\omega = 0.25$ (а), 1.0 (б).

для импульса с частотой $\omega = 1.0$ возможна полная прозрачность слоя: световая энергия полностью проходит через слой. Если же толщина слоя превышает некоторое значение, которое зависит от частоты, то коэффициенты отражения световой энергии и прошедшей через слой энергии выходят на стационарное значение.

На рис. 5 показан профиль импульса с несущей частотой $\omega=0.25$ после его взаимодействия с пластиной различной толщины. Как видно из рисунка, при достаточно протяженной (толщина более 10 единиц) пластине, отраженный импульс состоит из нескольких отстоящих друг от друга субимпульсов. Затем они сливаются с уменьшением ее толщины, а потом (при $d = 5$) формируется один отраженный импульс с несимметричной формой. Следовательно, у него изменяется абсолютная фаза. Та-

ким образом, используя отражение малопериодного импульса от тонкой пластины, можно формировать импульсы с заданной абсолютной фазой, что представляет большой интерес для практики.

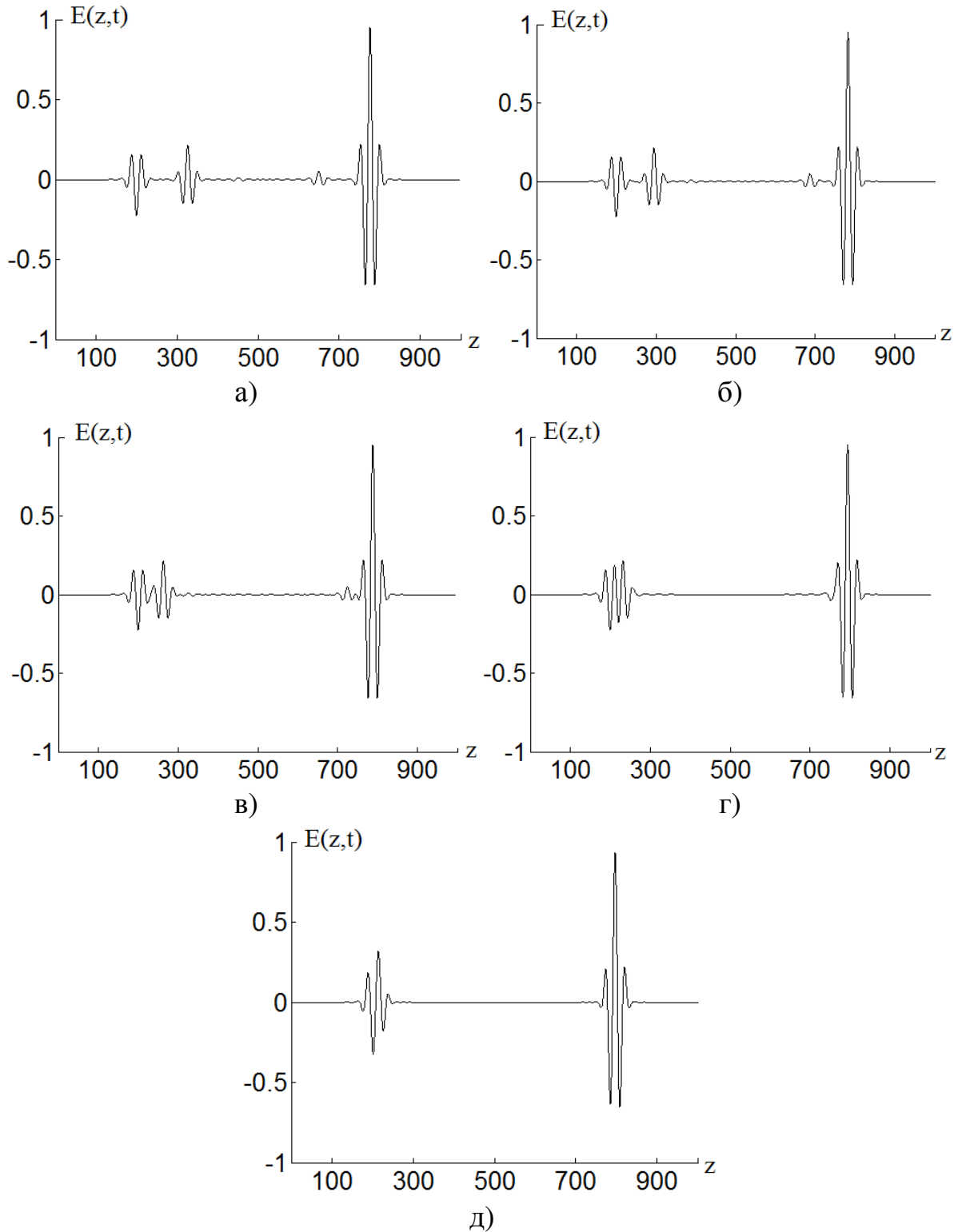


Рис. 5. Профиль импульса с несущей частотой $\omega=0.25$ после его взаимодействия со слоем толщиной $d= 40(a), 30(б), 20(в), 10(г), 5(д)$.

На рис. 6 изображена эволюция формы импульса с несущей частотой $\omega=0.25$ и его спектра во времени. Из рисунка следует, что сначала

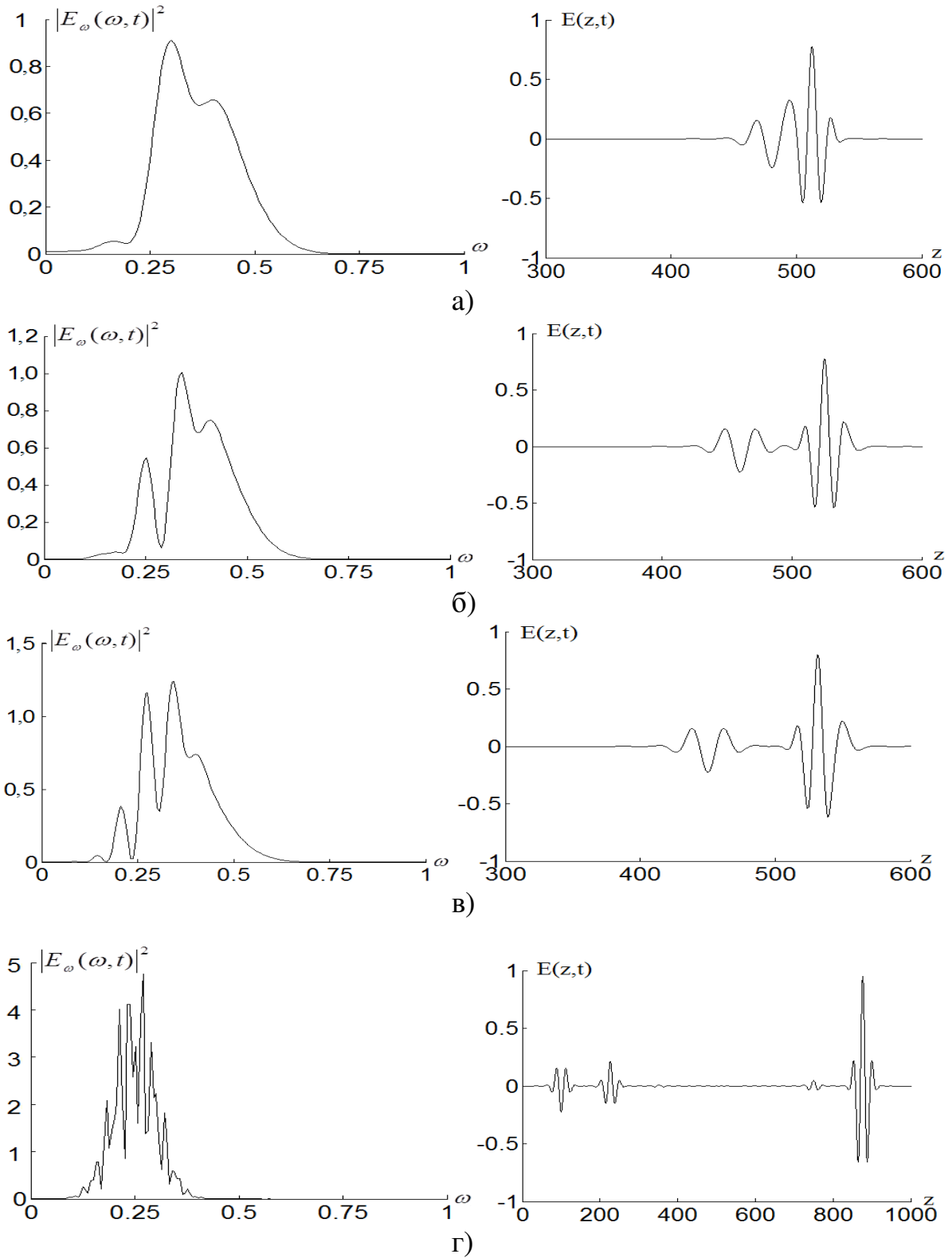


Рис. 6. Эволюция спектра и формы импульса с несущей частотой $\omega=0.25$ в моменты времени $t=120$ (а), 140 (б), 150 (в), 500 (г) при прохождении им пластины толщиной $d=40$.

спектр импульса увеличивается, что соответствует уменьшению его длительности при отражении от передней границы слоя. А затем он уменьшается и разбивается на части. Сильная изрезанность спектра электрического поля соответствует образованию многих субимпульсов, имеющих малую амплитуду и постепенно выходящих из слоя.

На рис. 7 показан профиль импульса с несущей частотой $\omega=1.0$

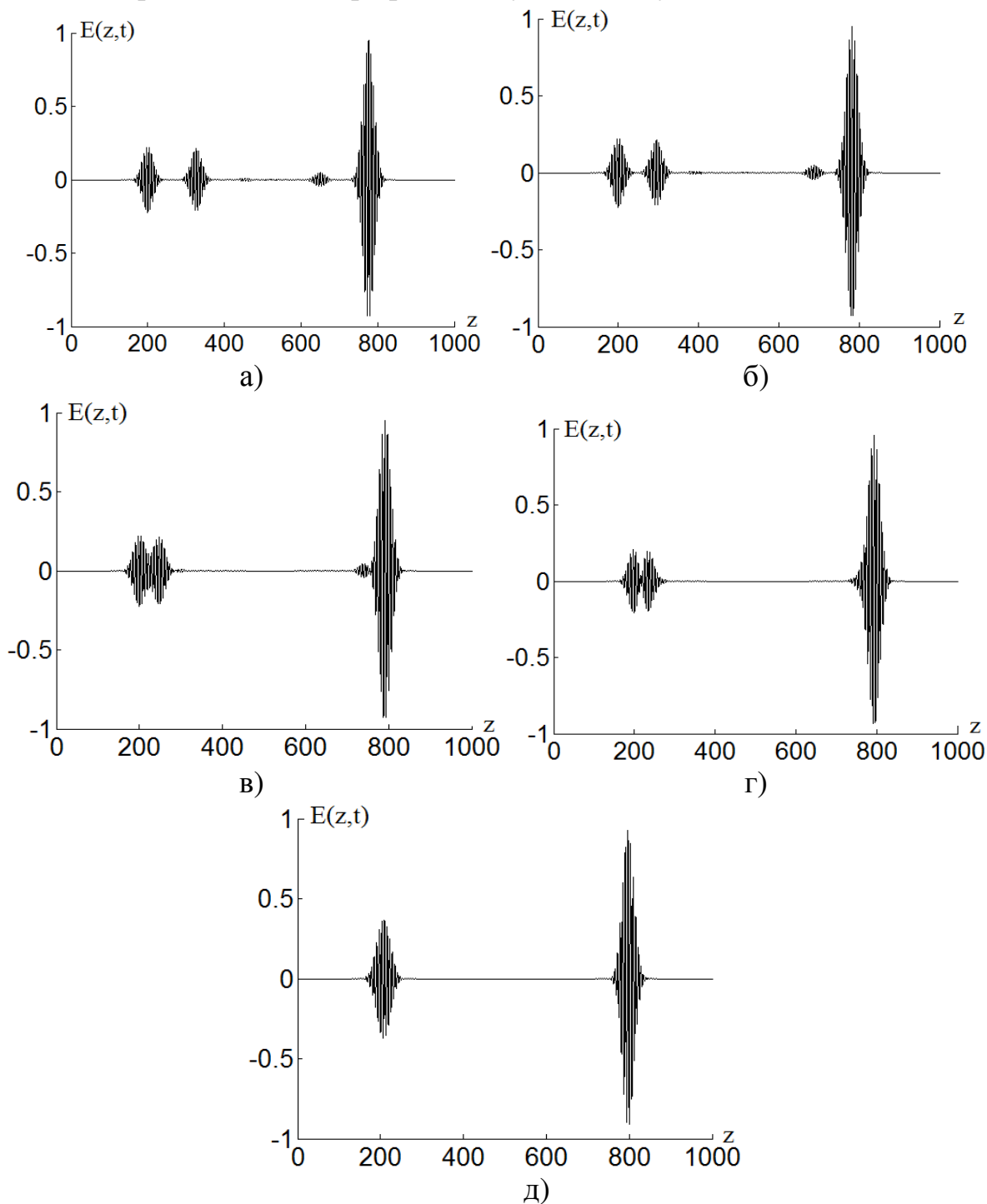


Рис.7. Профиль импульса при толщине пластины $d=40$ (а), 30 (б), 15 (в), 10 (г), 5 (д) для импульса с несущей частотой $\omega=1.0$.

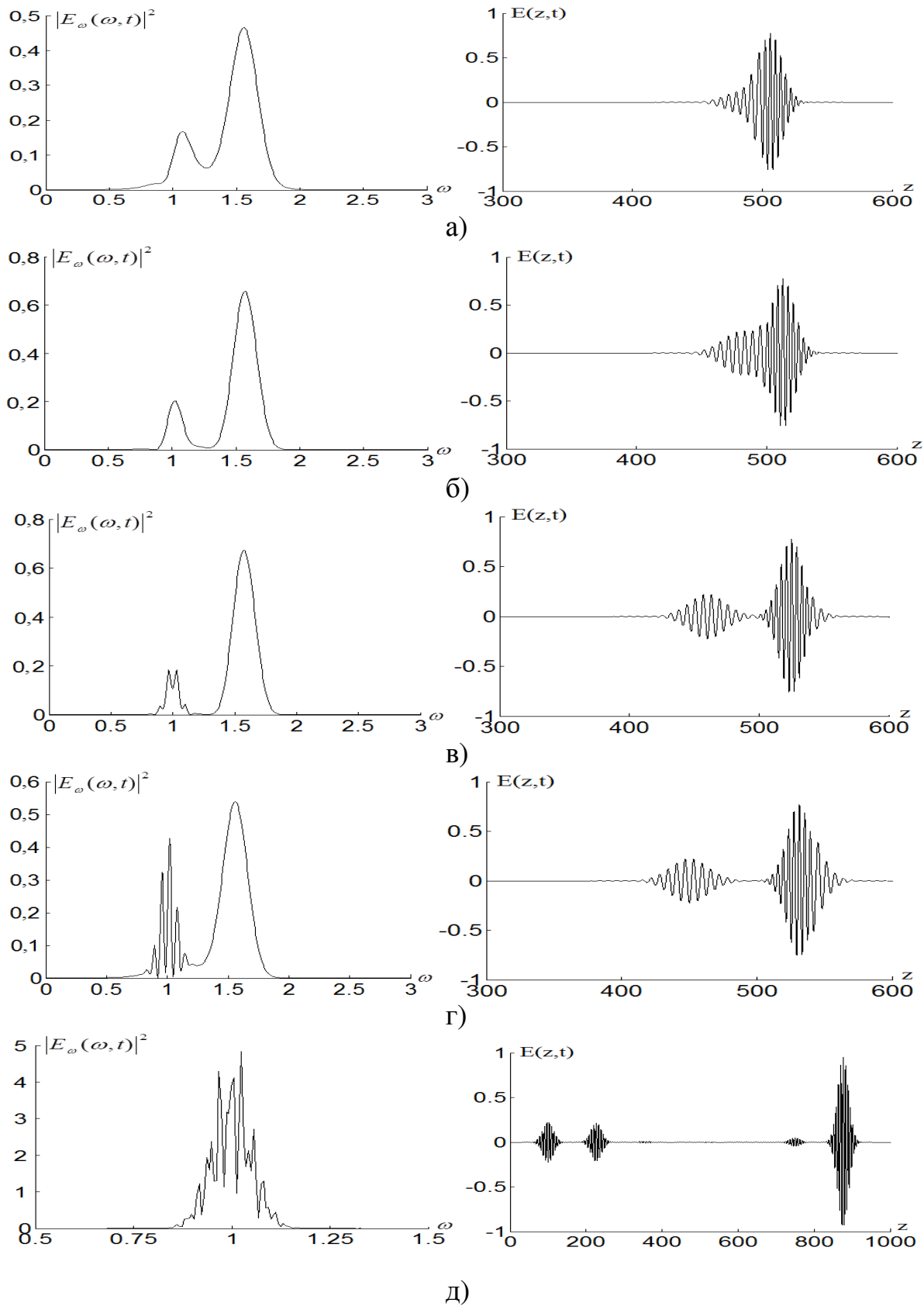


Рис. 8. Эволюция спектра и формы импульса с несущей частотой $\omega=1.0$ в моменты времени $t = 110$ (а), 120 (б), 140 (в), 150 (г), 500 (д) при прохождении им пластины толщиной $d=40$.

в зависимости от толщины пластины. В целом, имеют место закономерности, аналогичные рис. 5. Однако, уже на рис. 7в отсутствует отраженный третий субимпульс малой амплитуды. Видимо, он выходит из слоя вместе со вторым отраженным субимпульсом. Длительность импульса, отраженного от слоя с толщиной 5 единиц, превосходит длительность прошедшего импульса. Этого также не наблюдается на рис. 5.

На рис. 8 показана эволюция во времени формы импульса с несущей частотой $\omega=1.0$ и его спектра. Можно видеть, что при прохождении импульса через пластину, его спектр смещается сначала в сторону больших частот: имеется второй максимум значения спектральной яркости в области $\omega=1.5$. При выходе же импульса из пластины, максимальное значение спектральной яркости вновь достигается на несущей частоте падающего на слой импульса. Однако, он становится сильно изрезанным, что говорит о наличии множества субимпульсов малой амплитуды, выходящих из слоя.

4.2. Прохождение светового импульса поглощающего слоя среды равной диэлектрической проницаемости.

В этом случае система уравнений (1) решается при постоянном значении диэлектрической проницаемости $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=1.0$ и отличной от нуля проводимости в слое: $\sigma_1=\sigma_3=0$, $\sigma_2=\sigma$. Закономерности отражения оптического излучения от поглощающего слоя рассмотрим на примере распространения светового импульса с несущей частотой $\omega=0.25$.

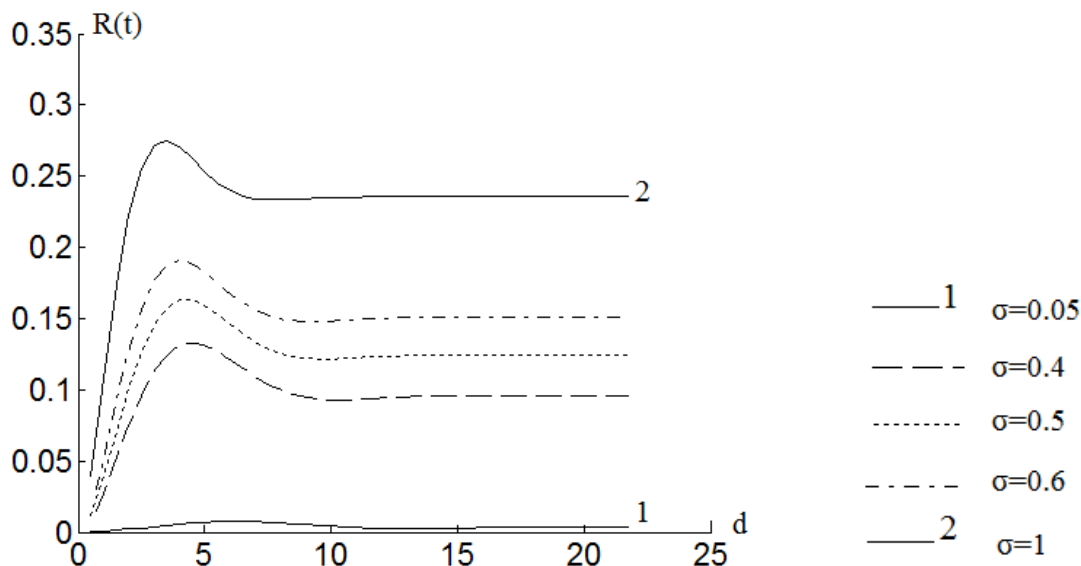


Рис.9. Зависимость доли отраженной энергии от толщины поглощающего слоя.

На рис. 9 показана зависимость доли отраженной энергии от толщины пластины для различных значений коэффициента поглощения. Хорошо видна зависимость толщины слоя, при котором достигается макси-

мальное значение коэффициента отражения, от электрической проводимости: с ее ростом соответствующее значение толщины слоя уменьшается.

На рис. 10 изображена зависимость доли прошедшей энергии от толщины пластины для задачи с постоянной диэлектрической проницаемостью среды и пластины. На графике никаких неожиданных зависимостей не присутствует: с ростом проводимости среды доля прошедшей энергии уменьшается. Причина этого заключается как в росте поглощенной энергии в слое, так и в уменьшении доли проникающей в слой световой энергии из-за увеличения доли отраженной от слоя энергии. Последнее обстоятельство иллюстрирует рис. 11. При этом, начиная со слоя, толщина которого примерно равна 7.5 единицам, зависимость поглощенной в слое энергии от коэффициента поглощения становится немонотонной.

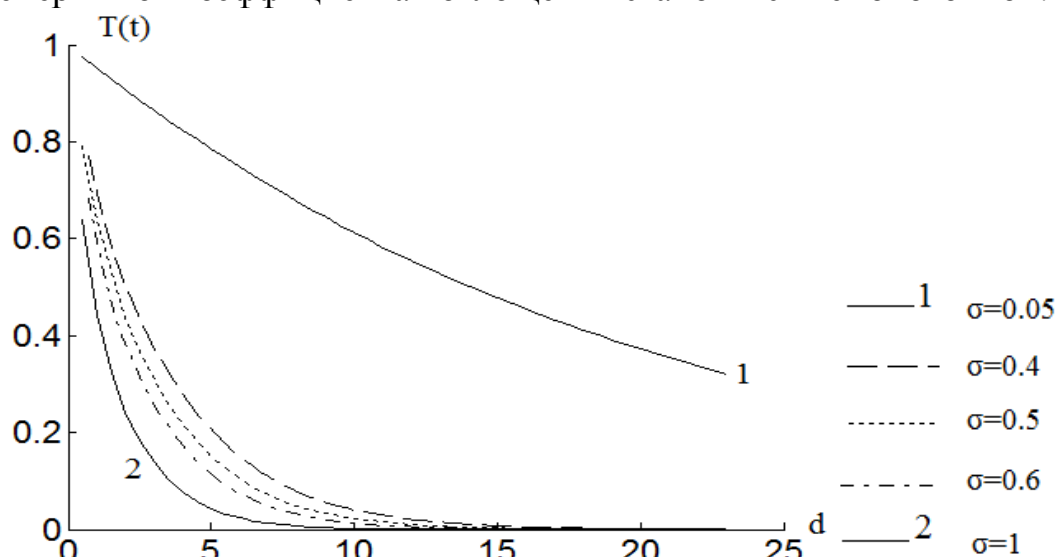


Рис. 10. Зависимость доли прошедшей энергии от толщины поглощающего слоя для задачи с постоянной диэлектрической проницаемостью.

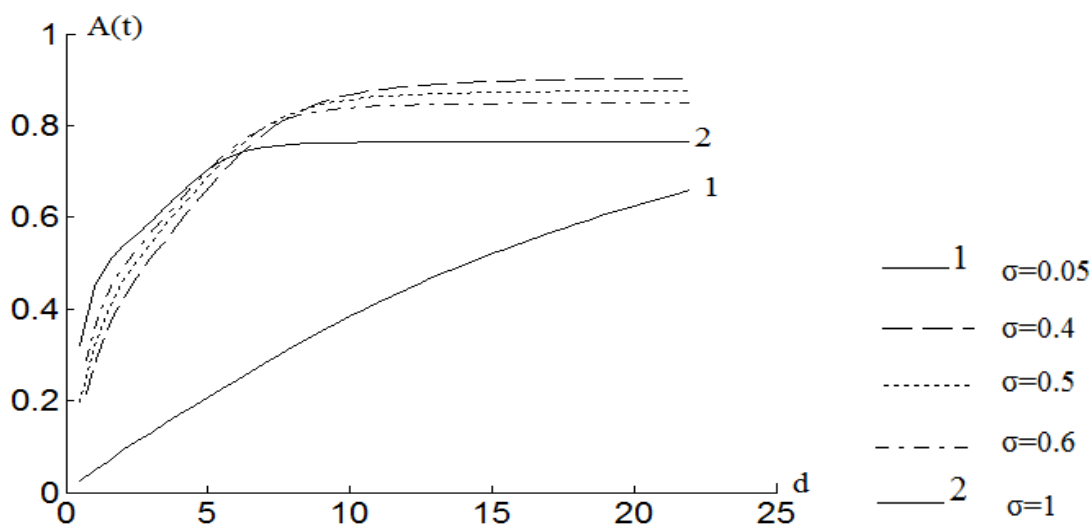


Рис.11. Зависимость поглощенной энергии от толщины.

4.3. Прохождение импульса поглощающего слоя с диэлектрической проницаемостью, отличной от окружающей среды.

Наиболее общему случаю соответствуют значения диэлектрической проницаемости $\epsilon_1=\epsilon_3=1.0$, $\epsilon_2=2.5$ и электрической проводимости $\sigma_1=\sigma_3=0$, $\sigma_2=\sigma$ среды. Компьютерное моделирование проведем для импульса с несущей частотой $\omega=0.25$.

На рис.12 показана зависимость доли отраженной, прошедшей и поглощенной энергии в зависимости от толщины пластины. На рисунке хорошо виден минимум прошедшей энергии при толщине пластины, равной 3.8. В этом случае реализуется максимум отраженной энергии. Поглощенная энергия растет с увеличением толщины пластины.

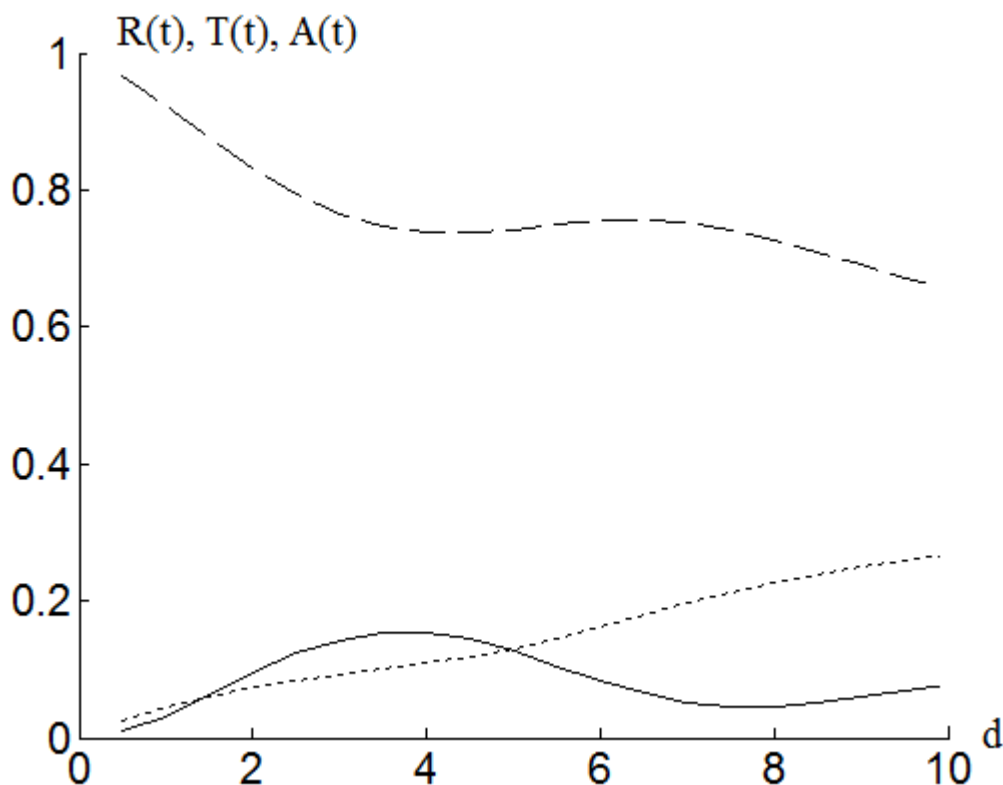


Рис. 12. Зависимость доли прошедшей (пунктир), поглощенной (штриховая кривая), отраженной энергии (сплошная кривая) от толщины поглощающего слоя при электропроводности $\sigma=0.05$.

На рис. 13 приведена зависимость доли отраженной энергии от толщины пластины для различных значений электропроводности. В случае малого поглощения световой энергии имеют место два максимума коэффициента отражения. Их значения достигаются при толщине слоя, близкого к значениям π и 3π . Важно подчеркнуть, что толщина слоя, соответствующая

максимуму отраженной энергии, зависит от значения коэффициента электропроводности слоя. Интересно также подчеркнуть, что сначала с ростом коэффициента поглощения до значения $\sigma=0.15$ происходит уменьшение отраженной энергии, а затем она растет. Минимум отраженной энергии достигается для слоя с ненулевой электропроводностью. В случае слоя с толщиной от 14 до 17 единиц наибольшее отражение также достигается для слоя, обладающего определенным значением электропроводности.

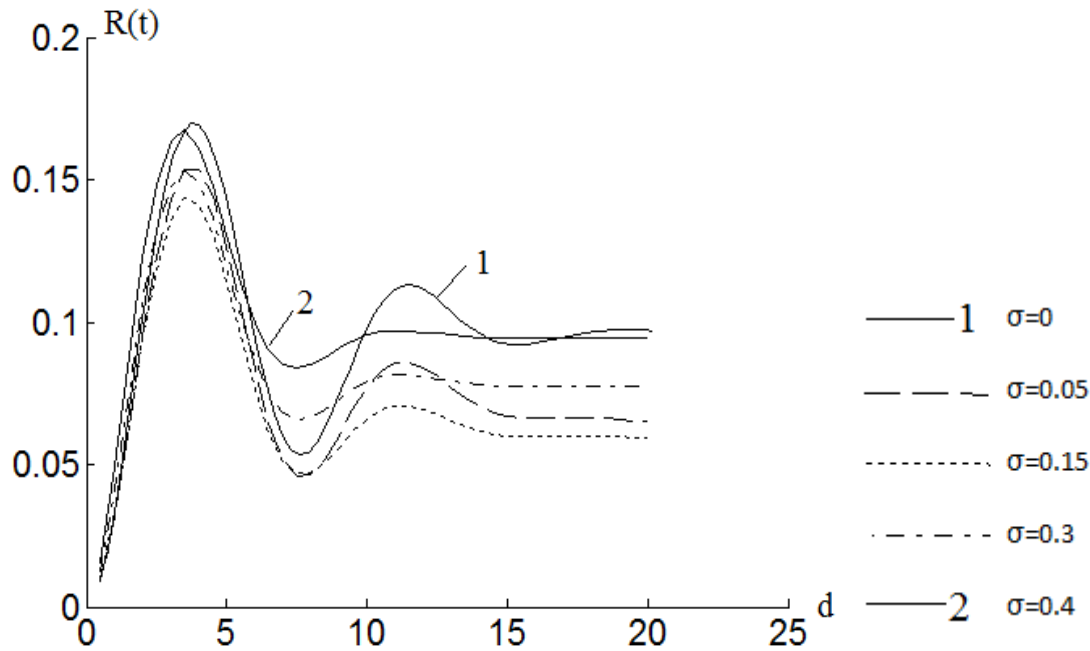


Рис.13. Зависимость доли отраженной энергии от толщины слоя при различных значениях электропроводности.

На рис. 14 изображена зависимость доли прошедшей энергии от толщины слоя для некоторых значений электропроводности. Если ее значения не превосходят 0.1, то имеет место локальный максимум пропускания слоя, положение которого сильно зависит от величины электропроводности среды. При $\sigma > 0.15$ он отсутствует. Такая эволюция коэффициента пропускания слоя объясняется зависимостью коэффициента его отражения от электропроводности.

На рис. 15 показана зависимость доли поглощенной энергии от толщины пластины при некоторых значениях коэффициента поглощения σ . Как видно из рисунка, с увеличением коэффициента поглощения растет поглощенная энергия, что и следовало ожидать. Однако, при толщине пластины больше 15 единиц возможно уменьшение поглощения, несмотря на рост электропроводности среды. Причина этого заключается также

в увеличении доли отраженной от слоя энергии с ростом электропроводности слоя.

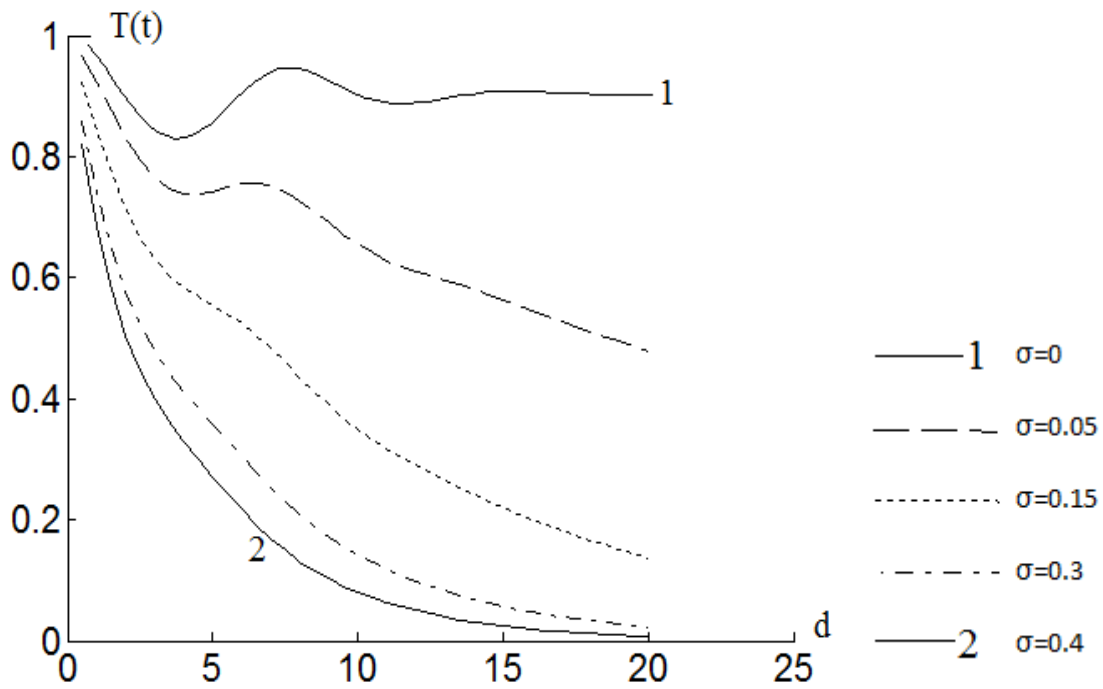


Рис.14. Зависимость доли прошедшей энергии от толщины слоя при различных значениях электропроводности.

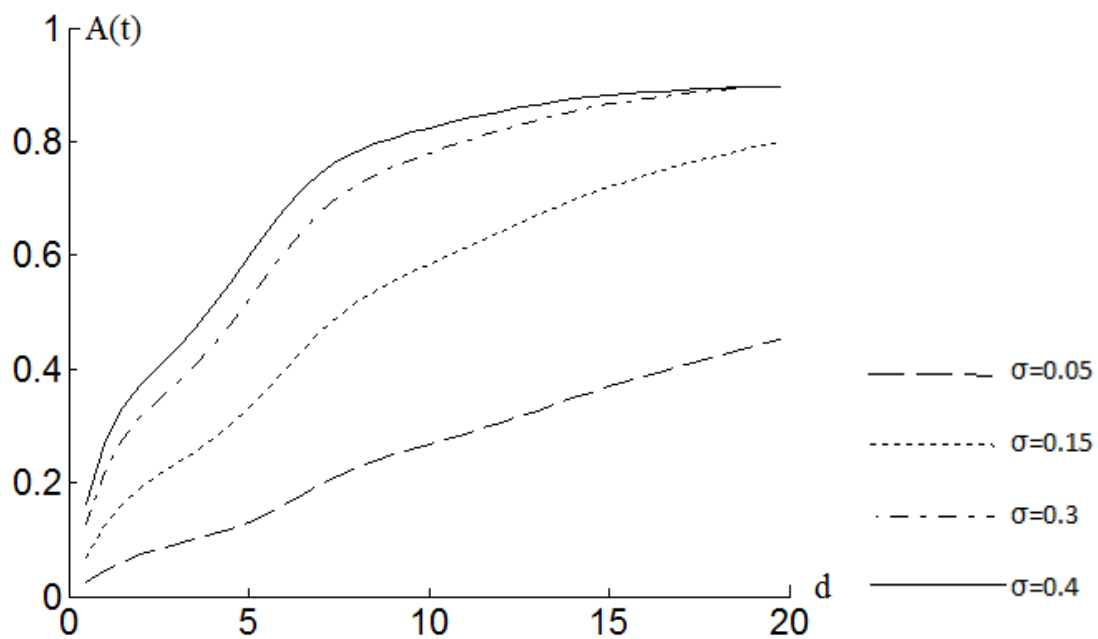


Рис.15. Зависимость доли поглощенной энергии от толщины слоя при различных значениях электропроводности.

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены закономерности взаимодействия малопериодного оптического импульса с оптически тонким слоем прозрачной или/и поглощающей среды. Показано, что процесс отражения световой энергии носит немонотонный характер в зависимости от толщины слоя.

В процессе взаимодействия малопериодного светового импульса со слоем может появиться режим полной его прозрачности для импульсов с определенной несущей частотой.

Наличие поглощения в слое также немонотонно влияет на отраженную и прошедшую через слой световую энергию. Поглощенная в слое энергия может уменьшаться с ростом коэффициента поглощения слоя вследствие возрастания энергии, отраженной от него.

Толщина слоя, при котором достигается максимальное значение отраженной энергии, зависит от электропроводности среды.

При определенных условиях взаимодействия светового импульса с оптически тонкой пластиной может существенно измениться спектр отраженного импульса и, в частности, его абсолютная фаза, которая зависит от толщины пластины. Последнее обстоятельство может быть использовано в приложениях для формирования малопериодных импульсов, обладающих требуемой абсолютной фазой.

Литература:

1. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. / Пер. с англ. М: МИР. 1989. 558 с.
2. Гладков С.М., Коротеев Н.И. Квазирезонансные нелинейные оптические процессы с участием возбужденных и ионизированных атомов. // УФН. 1990. Т. 160. N7. С. 105-145.
3. Paulus G. G., Grasbon F., Walther H., Villoresi P., Nisoli M., Stagira S., Priori E., De Silvestri S. Absolute-phase phenomena in photoionization with few-cycle laser pulses. // Nature. 2001. V. 414. P. 182-184.
4. Ванин Е.В., Даунер М.С., Ким А.В., Сергеев А.М. О возбуждении сверхкоротких всплесков гармоник излучения при ионизации газа мощным оптическим импульсом. // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т.58. N.12. С. 964-969.
5. Dombi P., Apolonski A., Lemell Ch., Paulus G. G. et al. Direct measurement and analysis of the carrier-envelope phase in light pulses approaching the single-cycle regime. // New Journal of Physics. 2004. V. 6. Paper number 39.
6. Hovhannisyan D., Stepanyan K. Computational modeling of supercontinuum generation in fused silica by a femtosecond laser pulse

- of a few optical cycles. // *Microwave and Optical Technology Letters*. 2004. V.42. N 1. P. 60–64.
7. Zhong F., Jiang H., Gong Q. Tuning the frequency of few-cycle femtosecond laser pulses by molecular phase modulation. // *Optics Express*. 2009. V. 17. N 3. P. 1472-1477.
 8. Brabec T., Krausz F. Intense few-cycle laser fields: frontiers of nonlinear optics. // *Rev. Mod. Phys.* 2000. V. 72. P. 545-591.
 9. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. Зависимость спектра фемтосекундного импульса от его абсолютной фазы при распространении в нелинейной среде. // *Письма в ЖТФ*. 2001. Т. 27. N14. С. 6-15.
 10. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. Гистерезисная зависимость некоторых спектральных компонент фемтосекундного импульса при его прохождении нелинейного слоя. // *ЖТФ*. 2003. Т. 73. N3. С. 69-74.
 11. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. Гистерезисная зависимость некоторых спектральных компонент фемтосекундного импульса при его распространении в нелинейной среде. // *ЖТФ*. 2004. Т. 74. N2. С. 77-82.
 12. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. О применимости модели Дуффинга для описания распространения фемтосекундных световых импульсов в нелинейных средах. // *Труды УНЦ волоконно-оптических материалов и устройств*. М.: Издательство учебно-научного центра “Волоконно-оптические технологии, материалы и устройства”. 2000. N3. С. 83-92.
 13. Скрипов Д.К., Трофимов В.А. Формирование высокочастотного субимпульса при распространении фемтосекундного импульса в среде с насыщающимся потенциалом. // *Оптика и спектроскопия*. 2003. Т. 95. N2. С. 347-359.
 14. Trofimov V.A., Safonov V.N. Dependence of harmonic generation efficiency on absolute phase of femtosecond pulse. // *Proceedings of SPIE*. 2005. V. 6028. P. 602806 (5 pages).
 15. Сафонов В.Н., Трофимов В.А. Влияние абсолютной фазы малопериодного светового импульса на генерацию третьей гармоники в оптически тонком слое. // *Письма в ЖТФ*. 2006. Т. 32. N 11. С. 37-43.
 16. Сафонов В.Н., Трофимов В.А. Параметрическая генерация четных гармоник поляризации в кубично нелинейном слое. // *Оптика и спектроскопия*. 2006. Т. 100. N 6. С. 1008 - 1016.
 17. Trofimov V.A., Mishanov I.V. Reflection and propagation of laser pulse with a few cycles in medium with time-dependent dielectric permittivity. // *Proceedings of SPIE*. 2013. V. 8772. Paper number 877211. (10 pages).

18. Xiao, Y., Maywar, D. N. and Agraval G. P. New approach to pulse propagation in nonlinear dispersive optical media. // *JOSA B*. 2012. V. 29. N 10. P. 2958-2963.
19. Xiao, Y., Agraval G. P., and Maywar, D. N. Spectral and temporal changes of optical pulses propagating through time-varying linear media. // *Optics Letters* Vol. 36, Iss. 4, pp. 505–507 (2011)
20. Akhmeteli A. Efficient Heating of Thin Cylindrical Targets by Broad Electromagnetic Beams I. // *ArXiv: physics [physics.plasm-ph]*. 2004. 0405091v1.
21. Akhmeteli A., Efficient Heating of Thin Cylindrical Targets by Broad Electromagnetic Beams II. // *ArXiv: physics [physics.plasm-ph]*. 2006. 0611169v1.
22. Akhmeteli A., Kokodiy N.G., Safronov B.V., Balkashin V.P., Priz I.A., Tarasevich A. S. Efficient Non-Resonant Microwave Absorption in Thin Cylindrical Targets: Experimental Evidence. // *ArHiv: physics*. 2011. 11091626v2.
23. Joseph R., Hagness S. and Taflove A. Direct time integration of Maxwell's equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses. // *Optics Letters*. 1991. V. 16. N 18. P. 1412-1414.
24. Goorjian P. and Taflove A. Direct time integration of Maxwell's equations in nonlinear dispersive media for propagation and scattering of femtosecond electromagnetic solitons. // *Optics Letters*. 1992. V. 17. N 3. P. 180-182.
25. Taflove A. *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Boston: Artech House. 1998.
26. Yee K. S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 1966. V. 14. N 3. P. 302-307.