М.С. Кругляков

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТОКОВ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД*

Введение

Типичной моделью, используемой в задачах геофизической электродинамики, является горизонтально-однородная (слоистая) среда, содержащая аномалию — т.е. область, электромагнитные параметры которой отличны от параметров объемлющей среды. При этом основной практический интерес представляет электромагнитное поле в точках, расположенных на достаточно большом расстоянии от аномалии. Такой класс задач удобно решать с помощью перехода от дифференциальных уравнений Максвелла к интегральным уравнениям, используя фундаментальную функцию Грина для слоистой среды.

Решение интегральных уравнений электродинамики является сложной вычислительной задачей и требует разработки специальных численных методов. Основная проблема, возникающая при численном решении интегральных уравнений, заключается в необходимости решения систем линейных уравнений высокого порядка с полной матрицей. Следует отметить, что расчет коэффициентов системы, возникающих при алгебраизации трехмерных векторных интегральных уравнений электродинамики, происходит существенно быстрее, чем обращение этой системы прямыми или итерационными методами. Поэтому большой практический интерес представляет разработка численных методов, приводящих к системам линейных уравнений возможно меньшего порядка за счет усложнения расчета коэффициентов этих систем.

Для большого числа практически важных задач, в частности для задач зондирования, уменьшения порядка матрицы можно достичь, перейдя к уравнениям относительно интегрального тока, что является основой для метода интегральных токов [1]. В настоящей работе предложена модификация этого метода, основным отличием которой от оригинального является двукратное интегрирование ядра интегрального уравнения при вычислении коэффициентов системы линейных уравнений.

Постановка задачи

Пусть пространство заполнено горизонтально-однородной средой, в которой $\varepsilon(z)$ — диэлектрическая проницаемость, $\mu(z)$ — магнитная проницаемость и $\sigma_0(z)$ — проводимость — произвольные функции

* Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 09-05-12016 офи-м

координаты z. Электромагнитное поле, наведенное сторонними токами $\mathbf{j} = \left(j_x , j_y , j_z \right)$ в такой среде, будем называть первичным полем. Оно подчиняется следующим уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0 = \sigma\mathbf{E}^0 + \mathbf{j} \;\; \operatorname{rot}\mathbf{E}^0 = i\omega\mu\mathbf{H}^0 , \tag{1}$$

где $\sigma = \sigma_0 - i\omega\mu$ — комплексная проводимость, ω — частота.

Если в этой среде находится аномальная область T, проводимость которой σ_a отлична от проводимости окружающей среды, то электромагнитное поле области описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma_a\mathbf{E} + \mathbf{j} \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \text{ внутри области } T, \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j} \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} \text{ вне области } T \end{gathered} \tag{2}$$

и условием непрерывности касательных компонент на границах области T.

Если для данной слоистой среды известен тензор Грина $\hat{\mathbf{G}}$ [1],[2], то решение $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ уравнения (2) в произвольной точке M представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(M) &= \int_T \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\mathbf{E}(M_0)dT_{M_0} + \mathbf{E}^0(M), \\ \mathbf{H}(M) &= \int_T \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\mathbf{E}(M_0)dT_{M_0} + \mathbf{H}^0(M), \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{G}} + \operatorname{grad}\left(\frac{\mu}{k^2} \operatorname{div} \frac{\hat{\mathbf{G}}}{\mu} \right), \\ \hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{i\omega\mu} \operatorname{rot}\hat{\mathbf{G}} , \\ \varDelta_\sigma(M) = \sigma_a(M) - \sigma(M). \end{gathered} \tag{4}$$

Если точка $M \in V$, то первое выражение в (3) является интегральным уравнением относительно полного электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}(M) - \int_T \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{E}}(M,M_0)\varDelta_\sigma(M_0)\mathbf{E}(M_0)dT_{M_0} = \mathbf{E}^0(M) \tag{5}$$

Поскольку тензор $\hat{\mathbf{G}}_E$ содержит особенность, порожденную двукратным дифференцированием тензора $\hat{\mathbf{G}}$, то интегралы в (3) следует понимать в смысле собственного значения, аналогично второй производной от объемного потенциала [1].

Если решение этого уравнения известно, т.е. поле $\mathbf{E}$ известно внутри области T, то для вычисления электромагнитного поля в любой точке пространства используются формулы (3), которые называются формулами пересчета.

Построение модифицированного метода интегральных токов

В задачах геофизики, как правило, основной интерес представляет не решение интегрального уравнения (5) внутри аномалии, а поле, полученное по формуле пересчета (3). Разобьем область T на N непересекающихся выпуклых подобластей T_k. Представим интегралы из формулы (3) в виде суммы интегралов по совокупности подобластей, составляющих аномалию:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M) &= \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \hat{\mathbf{G}}_E(M, M_0) \Delta_\sigma(M_0) \mathbf{E}(M_0) dT_{M_0} + \mathbf{E}^0(M), \\
\mathbf{H}(M) &= \sum_{k=1}^{N} \int_{T_k} \hat{\mathbf{G}}_H(M, M_0) \Delta_\sigma(M_0) \mathbf{E}(M_0) dT_{M_0} + \mathbf{H}^0(M).
\end{aligned} \tag{6}$$

Если расстояние между подобластью T_n и точкой наблюдения M велико по сравнению с диаметром d_n подобласти T_n, то в формуле пересчета (6) можно вынести тензор Грина из-под интегрирования и получить зависимость не от поля в каждой точке аномалии, а от интеграла от электрического поля, взятого по соответствующей подобласти $\int_{T_n} \mathbf{E}(M) dT_M$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M) &= \sum_{k=1}^{N} \hat{\mathbf{G}}_E(M, M_0^k) \Delta_\sigma(M_0^k) \int_{T_k} \mathbf{E}(M_0) dT_{M_0} + \mathbf{E}^0(M) \\
\mathbf{H}(M) &= \sum_{k=1}^{N} \hat{\mathbf{G}}_H(M, M_0^k) \Delta_\sigma(M_0^k) \int_{T_k} \mathbf{E}(M_0) dT_{M_0} + \mathbf{H}^0(M)
\end{aligned} \tag{7}$$

Именно на определении таких интегралов по подобластям основывается как метод интегральных токов [1], так и его предлагаемая модификация.

Представим уравнение (5) в виде уравнения по совокупности подобластей:

$$\mathbf{E}(M)-\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\hat{\mathbf{G}}_E(M,M_0)\Delta_\sigma(M_0)\mathbf{E}(M_0)dT_{M_0}=\mathbf{E}^0(M). \tag{8}$$

Так же, как и в методе интегральных токов [1], проинтегрируем уравнение (8) по каждой из областей T_n и поделим на объем $V_n=\int_{T_n}dT_M$ соответствующей области. Получим систему из N интегральных соотношений:

$$\mathbf{E}_n-\frac{1}{V_n}\sum_{k=1}^{N}\int_{T_k}\left\{\int_{T_n}\hat{\mathbf{G}}_E(M,M_0)dT_M\right\}\Delta_\sigma(M_0)\mathbf{E}(M_0)dT_{M_0}=\mathbf{E}_n^0, \tag{9}$$

где

$$V_n=\int_{T_n}dT_M,\quad \mathbf{E}_n=\frac{1}{V_n}\int_{T_n}\mathbf{E}(M)dT_M,\quad \mathbf{E}_n^0=\frac{1}{V_n}\int_{T_n}\mathbf{E}^0(M)dT_M,\quad n=1\ldots N. \tag{10}$$

Для перехода от системы интегральных соотношений (9) к системе линейных алгебраических уравнений заменим в подынтегральном выражении по каждой подобласти функцию $\mathbf{E}(M)$ на её интегральное среднее $\mathbf{E_n}$. Получим следующую систему линейных уравнений, относительно *приближенных* интегральных средних $\mathbf{U}^n$:

$$\mathbf{U}^n-\sum_{k=1}^{N}\hat{\mathbf{K}}_n^k\mathbf{U}^k=\mathbf{E}_{n.}^0, \tag{11}$$

где

$$\hat{\mathbf{K}}_n^k=\frac{1}{V_n}\int_{T_n}\int_{T_k}\hat{\mathbf{G}}_E(M,M_0)\Delta_\sigma(M_0)dT_M dT_{M_0}\ . \tag{12}$$

Как уже отмечалось, уравнения в (7) являются сингулярными, поскольку их ядра содержат сильную особенность, вызванную двукратным дифференцированием тензора Грина [1]. При вычислении коэффициентов $\hat{\mathbf{K}}_\mathrm{n}^\mathrm{k}$ эта особенность может быть проинтегрирована аналитически.

Отметим, что двойные интегралы из определения (12) коэффициентов $\hat{\mathbf{K}}_\mathrm{n}^\mathrm{k}$ являются абсолютно сходящимися. Для типичных моделей, когда проводимость задается кусочно-постоянными или кусочно-линейными функциями, сложность расчетов коэффициентов $\hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}$, практически такая же как и сложность расчета самого тензора Грина $\hat{\mathbf{G}}$. Коэффициенты $\hat{\mathbf{K}}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}$ представляются в виде интегральных преобразований от функций, аналитически выраженных через элементарные.

Если система (11) совместна, то формулы пересчета (3) для электрического и магнитного поля аппроксимируются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}(M) &= \sum_{n=1}^{N} \hat{\mathbf{K}}_n^E(M)\mathbf{U}^n + \mathbf{E}^0(M), \\
\tilde{\mathbf{H}}(M) &= \sum_{n=1}^{N} \hat{\mathbf{K}}_n^H(M)\mathbf{U}^n + \mathbf{H}^0(M),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{K}}_n^E(M) &= \int_{T_n} \hat{\mathbf{G}}_E(M, M_0) \Delta_\sigma(M_0) dT_{M_0} \\
\hat{\mathbf{K}}_n^H(M) &= \int_{T_n} \hat{\mathbf{G}}_H(M, M_0) \Delta_\sigma(M_0) dT_{M_0}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Итак, модифицированный метод интегральных токов заключается в решении системы линейных уравнений (11) и подстановке её решения в формулы(13), что позволяет вычислять электромагнитное поле в любой точке пространства. Отметим, что формулы (11) и (17) устроены таким образом, что интегральное среднее от функции $\tilde{\mathbf{E}}(M)$ по области T_n совпадает с $\mathbf{U}^n$, что позволяет контролировать правильность проводимых расчетов.

Исследование метода

Исследование сходимости данного метода и оценку погрешности приближениями функциями $\tilde{\mathbf{E}}(M)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(M)$ функций $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{H}(M)$, соответственно, удобно проводить в терминах операторов и функциональных пространств.

Введем пространство $\mathrm{L}_2[T]$ как пространство вектор-функций, определенных в области T, компоненты которых интегрируемы с квадратом в этой области. Скалярное произведение двух элементов этого пространства $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ и $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ будем обозначать $(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ и вычислять следующим образом:

$$(\mathbf{V},\mathbf{U})=\int_T \left\{V_x\overline{U_x}+V_y\overline{U_y}+V_z\overline{U_z}\right\}dT_M\,. \tag{15}$$

Представим уравнение (7) в виде операторного уравнения в пространстве $\mathrm{L}_2[T]$:

$$\mathrm{A}\mathbf{E}=\left(\mathrm{I}-\mathrm{G}_E\,\Delta_\sigma\right)\mathbf{E}=\mathbf{E}^{\mathbf{0}}, \tag{16}$$

где I — тождественный оператор, а G_E — интегральный оператор, определяемый очевидным образом.

Обозначим как P_N оператор, переводящий любую вектор-функцию $\mathbf{V}(M)\in \mathrm{L}_{\mathbf{2}}[T]$ в кусочно-постоянную вектор-функцию $\mathbf{V}^{(N)}(M)$, которая внутри подобласти T_n совпадет с $\frac{1}{V_n}\int_{T_n}\mathbf{V}(M)dT_M$ — интегральным средним функции $\mathbf{V}(M)$ в подобласти T_n. Отметим, что $\mathrm{P}_N^2\,\mathbf{V}=\mathrm{P}_N\,\mathbf{V}$. Введем гильбертово пространство $\mathrm{H}^{(N)}$ следующим образом: $\mathrm{H}^{(N)}=\mathrm{P}_N\,\mathrm{L}_2[T]$-пространство кусочно-постоянных функций, на которое оператор P_N проектирует пространство $\mathrm{L}_2[T]$.

Используя определения операторов A и P_N, систему линейных уравнений (11) можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве $H^{(N)}$:

$$\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{U}^{(N)}=\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}^{\mathbf{0}}, \tag{17}$$

где $\mathbf{U}^{(N)}$ — элемент пространства $H^{(N)}$, такой что $\mathbf{U}^{(N)}(M)=\mathbf{U}^n$, при $M\in T_n$.

Таким образом, разрешимость системы линейных уравнений (11) эквивалентна разрешимости операторного уравнения (17).

Сформулируем основную теорему для модифицированного метода интегральных токов для интегральных уравнений электродинамики.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{E}^0(M)$ *— гладкая функция,* σ,σ_a *—вещественные гладкие функции,* $\infty>\sigma>0,\infty>\sigma_a>0$ *во всех точках области* T*. Тогда для любого разбиения на выпуклые непересекающиеся подобласти* T_k, $k=1\ldots N$ *решение системы (11) существует и единственно, и функции* $\widetilde{\mathbf{E}}(M)$ *и* $\widetilde{\mathbf{H}}(M)$ *приближают функций* $\mathbf{E}(M)$ *и* $\mathbf{H}(M)$ *с первым порядком по диаметру разбиения* $d=\max d_k$ $k=1\ldots N$ *в смысле нормы* $\mathrm{L}_2[T]$ *внутри области* T *и с первым порядком поточечно вне области* T.

Для доказательства разрешимости системы линейных уравнений (11) докажем однозначную разрешимость операторного уравнения (17). Для этого покажем, что оператор $\mathrm{P}_N \mathrm{A}$ равномерно ограничен и обладает следующим свойством:

$$\forall\, \mathbf{V}^{(N)} \in H^{(N)} \quad \left|\left(\mathrm{P}_N \mathrm{A}\, \mathbf{V}^{(N)}, \mathbf{V}^{(N)}\right)\right| \geq p \left\|\mathbf{V}^{(N)}\right\|^2_{\mathrm{L}_2[T]} , \tag{18}$$

где величина $p > 0$ и не зависит от разбиения на подобласти. Из ограниченности оператора $\mathrm{P}_N \mathrm{A}$ и неравенства (18) следует разрешимость уравнения (17) для любой правой части [3].

Сначала докажем, что для оператора A справедливо неравенство аналогичное (18) для всех элементов пространства $\mathrm{L}_2[T]$.

Преобразуем интегральное уравнение (7) так, чтобы получить уравнение со сжимающим оператором в пространстве $\mathrm{L}_2[T]$. Определим модифицированный оператор Грина G_E^m следующим образом:

$$\mathrm{G}_E^m \mathbf{V} = \sqrt{\sigma}\mathbf{G}_E\left[2\sqrt{\sigma}\mathbf{V}\right] + \mathbf{V} \tag{19}$$

В работе [2] показано, что норма этого оператора в пространстве $\mathrm{L}_2[T]$ меньше 1.

Следуя [2], представим оператор $\mathrm{A} = \mathrm{I} - \mathrm{G}_E \varDelta_\sigma$ в следующем виде:

$$\mathrm{A} = \mathrm{I} - \mathrm{G}_E \varDelta_\sigma = \frac{a}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{I} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{G}_E^m b, \tag{20}$$

где

$$a = \frac{\sigma_a + \sigma}{2\sqrt{\sigma}} \quad b = \frac{\sigma_a - \sigma}{2\sqrt{\sigma}}. \tag{21}$$

Из представления (20) и ограниченности функций a и b очевидным образом получается оценка на норму оператора A в пространстве $\mathrm{L}_2[T]$:

$$\|\mathrm{A}\| \leq \max\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\left(\max|a| + \max|b|\right) \tag{22}$$

Оценим снизу следующее выражение для произвольной функции $\mathbf{V}$:

$$\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{A}\,\mathbf{V}, \mathbf{V}\right)\right| \tag{23}$$

Рассмотрим оператор $\mathrm{C} = \mathrm{I} - \mathrm{G}_E^m \dfrac{b}{a}$, тогда:

$$\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{A}\,\mathbf{V},\mathbf{V}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{C}\left[a\mathbf{V}\right],\mathbf{V}\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\mathrm{C}\left[a\mathbf{V}\right],\frac{1}{a}a\mathbf{V}\right)\right|. \tag{24}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{Re}\left(\mathrm{A}\,\mathbf{V},\mathbf{V}\right)\right(\geq \min\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\min\frac{1}{a}\mathrm{Re}\left(\mathrm{C}\left[a\mathbf{V}\right],a\mathbf{V}\right) = \\ = \min\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\min\frac{1}{a}\left\{\left\|a\mathbf{V}\right\|^2_{\mathrm{L}_2[T]} - \mathrm{Re}\left(\mathrm{G}_E^m\frac{b}{a}\left[a\mathbf{V}\right],a\mathbf{V}\right)\right\}.\end{gathered} \tag{25}$$

Поскольку $\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{G}_E^m\dfrac{b}{a}\left[a\mathbf{V}\right],a\mathbf{V}\right)\right| \leq \max\left|\dfrac{b}{a}\right|\left\|a\mathbf{V}\right\|^2_{\mathrm{L}_2[T]}$, в силу того, что $\left\|\mathrm{G}_E^m\right\| \leq 1$, получаем, что

$$\left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{A}\,\mathbf{V},\mathbf{V}\right)\right| \geq \min\sqrt{\frac{1}{\sigma}}\min\frac{1}{a}\min a^2\left\{1-\max\left|\frac{b}{a}\right|\right\}\left\|\mathbf{V}\right\|^2_{\mathrm{L}_2[T]}. \tag{26}$$

Из определения (21) функций a и b следует, что $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{\sigma_a - \sigma}{\sigma_a + \sigma}\right| < 1$ и, таким образом, величина $p = \min\sqrt{\dfrac{1}{\sigma}}\min\dfrac{1}{a}\min a^2\left\{1-\max\left|\dfrac{b}{a}\right|\right\} > 0$.

Ограниченность и самосопряженность оператора P_N следуют из его определения, поэтому, в силу (26), для любой функции $\mathbf{V}^{(N)}(M)$ из $H^{(N)}$ справедливо неравенство:

$$\left|\left(\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{V}^{(N)},\mathbf{V}^{(N)}\right)\right| = \left|\left(\mathrm{A}\,\mathbf{V}^{(N)},\mathrm{P}_N\,\mathbf{V}^{(N)}\right)\right| = \left|\left(\mathrm{A}\,\mathbf{V}^{(N)},\mathbf{V}^{(N)}\right)\right| \geq p\left\|\mathbf{V}^{(N)}\right\|^2_{\overline{\mathrm{L}_2}[T]} \tag{27}$$

Из ограниченности P_N и неравенства (27) получаем разрешимость операторного уравнения (17) и эквивалентной ему системы линейных уравнений (11). Таким образом, функции $\tilde{\mathbf{E}}(M)$ и $\tilde{\mathbf{H}}(M)$, определяемые формулами (13) существуют. Оценим порядок, с которым они аппроксимируют функции $\mathbf{E}(M)$ и $\mathbf{H}(M)$ внутри области T. Для этого оценим погрешность, с которой решение системы (11) приближает интегральные средние от точного решения, т.е. величину $\left\|\mathbf{U}^{(N)} - \mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}$.

Воспользуемся неравенством (27):

$$p\left\|\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|^2_{\mathrm{L}_2[T]}\le\left|\left(\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\left(\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right),\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right)\right|=$$
$$=\left|\left(\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{E}+\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{P}_N\mathbf{E},\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right)\right| \tag{28}$$

Поскольку $\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{U}^{(N)}=\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}^{\mathbf{0}}=\mathrm{P}_N\,\mathrm{A}\,\mathbf{E}$, получаем, что

$$\left\|\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\le\frac{1}{p}\left\|\mathrm{P}_N\mathrm{A}\left(\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right)\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\le\frac{1}{p}\|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{P}_N\|\left\|\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]} \tag{29}$$

Из очевидного неравенства:

$$\left\|\mathbf{E}-\mathbf{U}^{(N)}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\le\left\|\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}+\left\|\mathbf{U}^{(N)}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}, \tag{30}$$

и неравенства (29) получаем, что

$$\left\|\mathbf{E}-\mathbf{U}^{(N)}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\le(1+C)\left\|\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\ , \tag{31}$$

где $C=\dfrac{1}{p}\|\mathrm{A}\|\,\|\mathrm{P}_N\|$. Вычтем из первой формулы в (3) первую формулу из (13), тогда:

$$\mathbf{E}-\tilde{\mathbf{E}}=\int_T\hat{\mathbf{G}}_E(M,M_{\mathbf{0}})\varDelta_\sigma(M_{\mathbf{0}})\left(\mathbf{E}(M_{\mathbf{0}})-\mathbf{U}^{(N)}(M_0)\right)dT_{M_{\mathbf{0}}} \tag{32}$$

В силу ограниченности оператора G_E и формулы (31) получаем оценку погрешности расчтета электрического поля:

$$\left\|\mathbf{E}-\tilde{\mathbf{E}}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\le(1+C)\|\mathrm{G}_E\|\left\|\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}. \tag{33}$$

Аналогично получаем оценку и для магнитного поля:

$$\left\|\mathbf{H}-\tilde{\mathbf{H}}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}\le(1+C)\|\mathrm{G}_H\|\left\|\mathbf{E}-\mathrm{P}_N\,\mathbf{E}\right\|_{\mathrm{L}_2[T]}, \tag{34}$$

где $\|\mathrm{G}_H\|$ — норма оператора интегрального оператора G_H, ограниченность которого, равно как и ограниченность G_E, доказана в работах [2], [3]. Если $\mathbf{E}^0(M)$, σ, σ_a — гладкие функции, то, как показано в [3], решение $\mathbf{E}(M)$ уравнения (5) тоже является гладкой функцией внутри области T. Поэтому справедлива оценка

$$\left\| \mathbf{E} - \mathrm{P}_N\, \mathbf{E} \right\|_{\mathrm{L}_2[T]} \le 3d\sqrt{V}\, \max\left| \mathrm{grad}\, \mathbf{E} \right| \;, \tag{35}$$

где V — объем области T.

Таким образом, из (33), (34), (35) получаем, что:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{E}} \right\|_{\mathrm{L}_2[T]} &\le 3d\sqrt{V}(1+C)\left\| \mathrm{G}_E \right\| \max\left| \mathrm{grad}\, \mathbf{E} \right|. \\ \left\| \mathbf{H} - \tilde{\mathbf{H}} \right\|_{\mathrm{L}_2[T]} &\le 3d\sqrt{V}(1+C)\left\| \mathrm{G}_H \right\| \max\left| \mathrm{grad}\, \mathbf{E} \right|. \end{aligned} \tag{36}$$

Итак, получаем, что решение интегрального уравнения, построенное по модифицированному методу интегральных токов, сходится к точному решению внутри области T не менее, чем с первым порядком по диаметру разбиения d.

Перейдем к доказательству сходимости для случая, когда точка M лежит вне области T. В этом случае интеграл в (32) не содержит особенности, и к нему применимо неравенство Коши-Буняковского. Таким образом, справедлива оценка:

$$\left| \mathbf{E}(M) - \tilde{\mathbf{E}}(M) \right| \le 3\max\sqrt{\int_T \left| \mathrm{G}_E(M, M_0) \right|^2 \Delta_\sigma^2(M_0)\, dT_{M_0}}\,(1+C)\left\| \mathbf{E} - \mathrm{P}_N\, \mathbf{E} \right\|_{\mathrm{L}_2[T]}. \tag{37}$$

Интегрирование тензора здесь проводится покомпонентно, а максимум берется по всем элементам получившегося тензора. Аналогично получается и поточечная оценка для магнитного поля. Таким образом, учитывая (35), получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{E}(M) - \tilde{\mathbf{E}}(M) \right| &\le 9d\sqrt{V}\, \max\sqrt{\int_T \left| \mathrm{G}_E(M, M_\mathbf{0}) \right|^2 \Delta_\sigma^2(M_\mathbf{0})\, dT_{M_\mathbf{0}}}\,(1+C)\max\left| \mathrm{grad}\, \mathbf{E} \right|, \\ \left| \mathbf{H}(M) - \tilde{\mathbf{H}}(M) \right| &\le 9d\sqrt{V}\, \max\sqrt{\int_T \left| \mathrm{G}_H(M, M_\mathbf{0}) \right|^2 \Delta_\sigma^2(M_\mathbf{0})\, dT_{M_\mathbf{0}}}\,(1+C)\max\left| \mathrm{grad}\, \mathbf{E} \right|. \end{aligned} \tag{38}$$

Теорема доказана.

Заключение

Для описанного в статье метода приведено доказательство сходимости и получена оценка погрешности аппроксимации с первым порядком в среднеквадратичной норме внутри аномалии. Для точек, расположенных вне аномалии, доказана поточечная сходимость с первым порядком.

Данный метод был программно реализован и на его основании были проведены расчеты для квази-трехмерной задачи о береговом эффекте, показавшие его высокую эффективность не только для расчета поля на большем расстоянии от аномалии, но для расчета поля на её границе.

Литература

1. Дмитриев В.И. Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. М.: МАКС Пресс, 2008.
2. Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007.
3. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.