

Об одной модификации проекционного метода решения интегрального уравнения I-го рода.

Введение

Общая схема проекционного метода решения линейных уравнений I-го рода $Az = u$ в гильбертовом пространстве основана на разложении решения в ряд по собственным функциям самосопряженного оператора A^*A [1].

Этот метод является эффективным для численного решения широкого класса интегральных уравнений. В то же время, для интегральных уравнений с ядрами специального вида возможны модификации метода, учитывающие особенности данной задачи и позволяющие его улучшить.

В работе рассматривается проекционный метод для задачи решения интегрального уравнения вида

$$Az = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a z(x) \sin(kx) dx = u(k), \quad A: L_2[0, a] \rightarrow L_2[0, a], \quad 0 < a < \infty, \quad (1)$$

где правая часть задана приближенно. Особенность уравнения (1) заключается в том, что у оператора A имеется кратное (с вычислительной точки зрения) собственное значение. Это приводит к ухудшению регуляризованного решения в случае, когда использованное в проекционном методе количество собственных функций, отвечающих этому собственному значению, меньше чем его кратность n_* .

Таблица 1.

i	$\lambda_i, a=7.2$	$\lambda_i, a=7.2$
0-6	1	1
7	1	1
8	0.9999999999999996	1
9	0.99999999999998633	0.9999999999999858
10	0.999999999849653	0.99999999971643
11	0.999999980489684	0.99999997527337
12	0.999998191346452	0.999999741949046
13	0.999882241518466	0.999980816450991
14	0.994893326912968	0.999013408619727
15	0.882370307390302	0.968523458810299
16	0.321844402696205	0.621639040768762
17	0.033803082062030	0.096337868230867
18	0.016325078285978	0.025300752430460
19	0.000588586333134	0.003244899768946
20	1.11922529626E-05	7.63921759698E-05
21	1.54996942481E-07	1.24653700318E-06
22	1.64364031345E-09	1.53437028289E-08
23	1.37368373807E-11	1.47552770038E-10
24	9.23908756700E-14	1.13528572722E-12
25	6.26347582237E-16	7.10622426787E-15
26	5.79605648798E-16	5.79436697074E-16
27	5.67751223296E-16	5.08706421342E-16

В таблице 1. приведены собственные значения, полученные для оператора A^*A задачи (1) при $a=7.2$ и $a=7.3$.

Результаты расчетов показывают, что $n_a=8$ и $n_a=9$ соответственно, для собственного значения 1 с точностью 10^{-14} . Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, обозначим $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n_a-1}$.

Нечетные функции Эрмита $\{\Psi_i\}$ являются собственными функциями синус-преобразования Фурье ($a=\infty$) и образуют полную ортонормированную систему в $L_2[0, \infty)$. В то же время, с вычислительной точки зрения, каждая из этих функций сосредоточена на конечном отрезке (смотри, например, [2,3]). В связи с этим, первые нечетные функции Эрмита близки к собственным функциям оператора A^*A задачи (1) с $a < \infty$.

Иллюстрацией этого являются рисунки 1 и 2. На рисунке 1 изображены графики функций φ_7 и φ_8 .

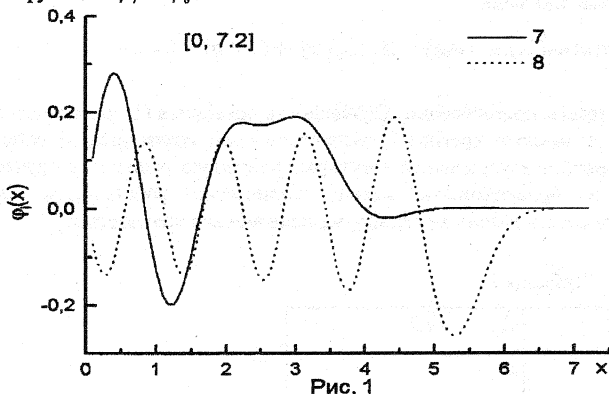


Рис. 1

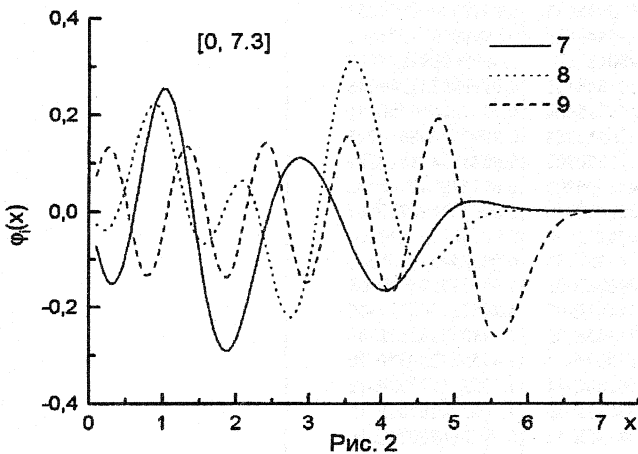


Рис. 2

Последняя соответствует следующему за единицей в порядке убывания собственному значению и близка к восьмой нечетной функции Эрмита Ψ_8 , в то время как первые восемь близки к линейным комбинациям нечетных функций Эрмита меньшего порядка. Соответствующие графики для $a=7.3$ представлены на рисунке 2. В данной работе предложена модификация проекционного метода решения интегрального уравнения (1), основанная на замене собственных векторов, соответствующих кратному собственному значению, нечетными функциями Эрмита - собственными функциями синус-преобразования Фурье на полупрямой.

1. Проекционный метод решения задачи (1)

Для уравнения (1) имеет место теорема единственности решения. В то же время, поскольку оператор A является вполне непрерывным, данная задача является некорректно поставленной вследствие отсутствия устойчивости решения относительно возмущения функции $u(k)$.

Пусть вместо точной правой части \bar{u} , которой соответствует единственное решение \bar{z} , нам заданы u_δ и δ такие, что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$ (здесь и далее, если это не указано явно, рассматривается норма в пространстве $L_2[0, a]$). Рассмотрим общую схему проекционного метода приближенного решения уравнения (1).

По теореме Гильберта-Шмидта существует ортонормированный базис $\{\varphi_i\}$ собственных векторов оператора A^*A :

$$A^*A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad \lambda_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Будем считать, что элементы φ_i упорядочены по невозрастанию собственных значений.

Система элементов $\psi_i = \frac{A\varphi_i}{\|A\varphi_i\|}$ также образует ортонормированный базис в $L_2[0, a]$. Из

полноты системы $\{\psi_i\}$ следует существование такого минимального натурального n ,

что

$$\left\| \sum_{i=0}^n u_i \psi_i - u_\delta \right\| \leq q\delta, \quad u_i = \int_0^a u_\delta(k) \psi_i(k) dk, \quad q > 1. \quad (3)$$

Тогда для приближенного решения

$$z_\delta = \sum_{i=0}^n z_i \varphi_i, \quad z_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} u_i \quad (4)$$

имеет место сходимость к точному [1]:

$$\|z_\delta - \bar{z}\| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

2. Модификация проекционного метода

При численной реализации стандартной схемы проекционного метода для решения задачи (1) элементы φ_i , ψ_i и λ_i вычисляются с некоторой погрешностью. При этом ключевой характеристикой метода является малость величин

$$\|A^*A\varphi_i - \lambda_i\varphi_i\|, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Основная идея модифицированного метода для задачи (1) заключается в замене φ_i и ψ_i на нечетные функции Эрмита, $\lambda_i = 1$, для которых нормы (5) малы. В таблице 2 для сравнения приведены значения норм (5) для собственных функций оператора A^*A и для нечетных функций Эрмита при $\alpha = 10$.

Таблица 2.

i	λ_i	$\ A^*A\varphi_i - \lambda_i\varphi_i\ $	$\ A^*A\psi_i - \psi_i\ $	$\ \Psi_i\ _{L_1(a,\infty)}$
0-12	1	<5.0E-015	<2.0E-8	<3.0E-8
13	1	1.219784858271E-15	7.312209037622E-07	8.077611476000E-07
14	1	1.116770652246E-15	3.358341359278E-06	4.052869310664E-06
15	1	8.714688070289E-16	1.676451340239E-05	1.835826687607E-05
16	1	9.360597373606E-16	6.407107793539E-05	7.527006563502E-05
17	1	1.055518835237E-15	0.0002578181604061	0.0002797580350367
18	1	1.209893124380E-15	0.0008263806083975	0.0009432554810973
19	1	1.177157743598E-15	0.0026837056250902	0.0028849571646793
20	1	2.119321478419E-10	0.0072258447571151	0.0079969826696872
21	1	1.042737705547E-15	0.0188389264090979	0.0200537823674706
22	0.999999999999999	1.167731464576E-14	0.0423583744533074	0.0453608616605188
25	0.99999999896346	3.209790701703E-06	0.258796445928454	0.268822179613172
28	0.99988644231049	0.0022794228495231	0.507805222699446	0.503985958359575
31	0.52685623928514	0.105317496378646	0.554957111463045	0.560788507574266
34	0.00346462914266	0.0040648730282362	0.605251535868051	0.60153991379032
37	7.1217660768E-08	2.100845761688E-07	0.626651633376652	0.63300209326007
40	2.5714426723E-13	2.274316763959E-12	0.654951280683306	0.65316049130603

Нормированные функции Эрмита определяются соотношением [4]

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

где

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} - \text{полином Эрмита.}$$

Нечетные функции Эрмита $\Psi_n(x) = \Phi_{2n+1}(x)$ являются собственными функциями синус-преобразования Фурье на полупрямой:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Psi_n(x) \sin(kx) dx = (-1)^n \Psi_n(k). \quad (7)$$

Для их вычисления можно использовать рекуррентное соотношение

$$\Psi_{n+1}(x) = \frac{2x^2 - 4n - 3}{\sqrt{(2n+2)(2n+3)}} \Psi_n(x) - \sqrt{\frac{2n(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}} \Psi_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\Psi_0(x) = 2x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Psi_{-1}(x) \equiv 0.$$

Теорема: при $a \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|A^* A \Psi_n(x) - \Psi_n(x)\| \leq 2 \|\Psi_n(x)\|_{L_2[a, \infty)}. \quad (8)$$

Доказательство: введем оператор синус-преобразования Фурье на полупрямой:

$$Fz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z(x) \sin(kx) dx, \quad F: L_2[0, \infty) \rightarrow L_2[0, \infty).$$

Тогда

$$A^* A \Psi_n(x) = F^* F \Psi_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} (F \Psi_n(x)) \sin(kx) dk - A^* \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} \Psi_n(x) \sin(kx) dx \right).$$

Используя свойство нормы и соотношение (7) получим:

$$\|A^* A \Psi_n(x) - \Psi_n(x)\| \leq \|G(x)\| + \|A^* G(k)\|, \quad \text{где } G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{\infty} \Psi_n(\xi) \sin(\xi x) d\xi.$$

Для любой функции $f(x)$, $x \in [0, \infty)$ определим функции

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, a] \\ 0, & x > a \end{cases} \quad \text{и} \quad f^{(2)}(x) = f(x) - f^{(1)}(x).$$

Тогда

$$\|G(x)\|^2 = \|F^* \Psi_n^{(2)}(k)\|^2 \leq \|F^* \Psi_n^{(2)}(k)\|_{L_2[0, \infty)}^2.$$

Из теоремы Парсеваля [5] следует, что:

$$\|G(x)\|^2 \leq \|\Psi_n^{(2)}(x)\|_{L_2[0, \infty)}^2 = \|\Psi_n(x)\|_{L_2[a, \infty)}^2.$$

Аналогичная оценка верна и для второго слагаемого:

$$\|A^* G(k)\|^2 = \|F^* G^{(1)}(k)\|^2 \leq \|F^* G^{(1)}(k)\|_{L_2[0, \infty)}^2 = \|G(x)\|^2 \leq \|\Psi_n(x)\|_{L_2[a, \infty)}^2,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание 1:

так как функции $\Psi_n(x)$ ортонормированны, то $\|\Psi_n(x)\|_{L_2[a, \infty)}^2 = 1 - \|\Psi_n(x)\|^2$.

Для вычисления $\|\Psi_n(x)\|^2$ можно использовать рекуррентное соотношение

$$\|\Psi_n(x)\|^2 = \|\Psi_{n-1}(x)\|^2 - \frac{1}{2a} \left(\Psi_n^2(a) + \frac{4n+1}{\sqrt{2n(2n+1)}} \Psi_n(a) \Psi_{n-1}(a) + \Psi_{n-1}^2(a) \right).$$

Замечание 2: априорная оценка для правой части неравенства (8) может быть получена, например, используя оценку:

$$\|\Psi_n(x)\|_{L_2[a, \infty)}^2 \leq \frac{16n! \sqrt{(2n-1)!}}{2^n \sqrt{\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}. \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что функции Ψ_n близки к собственным функциям операторов A и A^*A . Если существует такое минимальное неотрицательное целое $n < n_a$, что

$$\left\| \sum_{i=0}^n u_i \Psi_i - u_\delta \right\| < \delta, \quad u_i = \int_0^a u_\delta(k) \Psi_i(k) dk,$$

то соответствующие формулы для приближенного решения примут вид

$$z_\delta = \sum_{i=0}^n z_i \Psi_i, \quad z_i = (-1)^i \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_i.$$

3. Результаты расчетов

Тестовые расчеты проводились на отрезке $[0,10]$. В модельную функцию была внесена десятипроцентная равномерно распределенная ошибка $\delta = 0.1 \|u(k)\| = 0.245$ (см. Рис. 3). После чего было получено решение по стандартной и модифицированной схемам (см. рисунок 4)

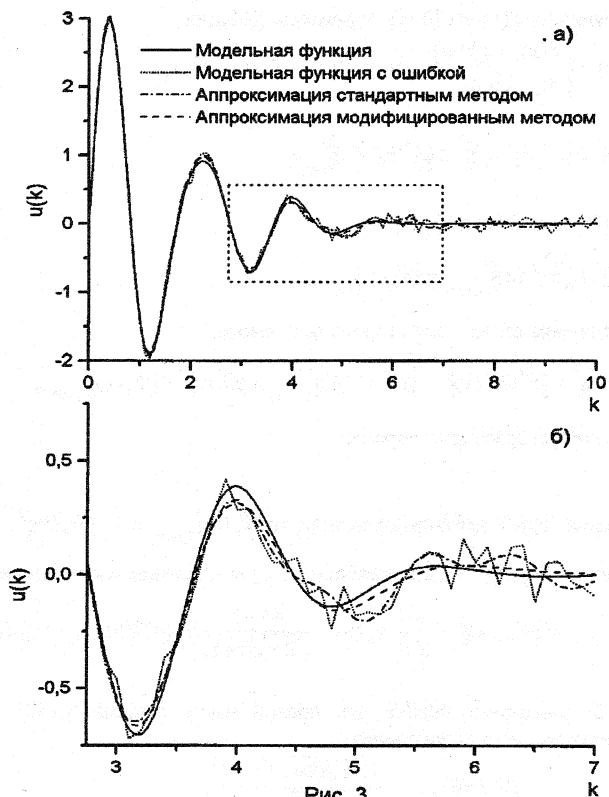


Рис. 3

Для расчетов стандартным методом потребовалось вычислить 21 собственную функцию, при этом мы получили погрешность аппроксимации $\|u_c - u_s\| = 0.21$. В случае с модифицированным методом было взято всего 9 нечетных функций Эрмита, что позволило аппроксимировать исходную функцию с погрешностью $\|u_m - u_s\| = 0.222$.

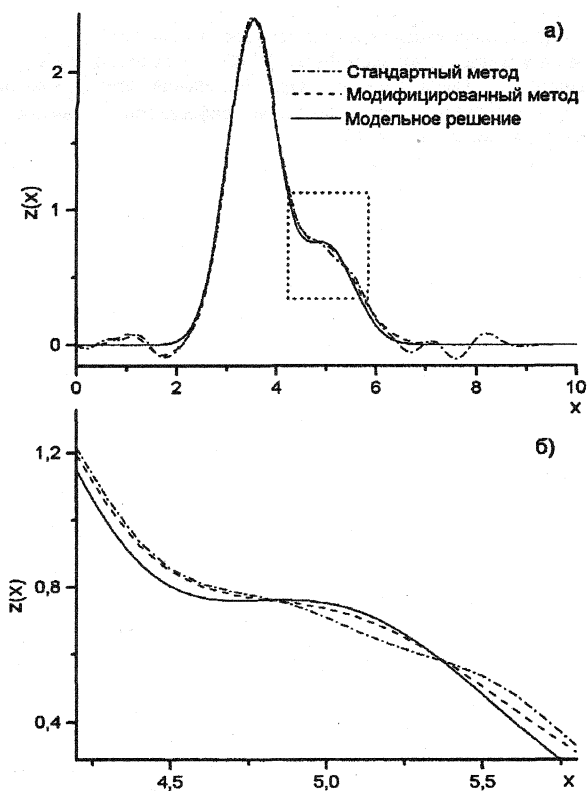


Рис. 4

Рис. 4а) и 4б) (увеличенная деталь рисунка 4а)) показывают эффективность предложенной модификации проекционного метода для решения задачи (1). Аналогичная модификация проекционного метода может быть также построена для решения интегрального уравнения первого рода, возникающего при замене верхнего предела интегрирования на конечный в интегральном преобразовании Ганкеля. При этом разложение решения, после замены переменных, будет проводиться по системе функций Лагерра [6].

Авторы благодарны А.М.Денисову за полезные обсуждения и высказанные замечания.

Литература

1. Денисов А.М., Введение в теорию решения обратных задач, М.:Изд-во МГУ, 1994.
2. Крылов А.С., Лякишев А.В., «Неравенство для норм функций Эрмита на конечном интервале», Вестн. Моск. Ун-та, сер. 15, вычисл. матем. и киберн., 1999, N1, с. 17-19.
3. Krylov A.S., Liakishev A.V., "Numerical Projection Method for Inverse Fourier Transform and Its Application", Numerical Functional Analysis & Optimization, 2000, vol. 21, issues 1 & 2, pp. 205-216.
4. Суетин П.К., Классические ортогональные многочлены, М.: Наука, 1976.
5. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, ОГИЗ «Гостехиздат», 1948.
6. Крылов А.С., Лякишев А.В., "Проекционный метод обращения преобразования Ганкеля по данным на конечном интервале", Тезисы докладов конференции "Обратные и некорректно поставленные задачи", М.:МГУ, 1999, с. 40.