

Е.Д. Куретова¹, Е.С. Куркина¹, В.А. Ковалев²

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАГРЕВА ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОЙ ТРУБКЕ ВО ВРЕМЯ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК*

Введение

Вопрос о механизме нагрева солнечной короны до температуры ~ 2МК до сих пор остается открытым. Согласно обзору [1], наиболее вероятно одновременное действие нескольких механизмов: диссипации электрических токов и диссипации альвеновских и магнитозвуковых волн. В случае спорадических явлений – вспышек (длительностью от минут до десятков минут), сопровождающихся дополнительным нагревом локальных областей короны – магнитных трубок до ~ 20МК, механизм нагрева также остается пока неопределенным. Бесспорным можно лишь считать вывод о том, что во время вспышки происходит высвобождение накопленной энергии магнитного поля активной области [2].

Выяснение механизма нагрева вспышечной плазмы возможно по изучению газодинамического отклика. В [3], [4] с помощью анализа рентгеновского излучения было показано, что на ранней фазе вспышки нагрев плазмы происходит в ускоренном (сверхэкспоненциальном, с уменьшением временного масштаба) режиме. Частным случаем этого режима является режим с обострением, при котором температура асимптотически стремится к бесконечности за конечное время. Режимы с обострением интересны тем, что при определенных условиях они реализуются в виде нестационарных структур - локализованных областей интенсивного выделения тепла [5], [6]. Ясно, что в реальности с ростом температуры усиливается действие факторов, которые каким-либо образом замедляют нагрев. Однако в течение некоторого времени именно взрывной режим роста температуры является определяющим процессом, который отвечает за формирование и взаимодействие пространственных тепловых структур. Интенсивное исследование режимов с обострением началось с 70-х годов прошлого века в связи с изучением процессов термоядерного горения плазмы [6].

¹ МГУ им. М.В.Ломоносова, факультет ВМК.

² ИЗМИРАН им. Н.В.Пушкова РАН.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты: 18- 01-00436, 17-02-00-308.

В работах [7], [8] на основе нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла были построены и изучены короткоживущие локализованные структуры, которые могут возникать либо вдоль, либо поперек магнитного поля. Предполагается, что источниками вспышечного нагрева (с температурной зависимостью $\sim T^{3/2}$) являются коллапсирующие магнитные ловушки, формирующиеся в результате перетяжек магнитной трубки [9].

В соответствии с экспериментальными данными были подобраны функции, описывающие источник нагрева и коэффициенты теплопроводности. В результате удалось объяснить некоторые эффекты (например, эффект уменьшения меры эмиссии).

В настоящей работе рассматривается двумерная модель, описывающая динамику выделения тепла в цилиндрически симметричной магнитной трубке во время вспышки на Солнце. В основе модели лежит нелинейное двумерное уравнение теплопроводности с объемным источником тепла и анизотропным коэффициентом теплопроводности. Возможные типы двумерных структур, развивающихся в режиме с обострением, которые возникают в цилиндрически-симметричной трубке при разных значениях параметров, исследованы в работе [10].

Модель нагрева плазмы в цилиндрической магнитной трубке

1) Построим модель, описывающую динамику роста температуры во время солнечной вспышки. Согласно [4], вспышка 5.07.2009г. происходила в магнитной трубке на ненулевом температурном фоне порядка 0.7 кэВ при некоторых сверхкритических возмущениях фона. Предполагается, что на рассматриваемой стадии вспышки конвективными процессами в плазме можно пренебречь. В результате нагрева формируются тепловые структуры в виде пучка тонких горячих нитей, погруженных в более холодную фоновую плазму, вытянутых вдоль магнитного поля трубки и имеющих характерные размеры порядка 10^3 км в длину и, предположительно, 10–100 метров толщиной.

Уравнение энергии для неподвижной вспышечной плазмы в магнитной трубке с объемным источником тепла и лучистым охлаждением может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \text{div}(\lambda T^\sigma \text{grad}T) + Q(T) - n^2 L(T) + Q_0, \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon = 3nk_B T$ – внутренняя энергия, n – концентрация заряженных частиц в плазме, k_B – постоянная Больцмана. Считается, что

плазма является квазинейтральной: $n_e = n_i = n$; при $T \approx 10^7 K$ $n = 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Известно, что быстрый нагрев в режиме с обострением может быть обусловлен объемным источником тепла, главный член разложения которого имеет степенной вид $Q(T) \sim T^\beta$, с показателем степени $\beta > 1$ [5]. В нашем случае $\beta = 1.5$ [9].

Лучистое охлаждение учитывается в приближении оптически прозрачной полностью ионизированной плазмы. $L(T)$ – известная немонотонная функция, обычно представляемая в кусочно-степенном виде [11]. Для рассматриваемого диапазона температур она гипотетически имеет вид $L(T) \sim T^{-\alpha}$, где $\alpha \approx 0.5$. Для фоновой температуры $T_0 \approx 7 \times 10^6 K$ (до вспышки) значение этой функции составляет $L(T_0) \approx 7 \times 10^{-23} \text{ эрг см}^3 \text{ с}^{-1}$.

Коэффициент теплопроводности плазмы вдоль магнитного поля, обусловленной электронами, имеет вид [12]:

$$\lambda_e(T) = \lambda_e^0 \times T^{5/2},$$

где $\lambda_e^0 = 1.84 \times 10^{-4} \Lambda^{-1}$, Λ - кулоновский логарифм; для рассматриваемого диапазона температур $\Lambda \approx 15$.

Коэффициент теплопроводности плазмы поперек магнитного поля, обусловленной ионами, имеет вид [12]:

$$\lambda(T) = \lambda_i^0 \times T^{-1/2},$$

где $\lambda_i^0 = 3 \times 10^{-16} \frac{n^2}{B^2}$, $B = 100 \text{ Гс}$ - напряженность магнитного поля.

Отметим, что в рамках уравнения (1) может быть описана только стадия нагрева вспышечной плазмы. В данной работе ставилась задача найти решения этого уравнения, представляющие собой нестационарные структуры в виде длинных нитей, вытянутых вдоль магнитной трубки с характерными размерами порядка 10^2 м в диаметре и 10^3 км в длину.

2) Для уравнения (1) поставим следующую задачу. Будем рассматривать область пространства, представляющую собой цилиндрическую трубку длиной L и радиусом R . В этой области будем искать радиально-симметричные решения исходного уравнения. Для этого запишем исходное нелинейное уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат, исключив зависимость от угловой координаты φ :

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r T^{\sigma_1} r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z T^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q(T), \quad (2)$$

где температура $T = T(r, z, t)$, $0 < r < R$ – радиальная составляющая полярных координат в поперечном сечении трубки, $-L/2 < z < L/2$ – координата вдоль оси цилиндра. $C = 3nk_B$, $\lambda_r T^{\sigma_1}$ и $\lambda_z T^{\sigma_2}$ – коэффициенты теплопроводности в поперечном и продольном направлениях трубки, $\lambda_r = \lambda_r^0$, $\lambda_z = \lambda_z^0$, $\sigma_1 = -0.5$, $\sigma_2 = 2.5$.

Будем рассматривать обобщенный источник следующего вида:

$$Q(T) = Q_1 - Q_2, \quad (3)$$

$$\text{где } Q_1(T) = q_0(T^{\beta_1} - T_1^{\beta_1})(T^{\beta_2} - T_2^{\beta_2}), \quad (4)$$

$$Q_2(T) = AT^{-\alpha}, \quad (5)$$

$$\beta_1 + \beta_2 = 1.5, \quad \alpha = 0.5.$$

Объемный источник вида (4) использовался нами ранее в одномерных моделях ([7],[8]) для описания вспышек, происходящих либо вдоль, либо поперек магнитного поля. Такой источник нагрева имел необходимую для развития режима с обострением асимптотику $Q(T) \cong q_0 T^\beta$, а также обеспечивал наличие двух пространственно-однородных стационаров, что позволяло описать формирование структур на ненулевом температурном фоне.

В данной работе источник нагрева $Q_1(T)$ имеет аналогичный вид, однако учтено также лучистое охлаждение плазмы в ходе вспышки $Q_2(T)$. Заметим, что при выбранных параметрах функцию источника можно приближенно представить в виде $Q(T) \cong Q_0 + q_0 T^\beta - AT^{-\alpha}$, где $\beta = \beta_1 + \beta_2$, что соответствует уравнению (1).

Значение коэффициента A определяется из соотношения $Q_2(T_0) = n^2 L(T_0)$. Константу q_0 определим, исходя из условия, что фоновое значение температуры T_0 является устойчивым стационаром источника $Q(T)$, то есть в отсутствии вспышки нагрев уравновешивается охлаждением $Q(T_0) = Q_1(T_0) - Q_2(T_0) = 0$.

Делая замену переменных $T = T_0 \tilde{T}$ и подставляя найденные коэффициенты A и q_0 , сведем уравнение (2) к следующему уравнению для безразмерной температуры \tilde{T} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi_r \tilde{T}^{\sigma_1} r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\chi_z \tilde{T}^{\sigma_2} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \right) + \\ + q_1 (\tilde{T}^{\beta_1} - \tilde{T}_1^{\beta_1}) (\tilde{T}^{\beta_2} - \tilde{T}_2^{\beta_2}) - q_2 \tilde{T}^{-\alpha} \end{aligned} \quad (6)$$

где $\chi_r = \frac{\lambda_r}{3k_B n} T_0^{\sigma_1}$, $\chi_z = \frac{\lambda_z}{3k_B n} T_0^{\sigma_2}$,

$$\tilde{T}_1 = \frac{T_1}{T_0}, \quad \tilde{T}_2 = \frac{T_2}{T_0}$$

$$q_1 = \frac{nL(T_0)}{3k_B T_0} \times \frac{1}{(1 - \tilde{T}_1^{\beta_1})(1 - \tilde{T}_2^{\beta_2})}, \quad q_2 = \frac{nL(T_0)}{3k_B T_0}.$$

Полученное уравнение имеет три однородных стационара $\tilde{T}_{st_1} < \tilde{T}_{st_2} < \tilde{T}_{st_3}$, из которых один устойчивый $\tilde{T}_{st_2} = 1$, соответствующий фоновой температуре T_0 , и два неустойчивых. Меньший из неустойчивых стационаров \tilde{T}_{st_1} близок к нулю и находится вне рассматриваемого диапазона температур, а больший \tilde{T}_{st_3} , напротив, находится правее единицы и определяет уровень критических возмущений фона.

Коэффициенты уравнения определяются в соответствии с приведенными выше физическими параметрами. Свободными параметрами в уравнении являются величины \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 , определяющие значения неустойчивых стационаров, а также показатели β_1 и β_2 , для которых должно выполняться равенство $\beta_1 + \beta_2 = 1.5$.

Уравнение (6) рассматривается в цилиндрической области пространства $0 < r < R$, $-L/2 < z < L/2$.

На границе области ставятся условия Неймана:

$$-T^{\sigma_1} \frac{\partial T}{\partial r}(R, z, t) = 0,$$

$$T^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial z}(r, -L/2, t) = 0, \quad -T^{\sigma_2} \frac{\partial T}{\partial z}(r, L/2, t) = 0$$

На оси симметрии при $r = 0$ ставится условие

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Вспышка инициируется заданием начального финитного возмущения фоновой температуры в небольшой области в центре трубки, которое имеет вид:

$$\tilde{T}(r, z, 0) = \begin{cases} \tilde{T}_{st_2} + \Delta\tilde{T} \cos^2 \frac{\pi r}{2\Delta r} \cos^2 \frac{\pi z}{2\Delta z}, & r \in [0, \Delta r], z \in [-\Delta z, \Delta z] \\ \tilde{T}_{st_2}, & r \in (\Delta r, R], z \in [-L/2, -\Delta z) \times (\Delta z, L/2] \end{cases} \quad (7)$$

Результаты расчетов

В расчетах рассматривалась область размера $R = 1$ км, $L = 4 \times 10^3$ км. Отметим, что область выбиралась достаточно большой, так, чтобы граничные условия не влияли на ход процесса. Для численного решения поставленной двумерной задачи использовалась схема переменных направлений. Использовалась равномерная сетка по радиусу и по оси z с шагами $h_r = 0.01$ и $h_z = 0.5$, соответственно, и переменный шаг по времени.

Ранее в работах [7], [8], [10] были подробно исследованы решения нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла, описывающего процесс горения в анизотропной среде на ненулевом температурном фоне. Было показано, что развитие режима с обострением на фоне начинается при некоторых сверхкритических возмущениях. Возмущения ниже критических затухают. Типы получаемых режимов зависят от соотношений между показателями степенных зависимостей коэффициентов теплопроводности и источника от температуры. В функции источника при этом определяющей является только старшая степень разложения $Q(T) \sim T^\beta$. При $\beta = \sigma + 1$ на развитой стадии процесса горения имеет место S-режим, при $\beta > \sigma + 1$ – LS-режим, и при $1 < \beta < \sigma + 1$ – HS-режим. Эффективная локализация процесса горения на фоне имеет место в S и LS режимах, при этом возникают нестационарные структуры с постоянной или сокращающейся полушириной. В HS-режиме процесс горения не локализован в пространстве.

В рассматриваемой задаче старшей степенью в источнике является $\beta = \beta_1 + \beta_2$, для которой выполняются соотношения $\sigma_1 + 1 < \beta < \sigma_2 + 1$. Это соответствует так называемому LS-HS-режиму; первое условие обеспечивает сжатие структуры в LS-режиме по одному направлению, второе условие – расширение области интенсивного горения по другому направлению в HS-режиме.

На Рис.1 приведены результаты расчетов, выполненных для значений параметров $\beta_1 = \beta_2 = 0.75$, $\tilde{T}_1^{\beta_1} = 1.0002$, $\tilde{T}_2^{\beta_2} = 1.0004$. Для сравнения с данными наблюдений результаты приведены в реальных пространственно-временных масштабах и для реальных значений температур.

На Рис. 1 (а) изображено температурное поле в сечении трубки при $r = 0$ вдоль оси z . Горение среды было инициировано заданием начального возмущения вида (7), где $\Delta r = 0.3$ км, $\Delta z = 50$ км, $\Delta \tilde{T} = 1$. Минимальное значение температуры (фон) отображается черным цветом, максимальное – белым, промежуточные значения – градацией серого цвета. Результаты приведены для трех последовательных моментов

времени: $t_1 = 0$, $t_2 = 8.54 \times 10^{-3} c$, $t_3 = 8.87 \times 10^{-3} c$. На рис. 1 (b),(c) показаны профили температуры по радиальному направлению и вдоль оси цилиндра, соответственно, для тех же моментов времени.

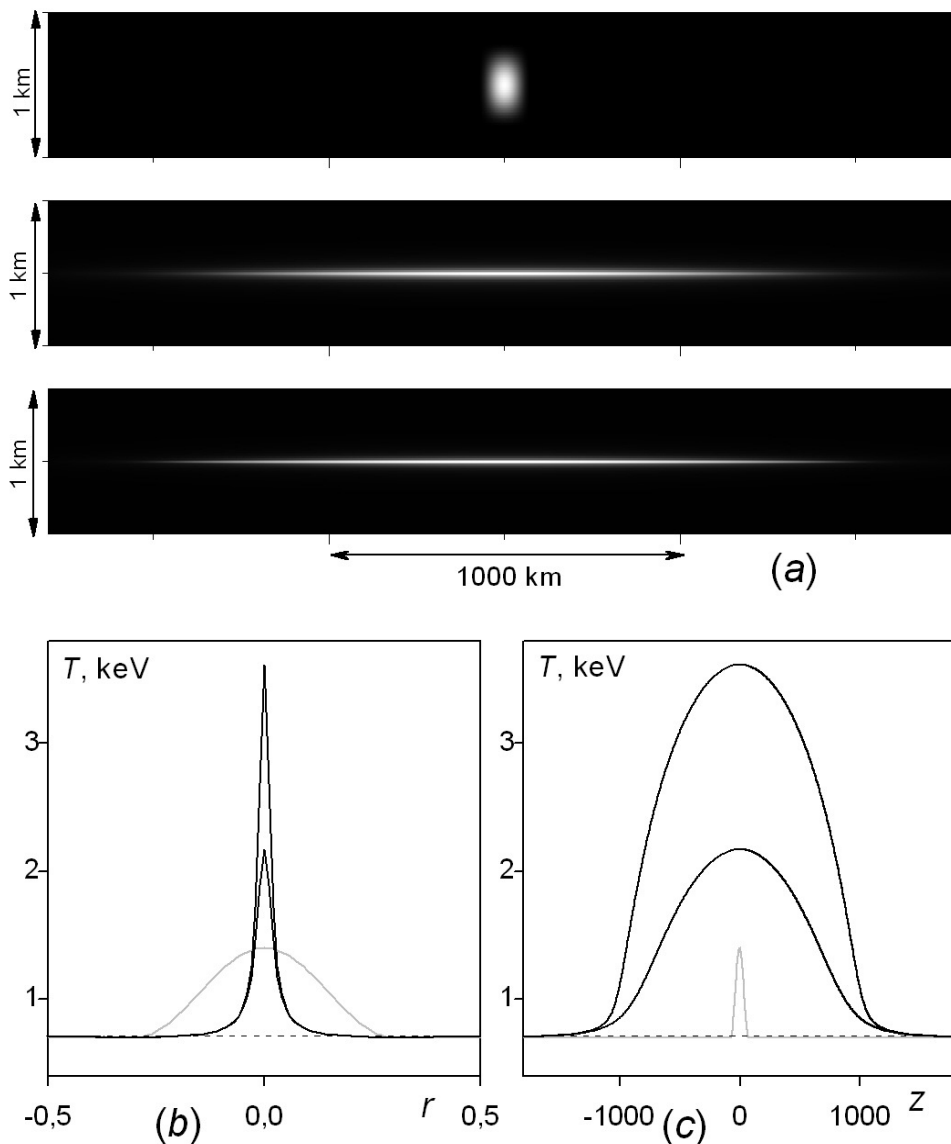


Рис. 1. (a) - температурное поле в сечении трубки $r = 0$, (b) и (c) - профили температуры по радиальному направлению и по оси z , соответственно.

Из рисунка видно, что в рассматриваемой области пространства формируется нитевидная структура, вытянутая вдоль оси цилиндра. Диаметр поперечного сечения структуры уменьшается с течением времени в соответствии с LS-режимом, а длина, напротив, растет в соответствии с HS-режимом. К моменту достижения максимальной температуры порядка $T \approx 3.5 \text{ кэВ}$ размеры структуры составляют более

тысячи километров в длину и несколько десятков метров в поперечном сечении.

Незначительно изменяя значения свободных параметров, можно построить аналогичные решения, описывающие вспышки с другими пространственными размерами и энергиями.

Заключение

В работе предложена математическая модель, описывающая начальную фазу вспышечного нагрева в короне Солнца. В основе модели лежит нелинейное уравнение теплопроводности со знакопеременным объемным источником тепла, к которому сводится уравнение энергии неподвижной плазмы.

В работе предложен вид функции источника, позволяющий описать формирование вспышечных структур на ненулевом температурном фоне. Функция отражает степенную зависимость источника нагрева от температуры, а также учитывает лучистое охлаждение плазмы в ходе вспышки.

Параметры модели вычислялись в соответствии с реальными физическими данными. Свободные параметры модели были подобраны так, чтобы адекватно описать ряд наблюдаемых в ходе вспышки эффектов.

В результате проведенных расчетов было показано, что данная математическая модель описывает формирование мелкомасштабных вспышечных структур в короне Солнца в виде тонких горячих нитей, вытянутых вдоль магнитного поля трубки. Пространственные характеристики полученных тепловых структур соответствуют результатам наблюдений. Свойства полученных решений позволяют объяснить такие явления как, например, наблюдаемый на ранней фазе вспышки эффект уменьшения меры эмиссии [4].

Литература

1. Бадалян О.Г., Обридко В.Н. К проблеме нагрева солнечной короны // Письма в Астрон. ж. 2007. Т.33, С. 210-220.
2. Сомов Б.В. Космическая электродинамика и физика Солнца. М.: Изд-во МГУ, 993с.
3. Биленко И.А., Ковалев В.А., О режимах нагрева во время солнечных вспышек// Письма в Астрон. журн., 35, 873, 2009.

4. Ковалев В.А., Костюченко И.Г. Савченко М.И., Чариков Ю.Е. //Режимы нагрева и «испарения» плазмы во время солнечной вспышки 05.07.2009. Пулковский сборник, 2010 г.
5. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.
6. Режимы с обострением: эволюция идеи //Под ред. Г.Г. Малинецкого. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.
7. E. S. Kurkina , E. D. Kuretova, V. A. Kovalev «Formation of thermal structures with blowup during solar flares //Computational Mathematics and Modeling, Vol. 26, No. 2, 2015, pp. 144-155.
8. E. S. Kurkina, Yu. V. Troshchiev, V. A. Kovalev, E. D. Kuretova «Small-scale heat localization with blowup in the magnetic-tube cross section during a solar flare»// Computational Mathematics and Modeling, Vol. 27, No. 4, 2016, pp. 295-416.
9. Ковалев В.А. Нелинейный источник нагрева во время солнечной вспышки // Нелинейный мир, 2010, Т.8, №11, с.717-723.
10. Е.Д. Куретова, Е.С. Куркина Динамика режимов с обострением в цилиндрической трубке// Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. – М.: МАКС Пресс, 2018, №57, с.50-68.
11. Dere K.P., Landi E., Young P.R., Del Zanna G., Landini M., Mason H.E. // Astron. Astrophys. 2009. V. 498. P. 915.
12. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы (под ред. Леонтовича М.А.), вып. 1, Атомиздат. 1963. Т. 1. С.183- 275.