

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРА ДВУМЕРНЫХ ТЕПЛОВЫХ СТРУКТУР, РАЗВИВАЮЩИХСЯ В РЕЖИМЕ С ОБОСТРЕНИЕМ¹

Введение

В работе рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры. Оно описывает процессы, развивающиеся в режиме с обострением [1]-[3], в которых температура в некоторой области пространства, или хотя бы одной точке, обращается в бесконечность за конечное время, называемое временем обострения. Режимы с обострением имеют много важных приложений в различных областях науки: в физике плазмы [4], астрофизике, химической кинетике, экологии, эпидемиологии, экономике [5]-[7], демографии [8]-[10] и других [11].

Нелинейное уравнение теплопроводности изучалось многими зарубежными и отечественными учеными, в частности, Самарским А.А., Курдюмовым С.П. и их учениками. Монография [2] и сборник [1] отражает многие результаты, полученные до 1995 г., обзор [3] содержит ссылки на более поздние работы. В этих работах выявлена особая роль автомодельных, или инвариантно-групповых решений рассматриваемого нелинейного уравнения. Показано, что они являются асимптотиками (аттракторами) многих решений задачи Коши с произвольными начальными данными, и описывают все типы диссипативных структур, которые могут возникнуть в данной нелинейной среде.

Автомодельная задача при некоторых значениях параметров имеет не единственное решение, а конечный спектр собственных функций (СФ), описывающих структуры разной сложности. Свойства одномерных радиально-симметричных структур изучались в работах [12] – [18]. В работах [19] – [21] был впервые проведен бифуркационный анализ автомодельных решений с помощью численных алгоритмов продолжения по параметру, который позволил установить число СФ в одномерном случае и их зависимость от значений параметров.

В связи с новыми приложениями нестационарных диссипативных структур в социологии [8]-[10], в частности, к проблемам коэволюции сложных систем [11], и в квантовой механике [22],[23], представляет интерес исследование спектра многомерных тепловых структур, которые являются решениями автомодельной задачи для уравнения нелинейной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-06-80254 и № 05-01-00852).

теплопроводности в пространстве. Впервые предположение о существовании многомерных структур со сложной областью локализации было сделано в работе [17]. Автомодельная задача в многомерном случае представляет собой краевую задачу для уравнения эллиптического типа. В работах [24]-[28] были впервые построены и исследованы двумерные автомодельные решения, описывающие горение среды в виде сложной структуры со многими максимумами. Недавно было установлено существование трехмерных тепловых структур, имеющих форму локализации в виде гантели, и др. Найдены двумерные и трехмерные структуры, представляющие собой многосвязные области горения, то есть содержащие внутри себя области с нулевой температурой [23], [29].

В настоящей работе проводится исследование спектра двумерных тепловых структур в широком диапазоне параметров. Автомодельные решения численно продолжают по параметру, и исследуется их эволюция с изменением параметра. Таким образом, удается найти области существования структур и изучить свойства спектра СФ в зависимости от значений параметров. В работе описаны все типы найденных структур и построен ряд бифуркационных диаграмм, наглядно демонстрирующих различные сценарии эволюцию СФ с изменением параметра.

1. Постановка задачи

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящими от температуры по степенному закону. Распределение температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в пространстве удовлетворяет уравнению нелинейной теплопроводности:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 T^\beta. \quad (1)$$

и граничным условиям на бесконечности:

$$\chi_0 T^\sigma \operatorname{grad} T \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0, \quad T \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2)$$

где $E = c_V T$, $c_V, \chi_0, q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > \sigma + 1$ – заданные параметры. Константы $\chi = \chi_0 / A c_V$, $q = q_0 / c_V$ положим равными единице.

Горение инициируется заданием некоторого начального распределения температуры $T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}) \leq M < \infty$.

Задача состоит в том, чтобы исследовать различные типы тепловых структур, которые могут возникать в заданной нелинейной среде. С этой целью рассматриваются автомодельные решения задачи (1) (2) вида:

$$T(r, \varphi, t) = g(t) \Theta(\xi, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (3)$$

где ξ – автомодельная переменная, а функции $g(t)$ и $\psi(t)$ находятся путем подстановки выражения (3) в уравнение (1) [14], [26]:

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta-1}, \quad n = \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}. \quad (4)$$

Автомодельное уравнение относительно функции $\Theta(\xi, \varphi)$ в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial r} (\xi \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \Theta^{\sigma+1} = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \Theta^\beta, \quad (5)$$

где τ – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (3).

Автомодельное уравнение иногда удобнее анализировать в декартовых координатах, где оно приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_1}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_2}) = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} (\xi_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \xi_2}) - \Theta^\beta. \quad (6)$$

Здесь $\Theta = \Theta(\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = x/\psi(t)$, $\xi_2 = y/\psi(t)$.

Из (3), (4) следует, что автомодельные решения развиваются в режиме с обострением при $\tau > 0$ (так как $\beta > 1$); тогда τ имеет смысл времени обострения.

Исследуются ограниченные решения уравнения (5) (или (6)), удовлетворяющие граничным условиям, соответствующим (2), и условию равенства нулю потока в центре симметрии.

$$\begin{aligned} \Theta|_{\xi=0} < \infty, \quad \Theta^\sigma \text{grad} \Theta|_{\xi=0} &= 0, \\ \Theta^\sigma \text{grad} \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Задача (5) или (6), (7) является задачей на собственные значения (СЗ) τ и собственные функции (СФ) $\Theta(\xi, \varphi)$. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, связаны преобразованием подобия [29], поэтому без ограничения общности положим $\tau = (\beta-1)^{-1}$, и найдем соответствующий ему спектр функций $\Theta(\xi, \varphi, \tau)$.

Исследования, проведенные ранее (см. например [12]-[15]) показали, что в зависимости от значения параметров β и σ существует три типа автомодельных решений с обострением. При $\beta \geq \sigma + 1$ они описывают локализованные процессы горения.

В настоящей работе рассматривается так называемый LS – режим. Он имеет место при $\beta > \sigma + 1$ и отвечает граничным условиям на бесконечности (7). Автомодельные решения в LS – режиме представляют собой

самоподобные нестационарные диссипативные структуры. Все точки такой структуры движутся к центру симметрии (так как $r(t) = \xi \cdot \psi(t)$ уменьшается со временем ($n > 0$) см. (4)) и растут в режиме с обострением, полуширина области горения сокращается, и температура при $t = \tau$ обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии.

Для дальнейших исследований удобно перейти к функции $U(\xi, \varphi) = \Theta^{\sigma+1}$ (или $U(\xi_1, \xi_2) = \Theta^{\sigma+1}$), тогда, уравнение (5) примет вид:

$$\Delta U + (\sigma + 1) \left\{ -\frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U^{1/(\sigma+1)} \right) + U^{\beta/(\sigma+1)} - U^{1/(\sigma+1)} \right\} = 0, \quad (8)$$

где ΔU – оператор Лапласа в полярной системе координат.

Из асимптотического анализа следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ собственные функции имеют асимптотику [14], [15], [19], [24]:

$$U \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} C(\theta, \varphi) \cdot \xi^{-p}, \quad p = \frac{2(\sigma + 1)}{\beta - \sigma - 1} > 0, \quad (9)$$

и удовлетворяют уравнению:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} U + pU = 0. \quad (10)$$

Задачи (5) (7) и (6) (7) исследовались ранее. Задача может иметь не единственное решение, а конечный спектр СФ, зависящий от соотношения между параметрами β и σ . Радиально-симметричные СФ являются частными решениями автомодельной задачи (5) (7) в полярной системе координат, независящие от угла; а одномерные СФ являются решениями задачи (6) (7) в декартовой системе координат, зависящие только от одной переменной. В последнем случае они представляют собой сходящиеся плоские волны. Одномерные и радиально-симметричные СФ подробно исследовались в работах [14]-[16] и других.

В работах [24]-[28] был разработан метод численного построения двумерных структур, впервые построены некоторые виды СФ в декартовой и полярной системах координат, сделана первая попытка их классификации. В работе [29] найдены новые типы сложных двумерных СФ и впервые построены трехмерные структуры. Разные СФ описывают структуры разной сложности, обладают разной симметрией и архитектурой строения.

Целью настоящей работы является исследование структуры спектра двумерных автомодельных решений в зависимости от значений параметров. Для этого проводится бифуркационный анализ с помощью вычислительных методов продолжения по параметру, изучается эволюция СФ с

изменением параметра и бифуркации, приводящие к рождению разных структур.

2. Спектр радиально-симметричных СФ

Как уже было сказано, одномерные и радиально-симметричные СФ являются частными решениями рассматриваемых автомодельных задач. Именно изучение свойств этих решений позволило высказать предположение о существовании многомерных СФ [17] и потом их построить. Кратко опишем свойства одномерных автомодельных решений.

Показано, что в LS – режиме автомодельная задача может иметь несколько СФ $\Theta_i(\xi)$, $i=1,2,\dots,N$, в зависимости от значений параметров β и σ . В одномерном случае и плоской геометрии их число определяется формулой [20]:

$$\begin{cases} N = [a], & \text{если } a - \text{нецелое, } a = \frac{\beta-1}{\beta-\sigma-1}, \\ N = a - 1, & \text{если } a - \text{целое} \end{cases} \quad (11)$$

Первая СФ имеет максимум в начале координат и монотонно убывает на интервале $(0, \infty)$. Следующие СФ являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. В области своей немонотонности они совершают колебания около пространственно-однородного (гомотермического) решения Θ_H уравнения (5) (или (6)):

$$\Theta_H = \text{const} = ((\beta-1)\tau)^{-1/(\beta-1)}. \quad (12)$$

(При выбранном значении $\tau = 1/(\beta-1)$, $\Theta_H \equiv 1$.) Нечетные СФ в начале координат имеют максимум с $\Theta_{2j+1}(0) > \Theta_H$, а четные – минимум с $0 < \Theta_{2j}(0) < \Theta_H$. Из формулы (11) следует, что при $\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1$ автомодельная задача в LS режиме имеет единственное решение – СФ $\Theta_1(\xi)$. При $\sigma + 1 < \beta < 2\sigma + 1$ спектр содержит несколько СФ. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ число СФ стремится к бесконечности.

Чем больше номер СФ, тем уже интервал по параметру β , в котором она существует. Проведенный анализ показал [19] - [21], что собственная функция Θ_j с номером $j = 2, 3, 4, \dots$ существует в интервале

$$\sigma + 1 < \beta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \frac{j(\sigma+1)-1}{j-1}. \quad (13)$$

Спектры СФ в радиально-симметричном случае при многих значениях параметров устроены аналогично плоскому случаю, и число СФ определяется формулой (11). Однако, при β близких к $\sigma + 1$ происходят качественные изменения в спектре: 1) четные СФ превращаются в так назы-

ваемые структуры с «дыркой», имеющие нулевую область в центре; 2) нечетные СФ, начиная с третьей выпадают из спектра. Чем ближе β к $\sigma+1$ тем больше в спектре четных СФ с дыркой, и тем больше нечетных СФ отсутствует в спектре.

Исследования показали, что СФ в области немонотонности хорошо описываются функцией $\Theta_j(\xi) \approx \Theta_H(1 + A_j u(\xi))$, где $u(\xi)$ – решение линеаризованного около Θ_H уравнения ($u(0) = 1, u'(0) = 0$):

$$\frac{1}{\xi^\nu} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^\nu \frac{du}{d\xi} \right) - \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{du}{d\xi} + (\beta - 1)u = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \quad (14)$$

а A_j – определенная амплитуда, своя для каждой СФ. Причем старшая СФ Θ_N в наибольшей области (по сравнению с областями для младших СФ) совпадает с решением линейного уравнения. Остальные СФ «передают» только одно, два и т. д. колебаний решения линейного уравнения в соответствии с их номером. Вне области немонотонности СФ быстро уменьшаются, и, начиная с некоторого значения $\xi > \xi_f(j)$, хорошо описываются асимптотическим уравнением (10). Таким образом, распределение температуры можно хорошо описать линеаризованным уравнением почти во всей ее области локализации. Этим свойством также обладают и многомерные СФ, что позволяет получать хорошие линейные приближения к многомерным структурам, а затем их строить.

3. Численные методы построения двумерных структур

Для численного построения двумерных СФ поставленную автомодельную задачу формулируют следующим образом: найти функцию $U(\xi, \varphi)$ (или $U(\xi_1, \xi_2)$), удовлетворяющую в некоторой области D (которую тоже надо найти) уравнению (8), а на границе области – условию (9), или уравнению (10). Тем самым отбрасывают близкую к нулю часть СФ и строят решение в ограниченной области, представляющей собой область локализации нестационарной тепловой структуры.

В настоящей работе применялась как декартова, так и полярная система координат и задача решалась сеточным (разностным) методом. Характерный размер сетки составлял обычно $N=100 \times 100$ или $N=200 \times 200$ узлов. Автомодельное уравнение и граничные условия аппроксимировались на сетке со вторым порядком точности [29]. В работе [28] был использован метод конечных элементов.

Обычно учитывают предполагаемую симметрию решения, и строят только часть СФ в секторе с углом раствора $2\pi/m$, где m – порядок симметрии СФ. На внутренних границах сектора $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi/m$ записывают условия симметрии, на внешней границе – условие (10). При использовании декартовой системы координат, обычно в качестве области D

выбирают прямоугольник, расположенный в первом квадранте плоскости и строят структуры с m кратным четырем и $m = 2$.

Полученную систему нелинейных разностных уравнений решают итерационным методом Ньютона. Для его реализации необходимо иметь хорошее начальное приближение к искомому решению, то есть иметь его достаточно точное представление заранее, именно в этом состоит наибольшая трудность.

3.1 Построение начальных приближений

В работах [24]-[26] впервые были высказаны предположения о возможном виде двумерных структур и разработан метод нахождения приближений к ним, основанный на методе линеаризации и методе сшивания с асимптотикой. Были построены два класса начальных приближений к двумерным структурам в полярной и декартовой системах координат, отличающиеся друг от друга принципами строения архитектуры СФ. С помощью этих начальных приближений была построена часть СФ из двух классов. В [27] метод сшивания получил дальнейшее развитие, были получены более сложные приближения, с помощью которых удалось построить классы более сложных структур.

Идея метода сшивания состоит в следующем. Предположим, что в области немонотонности многомерные СФ описываются линеаризованным около гомотермического решения уравнением:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + (\beta - 1)u = 0. \quad (15)$$

Общее решение (15), удовлетворяющее условию $\xi \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0$, имеет вид:

$$u(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{[2a]} C_n R_n(\xi) \cos(n\varphi), \quad (16)$$

где $R_m(\xi) = C_1 \xi^m M\left(-a + \frac{m}{2}, 1 + m, \frac{\beta - \sigma - 1}{4} \xi^2\right)$, $a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}$, C_1 — произвольная постоянная, а $M(-b, c, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Задача нахождения приближения $\tilde{U}(\xi, \varphi)$ к СФ $U(\xi, \varphi)$ сводится к построению функции $u(\xi, \varphi)$, которая в некоторой ограниченной области D , содержащей начало координат и имеющей границу Σ , удовлетворяет уравнению (15), вне области D имеет вид (9):

$$\tilde{U}(\xi, \varphi) = \begin{cases} 1 + Au(\xi, \varphi), & \xi \in D \\ C\xi^{-p}, & \xi \notin D \end{cases}, \quad (17)$$

а на границе Σ удовлетворяет условиям непрерывности («сшивания»):

$$\begin{aligned}
1 + Au(\xi, \varphi) &= C\xi^{-p}, \\
Au'_\xi(\xi, \varphi) &= -pC\xi^{-p-1}, \\
Au''_{\xi\xi}(\xi, \varphi) &= p(p+1)C\xi^{-p-1}
\end{aligned}
\tag{18}$$

Здесь C есть функция φ . Поскольку граница Σ не определена, было предложено производить сшивание решения (15) с асимптотикой (9) на лучах $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/m$, оставляя при этом в ряду (14) только одну m -ю гармонику. Таким образом, строятся функции:

$$\begin{aligned}
f_j(\xi) &= \begin{cases} 1 + A_j R_m(\xi), & \xi < \xi_{0j} \\ C_j \xi^{-p}, & \xi > \xi_{0j} \end{cases}, \\
f_{j+1}^*(\xi) &= \begin{cases} 1 - A_j R_m(\xi), & \xi < \xi_{0j+1}^* \\ C_{j+1}^* \xi^{-p}, & \xi > \xi_{0j+1}^* \end{cases},
\end{aligned}
\tag{19}$$

где A_j , ξ_{0j} и C_j определялись из условий $f_j > 0$, $f_j \in C^{(2)}$, а ξ_{0j+1}^* и C_{j+1}^* - из условий $f_{j+1}^* > 0$, $f_{j+1}^* \in C^{(1)}$ и требования, чтобы f_{j+1}^* имела ровно на один экстремум больше, чем f_j .

В качестве начального приближения предлагается брать функцию

$$\tilde{y}_{mj} = \frac{1}{2}(f_j(\xi) + f_{j+1}^*(\xi)) + \frac{1}{2}(f_j(\xi) - f_{j+1}^*(\xi)) \cos m\varphi.
\tag{20}$$

В работе [24]-[26] одномодовые приближения вида (20) и соответствующие им СФ было предложено выделить в отдельный класс $E_j M_m$. Число j характеризует число слоев, представляющие собой концентрические окружности, в которых располагаются максимумы и минимумы СФ. А число m описывает порядок симметрии и число максимумов в слое.

Учитывая формулу для числа нулей радиальной функции $R_m(\xi)$:

$$n_r = [b_m - [\frac{[b_m]}{b_m}]] + 1, \quad b_m = a - m/2, \quad [] - \text{целая часть числа},
\tag{21}$$

можно вычислить количество возможных приближений для всех допустимых m :

$$N = \sum_{m=1}^{[2a]} [b_m - [\frac{[b_m]}{b_m}]].
\tag{22}$$

Проанализируем формулу (22). Число приближений в классе $E_j M_m$ определяется параметрами среды σ и β , а также порядком симметрии исходной собственной функции m . Существует максимальное значение m , для которого можно построить только одну функцию (20). Ограничение связано с тем, что приближения вида (20) нельзя построить, если ради-

альная часть имеет менее двух нулей на интервале $(0, \infty)$ (см. (21)). Чем меньше m , тем больше приближений можно построить. Формула (22) при $m=0$ переходит в формулу (11) для числа радиально-симметричных структур. В настоящее время построено достаточно большое число СФ из этого класса, но существуют приближения, с которых не удалось сойтись к СФ. Также остается открытым вопрос о существовании несимметричных СФ, отвечающих $m = 1$, хотя приближения для них построить можно.

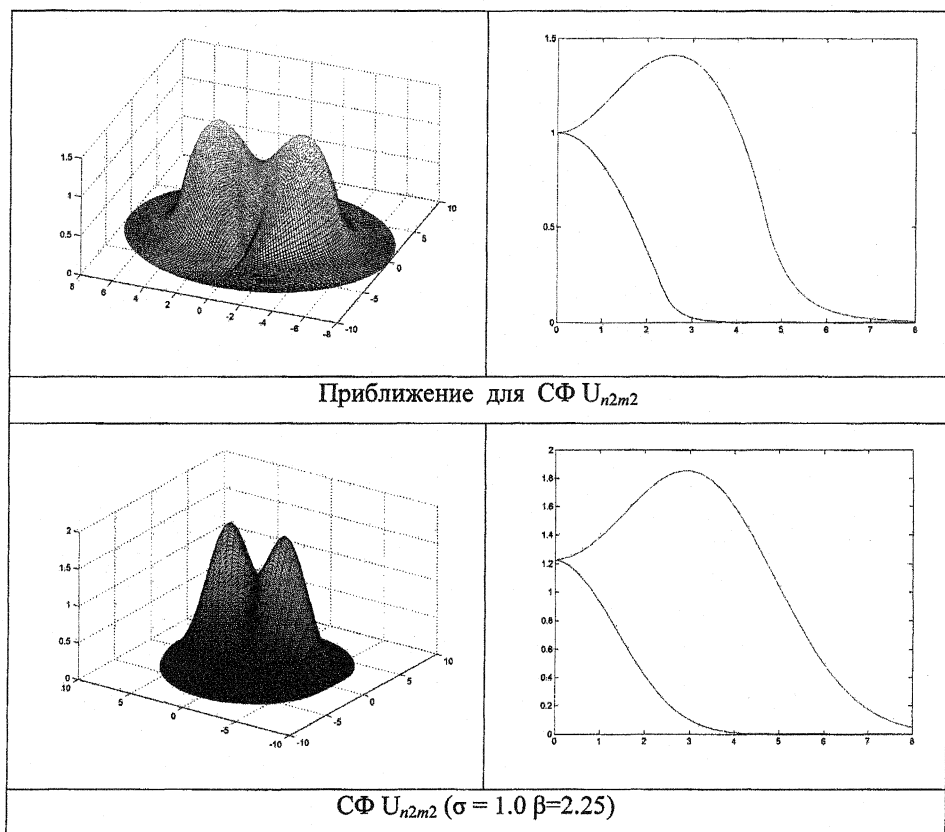


Рис. 1

На рис. 1 и 2 представлен вид приближений (20) из класса $E_j M_m$ и СФ, к которым сошлись итерации. Для большей наглядности приведены радиальные разрезы. Мы видим, что хотя порядок симметрии и некоторые качественные особенности архитектуры приближений и соответствующих СФ совпадают, приближения являются довольно грубыми. Ме-

тод сшивания (19), (20) дает в центре симметрии седловую точку и значения приближения в нуле $\tilde{U}(\xi = 0) = 1$, в то время как почти все СФ имеют или максимум, или минимум, соответственно больший или меньший 1. Таким образом, для построения лучших приближений необходимо, по крайней мере, использовать еще и нулевую гармонику в методе сшивания (то есть использовать радиально-симметричное решение).

Авторами статьи были предложены некоторые другие методы получения начальных приближений. Один из них используется для построения приближений из класса $E_{i \times j}$ в декартовой системе координат. Начальные приближения здесь строятся путём перемножения одномерных СФ, отвечающих плоской геометрии:

$$\tilde{U}_{i,j}(\xi_1, \xi_2) = \Theta_i^{\sigma+1}(\xi_1) * \Theta_j^{\sigma+1}(\xi_2), \quad (23)$$

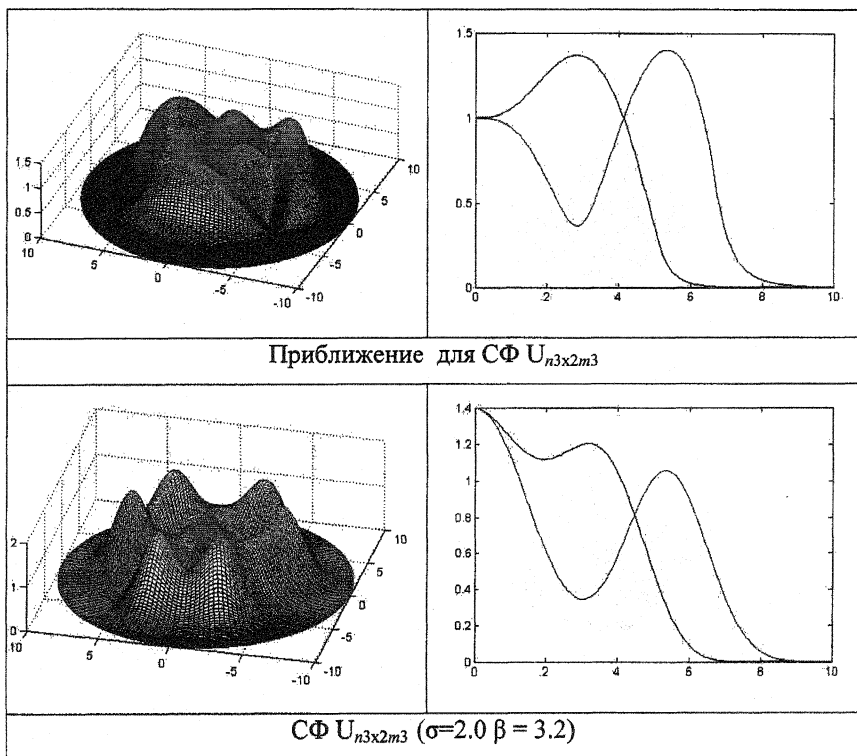


Рис.2

Учитывая формулу (11) для числа N одномерных СФ, нетрудно получить оценку числа двумерных приближений (23) в классе $E_{i \times j}$ при данных значениях параметров β и σ :

$$N_{i,j} = \frac{N(N+1)}{2}, \quad N = \begin{cases} [a], & a - \text{нецелое} \\ a-1, & a - \text{целое} \end{cases}, \quad a = \frac{\beta - \sigma - 1}{\beta - 1}. \quad (24)$$

Расчеты показали, что метод Ньютона в этом случае сходится весьма быстро (примерно за 5-6 итераций), причём построенные СФ незначительно отличаются от своих приближений (23), если β не слишком близко к $\sigma + 1$. В этом классе все приближения, которые использовались в расчетах, сошлись к соответствующим СФ, если β было не слишком близким к $\sigma + 1$. Что происходит с двумерными структурами при $\beta \rightarrow \sigma + 1$, будет описано ниже. На рис. 3 показан вид приближений из класса $E_{i \times j}$ (23), вид соответствующих им СФ и характер сечений вдоль осей.

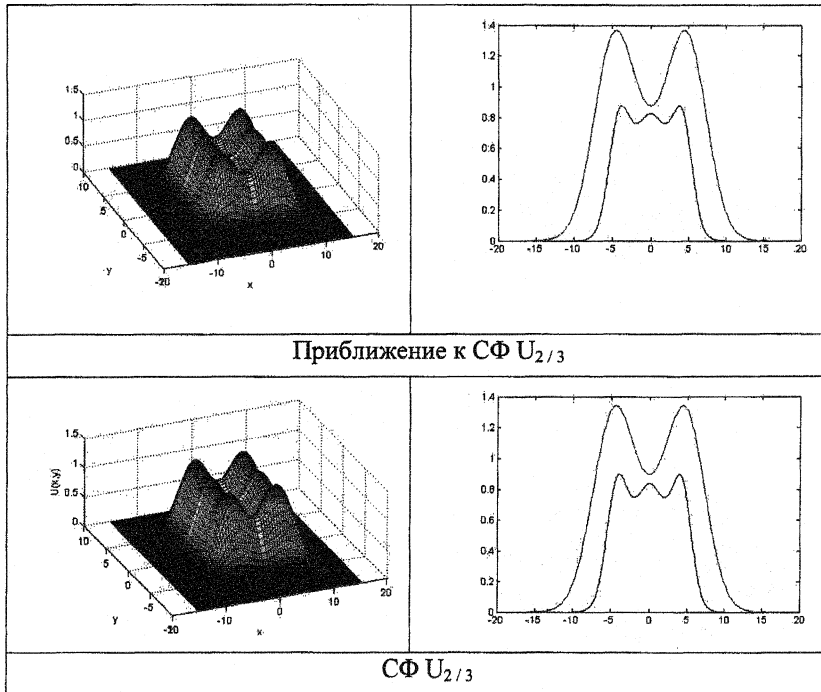


Рис. 3

Другой новый метод основан на использовании сечений уже построенных СФ, назовем его методом “последовательных растяжений”. Было замечено, что в полярной системе координат существуют СФ с различным периодом по углу (порядком симметрии), но имеющих похожие сечения. Тогда, имея некоторую функцию с порядком симметрии m можно попытаться построить ей аналогичную с другим порядком n . Для этого сначала строим два сечения: $S_1(\xi) = \tilde{U}(\xi, \varphi_1)$ и $S_2(\xi) = \tilde{U}(\xi, \varphi_2)$, где $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/m$. За начальное приближение возьмём функцию $y(\xi, \varphi) = 0.5(S_1 + S_2) + 0.5(S_2 - S_1) * \cos n\varphi$.

На рис.4 представлена СФ с порядком $m = 5$, построенная таким способом из СФ с $m = 3$.

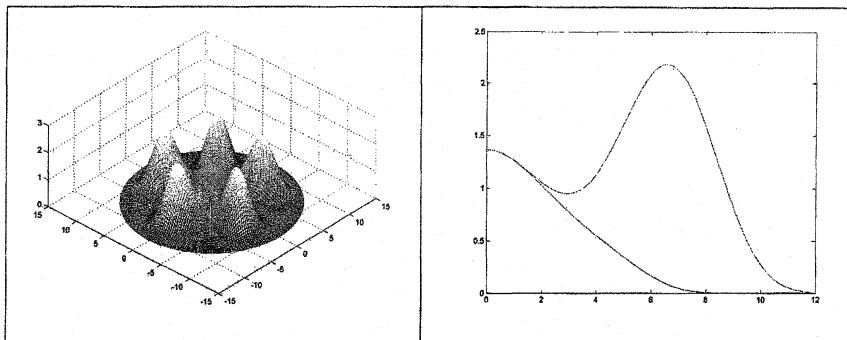


Рис.4. СФ U_{n3m5} с порядком симметрии 5

3.2 Численный алгоритм продолжения по параметру

В работе исследовалась эволюция собственных функций при изменении параметра β (значение σ считалось фиксированным). Параметр β изменялся с некоторым достаточно малым шагом h_β (обычно $h_\beta = 0.001$). СФ, построенная для предыдущего значения β , являлась начальным приближением для следующего значения β . Вблизи точек бифуркации, где решение сильно изменяется с изменением параметра, для улучшения начального приближения использовалась линейная экстраполяция, с помощью которой осуществлялся прогноз СФ для нового значения β . Алгоритм продолжения по параметру предусматривает возможность измельчение шага до некоторого минимального в случае плохой сходимости к СФ в методе Ньютона, и, наоборот, увеличение шага до заданного максимального при быстрой сходимости. Результаты однопара-

метрического исследования отражаются на бифуркационных диаграммах, демонстрирующих зависимости некоторых характеристик СФ от параметра. Например, всегда отслеживалась зависимость от параметра максимумов, минимумов и значения функции в центре симметрии. Было найдено несколько бифуркаций, приводящий к рождению двумерных структур, их распаду, слиянию с радиально-симметричными СФ и других. В частности, показано, что некоторые СФ испытывают седло-узловую бифуркацию, которая на графиках находится в точках поворота кривой. Предложенный нами алгоритм прохождения точки поворота отличается от известных алгоритмов продолжения по параметру и построения кривой в фазовом пространстве системы (см. например [30]). В точке поворота определитель линеаризованной системы (матрицы Якоби), которая используется в итерационном процессе Ньютона для уточнения решения, обращается в нуль. Поэтому все известные алгоритмы для прохождения точки поворота используют некоторую другую систему, что в нашем случае не приемлемо, поскольку это портит ленточную структуру огромной системы, размерность которой равна числу точек сетки. Рис. 5 иллюстрирует алгоритм прохождения точки поворота, применяемый в настоящей работе.

Итак, пусть мы находимся на нижней ветви бифуркационной диаграммы, и движение осуществляется в сторону увеличения параметра. Для начала необходимо как можно точнее найти точку поворота. Для этого надо подобрать такое β_1 и такое малое число δ (мы обычно брали $\delta = 0.0001$), что при β_1 и при $\beta_2 = \beta_1 + \delta$ решение ещё существует, а при $\beta = \beta_1 + 2\delta$ уже нет (расходятся итерации в методе Ньютона). Затем осуществляется прогноз решения в точку С (см. рис. 5). Для этого через точки А и В проводится секущая $u(\beta)$ и делается шаг по параметру β длины Δ ($\beta^* = \beta_2 + \Delta$, обычно берётся $\Delta = 3\delta$). Затем параметр кладется опять равным $\beta = \beta_2$, а спрогнозированное решение в точке С берётся за начальное приближение к СФ в точке D, которая находится на кривой уже за точкой поворота. Этим способом удалось пройти все обнаруженные точки поворота. После прохождения поворота начинается движение по параметру в обратную сторону, как это было описано выше.

4. Типы двумерных структур

Спектры двумерных структур и их зависимость от параметра β изучалась для двух значений параметра σ , $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$ в полярной и декартовой системах координат. Причем случай $\sigma = 1$ был впервые подробно изучен в настоящей работе. Исследования выявили, что спектры СФ при разных значениях σ имеют аналогичное строение, содержат структуры одинакового типа и демонстрируют схожую эволюцию при изменении β .

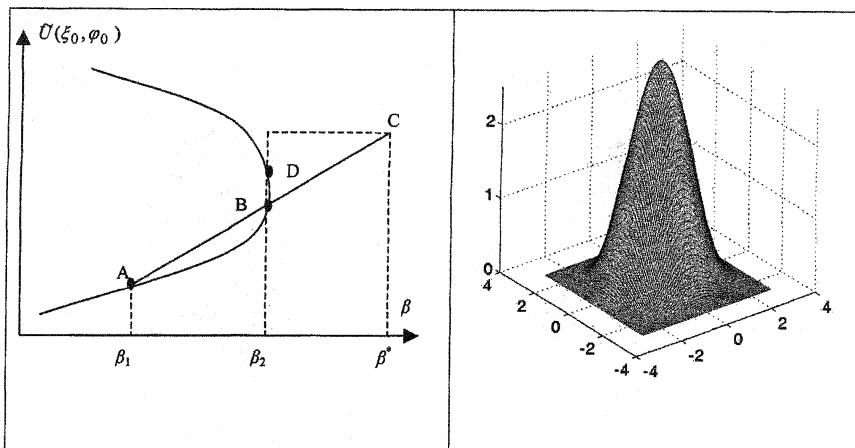


Рис.5

Иллюстрация алгоритма прохождения точки поворота

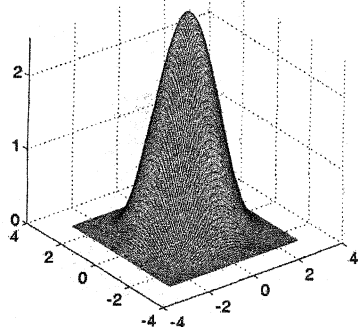


Рис.6

Первая радиально-симметричная СФ U_1

Найдены следующие типы СФ, рассматриваемой автомодельной задачи:

1. **Простая, радиально-симметричная структура** с одним максимумом в начале координат (см. рис. 6). Она существует при всех значениях параметров $\beta > \sigma + 1$. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ она стремится к единственной СФ в S -режиме и в точке бифуркации $\beta = \sigma + 1$ превращается в эту локализованную структуру.

2. **Радиально-симметричные СФ, представляющие собой сходящиеся к центру кольцевые волны** (см. рис. 6). СФ с четным номером имеют минимум в центре симметрии, а СФ с нечетным номером – максимум. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ минимум четной функции, находящийся в начале координат опускается до нуля, и СФ превращается в структуру с дыркой (содержит внутри себя область, в которой температура строго равна нулю). Нечетные СФ при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ последовательно, начиная с третьей, выпадают из спектра; они расщепляются на первую простую СФ и четную структуру с дыркой.

3. **Структуры в виде плоских волн**, которые описываются автомодельной задачей для одномерного уравнения и удовлетворяют автомодельному уравнению (6). Строго говоря, они не являются частными решениями поставленной задачи, поскольку локализованы только по одной оси, по другой оси граничное условие (7) или (9) не выполняется.

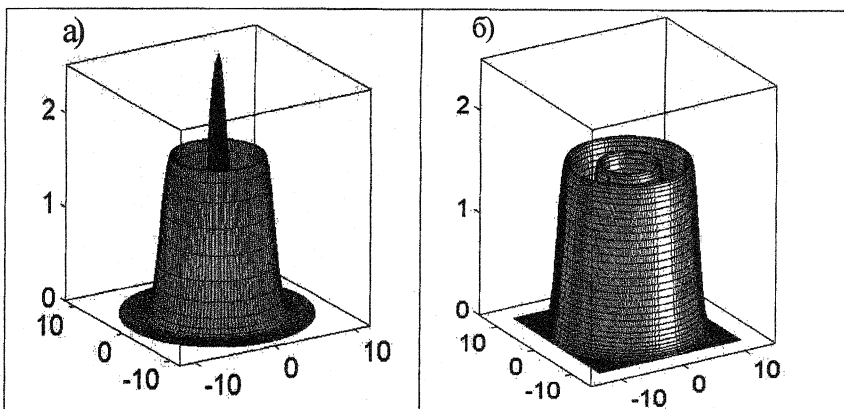


Рис. 7. Радиально-симметричные СФ: а) U_3 ; б) U_4 .

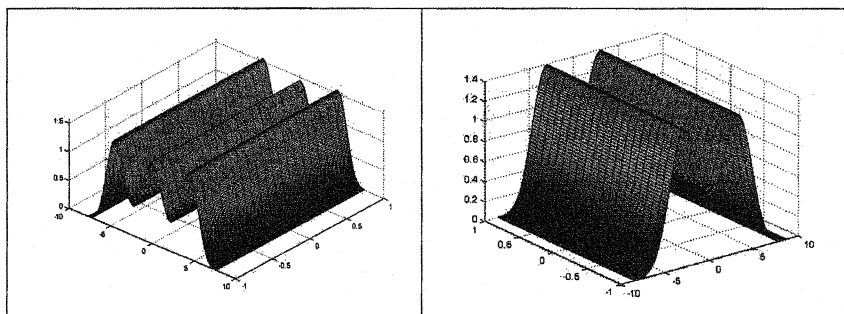


Рис. 8. Плоские волны

Все остальные СФ представляют собой двумерные структуры. Они отличаются друг от друга:

1) Порядком симметрии m . СФ с порядком симметрии m при повороте на угол $\varphi = 2\pi / m$ переходит в себя. Функции с порядком симметрии 2 и 4 являются особыми, для них можно построить отдельный класс приближений E_{ij} в декартовой системе координат.

2) Характером точки в центре симметрии. СФ могут иметь а) локальный максимум, б) локальный минимум, в) седловую точку, г) содержать нулевую область в окрестности начала координат.

3) Сложностью архитектуры, которая отражается в количестве и расположении локальных максимумов. Существуют относительно простые двумерные структуры и более сложные двумерные СФ, в которых

максимумы объединяются в группы. Были так же найдены сложные структуры, внутри которых содержится одна и более областей с нулевой температурой, то есть они представляют собой многосвязные области гонения.

Опишем типы найденных двумерных структур.

4. Класс СФ $E_j M_m$ Это относительно простые двумерные структуры, которые строятся в полярной системе координат с помощью начальных приближений (20). Максимумы и минимумы СФ из класса $E_j M_m$ располагаются на окружностях в вершинах правильных многоугольников. Архитектуру этих структур можно охарактеризовать всего двумя числами. Одно из них описывает число слоев j , в которых располагаются максимумы, другое – порядок симметрии m . Найдены структуры с порядком симметрии 2,3,4,5,6 и т.д. до 11[28]. Одномодовые приближения (20) хотя и позволяют строить эти СФ не описывают характер точки в начале координат. СФ из класса $E_j M_m$ имеют или максимум или минимум в центре симметрии, в то время как приближения (20) дают седловую точку. По-видимому, для лучшего описания в линейном приближении надо использовать еще и нулевую гармонику.

На рис. 9 представлены структуры из этого класса.

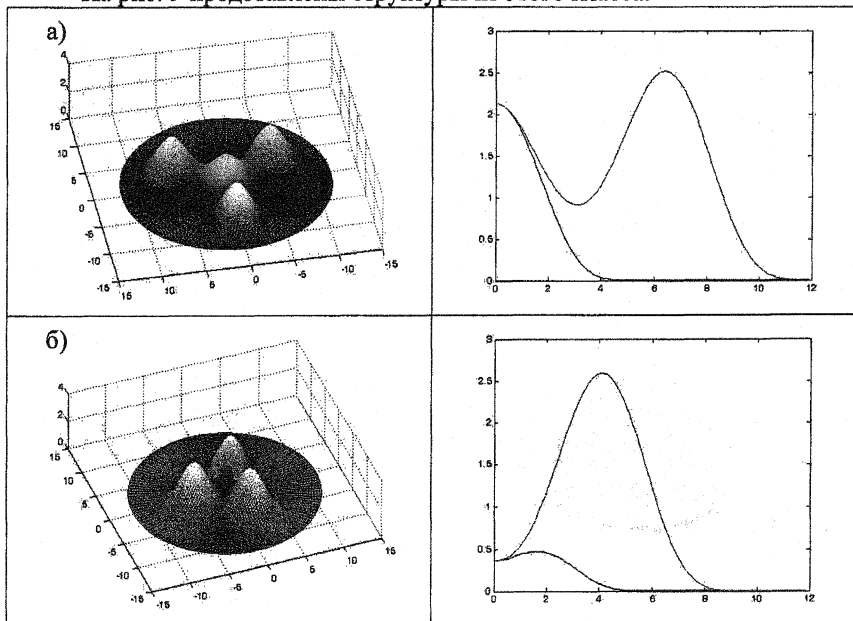


Рис. 9. Структуры с порядком симметрии $m=3$.

5. Класс СФ $E_{i/j}$. Структуры из этого класса строятся в декартовой системе координат с помощью нелинейных приближений (23). Максимумы и минимумы в них располагаются рядами. Архитектуру СФ из класса $E_{i/j}$ можно также характеризовать всего двумя числами i и j . Число j характеризует число рядов, а число i – число максимумов в ряду. Функции (23) хорошо приближают структуры при многих значениях параметров.

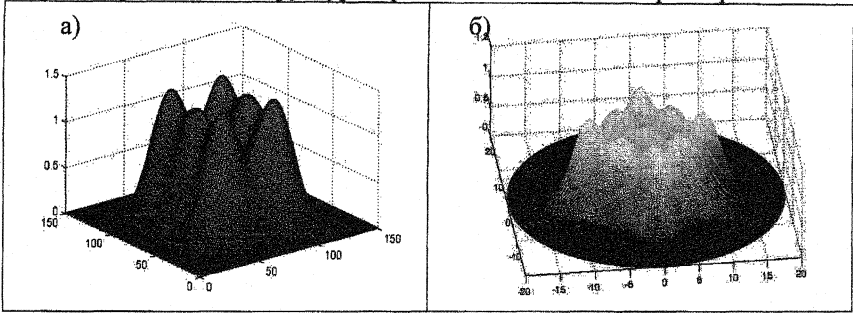


Рис. 10. а) СФ $U_{3/2}$; б) СФ $U_{3/3}$.

6. Сложные двумерные СФ. Существуют СФ со сложной архитектурой которые даже качественно не могут быть описаны приближениями $E_j M_m$ (20) и $E_{i/j}$ (23). Много сложных СФ построено нами при β близких к $\sigma + 1$. В них максимумы объединяются в группы, отделенные друг от друга глубокими провалами (ущельями, минимумами, седловыми точками). Хотя сложные структуры существуют и при β достаточно далеких от $\sigma + 1$. На рис. 11 изображены две сложные СФ.

Архитектуру таких СФ уже нельзя охарактеризовать двумя числами, и надо строить более сложные приближения к ним. В работе [27] к некоторым сложным СФ удалось построить линейные приближения методом сшивания (17), использующим в ряду (16) две или три гармоники.

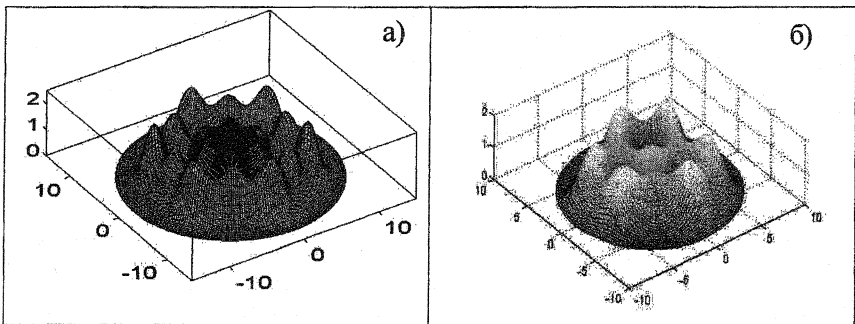


Рис. 11. Сложные двумерные СФ.

7. Сложные многосвязные двумерные СФ. Они появляются в спектре только при β близких к $\sigma + 1$, и содержат внутри себя одну или более областей, в которых температура равна нулю. На рис. 12а представлен вид СФ с порядком симметрии 4, содержащей внутри себя 5 областей с нулевой температурой, одну - в начале координат, и четыре - в районе четырех главных максимумов (см. сечения этой СФ на рис.13). На рис.12б показана аналогичная структура с порядком симметрии 5, в которой при данном значении β имеется одна нулевая область в центре симметрии. При чуть меньшем значении параметра появляется еще 5 нулевых областей в районе максимумов.

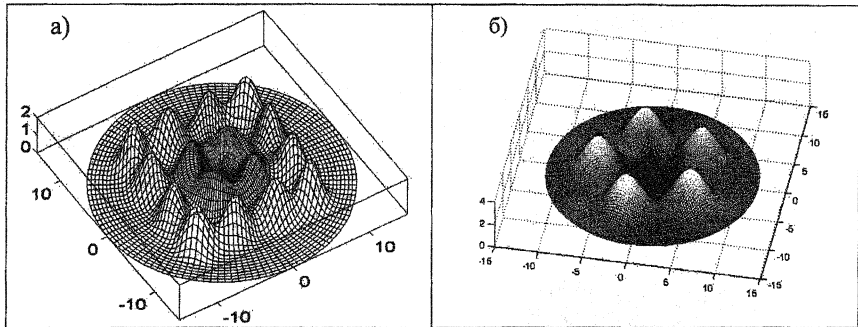


Рис.12

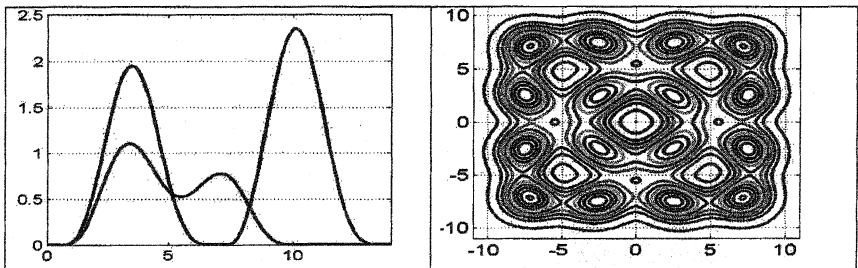


Рис. 13. Сечения СФ с рис.12а

8. Структуры с седловой точкой в начале координат. В работе найдено две структуры с седловой точкой в центре симметрии. Они сохраняют свою структуру при всех значениях параметра из области своего существования. СФ с порядком симметрии 2 можно отнести и к классу $E_j M_m$, и к классу $E_{i/j}$. Она легко строится и в декартовой и в полярной системе

координат. СФ с порядком симметрии 4 (см. рис. 14а), несмотря на простоту архитектуры, не описывается ни приближениями (20), ни (23). Существуют структуры похожие на нее с порядком симметрии 4, из которых одна переходит в другую в результате поворота. На рис.14 представлены похожие друг на друга СФ трех разных типов.

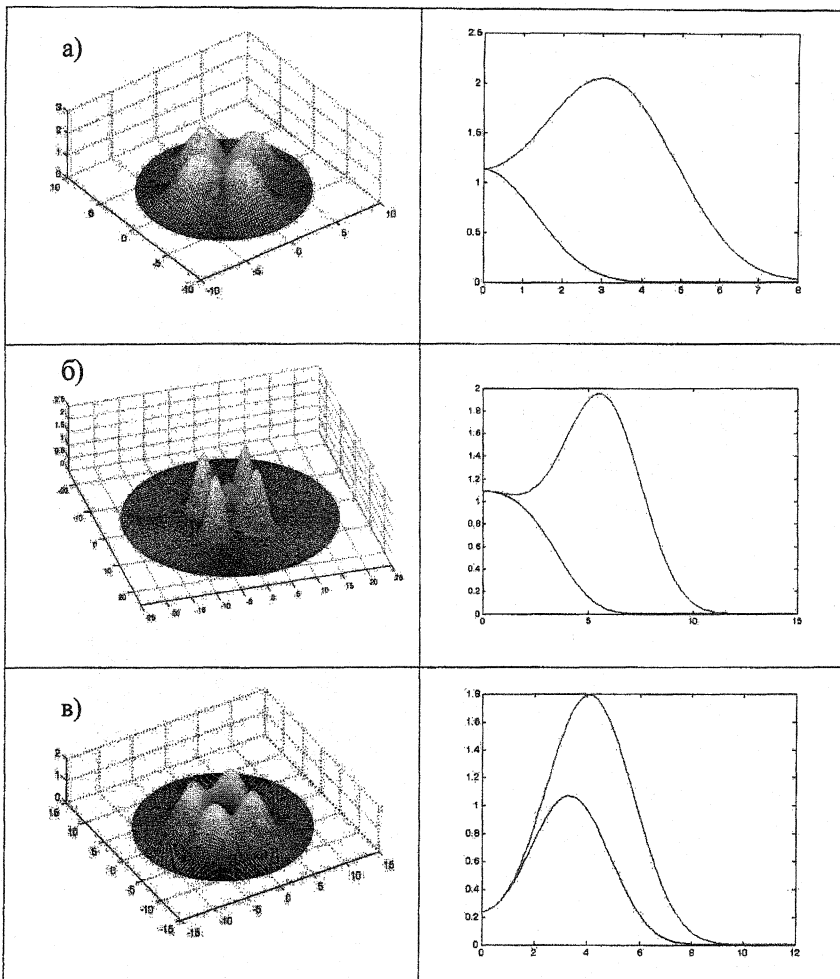


Рис. 14. Структуры с порядком симметрии 4:
 а) с седловой точкой в центре; б) с максимумом в центре;
 в) с минимумом в центре

5. Результаты бифуркационного анализа. Сценарии эволюции двумерных структур.

В работе было проведено исследование зависимости многих двумерных СФ от параметра β при двух фиксированных значениях σ : $\sigma = 1$ и $\sigma = 2$. Однопараметрический анализ показал, что каждая СФ существует в некотором интервале значений β , $(\sigma + 1) < \beta < \beta^*$ (значение β^* свое у каждой СФ), и выявил несколько различных сценариев эволюции СФ при изменении параметра. Эволюция СФ зависит от класса, к которому принадлежит данная структура и ее типа.

1. Описание эволюции СФ начнем с класса $E_{i/j}$. Почти все структуры из данного класса продемонстрировали схожую эволюцию. Рассмотрим сначала, что происходит с автомодельными решениями при увеличении β и стремлении его к $\beta \rightarrow \beta^*$. При больших значениях β приближения (23), как показали расчеты, очень близки к СФ и полностью описывают их эволюцию. Бифуркационное значение β^* определяется одномерной СФ Θ_j с большим номером j (13):

$$\beta^* = \beta_j = \frac{j(\sigma + 1) - 1}{j - 1}, \quad j \geq i. \quad (25)$$

В одномерном случае, как показал бифуркационный анализ [19] – [21], точка бифуркации β^* отвечает бифуркации ответвления функции Θ_j от гомотермического решения. При $\beta \rightarrow \beta^*$ эффективная область локализации структуры Θ_j сильно увеличивается, а амплитуда колебаний ее около гомотермического решения уменьшается, и в точке бифуркации происходит слияние СФ с гомотермическим решением. Посмотрим, что происходит при этом с двумерной СФ $\Theta_{i/j}$. Если $i < j$, то при бифуркационном значении параметра двумерная СФ превращается в плоскую волну, описываемую на плоскости одномерной СФ Θ_i , поскольку

$$\Theta_{i,j}(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \Theta_i(\xi_1), \text{ так как } \Theta_j(\xi_2) \rightarrow 1 \text{ при } \beta \rightarrow \beta^*. \quad (26)$$

Если $i = j$, то двумерная СФ $\Theta_{i/j}$ сливается с гомотермическим решением на всей плоскости.

2. Теперь посмотрим, что происходит с двумерными структурами при уменьшении параметра β и стремлении его к $\sigma + 1$. Двумерную СФ для наглядности можно представить, как совокупность гор с разными вершинами, разделенными ущельями и впадинами (минимумами). При уменьшении β вершины у СФ растут, а провалы между ними увеличиваются, и при некотором значении β^{**} , близком к $\sigma + 1$, структура разваливается на простые локализованные структуры, соответствующие первой простой радиально-симметричной СФ Θ_1 . Такой сценарий характерен для многих типов структур с относительно простой архитектурой из разных классов. Большая часть сложных СФ также распадается на простые структуры при $\beta \rightarrow \sigma + 1$, однако, распад происходит по более сложному сценарию. Сначала максимумы объединяются в группы. При некотором значении β центральный минимум опускается до нуля, и в центре образуется нулевая область (в расчетах $U < 10^{-8}$). При дальнейшем уменьшении β нулевая область увеличивается, образуются нулевые области в окрестностях других минимумов функции, и СФ превращается в многосвязную структуру горения. Наконец, при некотором β^{**} структура начинает распадаться на простые структуры.

3. Рассмотрим эволюцию СФ из класса $E_j M_m$. Здесь выявлено несколько характерных сценариев эволюции. Опишем их.

I. В первом сценарии эволюции двумерная структура при увеличении параметра испытывает седло-узловую бифуркацию при $\beta = \beta_{sn}$, в которой кривая зависимости характеристик СФ от параметра, имеет точку поворота. При $\beta < \beta_{sn}$ кривая зависимостей имеет две ветви. На одной ветви находятся структуры, имеющие максимум в центре симметрии, на другой – минимум. Изменение типа структуры происходит путём постепенного изменения её значения в нуле, вблизи точки бифуркации $\beta = \beta_{sn}$ она имеет седловую точку в центре.

При уменьшении параметра и $\beta \rightarrow \sigma + 1$ двумерные структуры принадлежащие обеим ветвям распадаются на простые. На рис.17 представлены бифуркационные зависимости для двух СФ, а на рис. 15-16 показано изменение архитектуры СФ, принадлежащих двум ветвям, с ростом параметра.

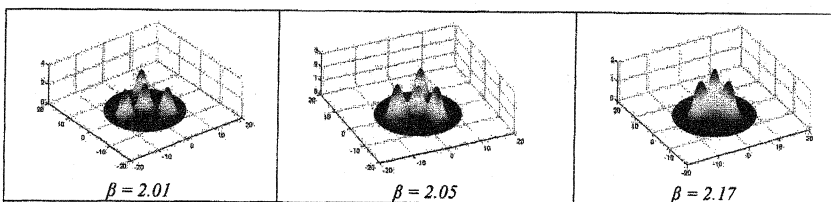


Рис.15. Эволюция U_{n3m3}

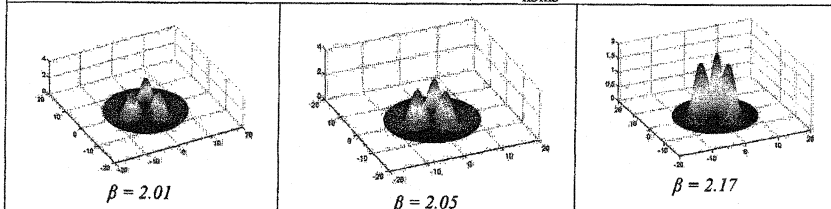


Рис. 16. Эволюция U_{n2m3}

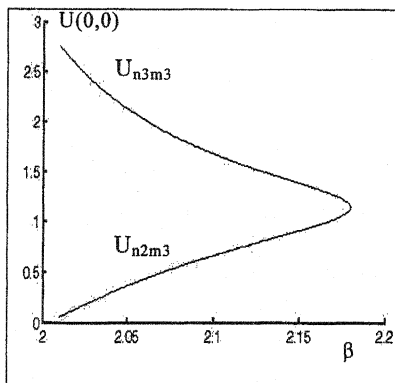


Рис.17

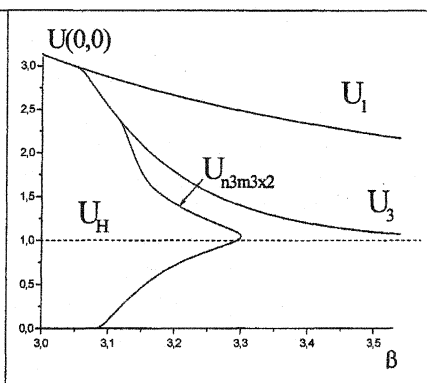


Рис.18

II. Второй сценарий аналогичен первому за той только разницей, что СФ, принадлежащая одной из ветвей и имеющая минимум в начале координат вырождается в радиально-симметричную структуру при уменьшении параметра β . Такой сценарий наблюдался для структуры со сдвоенными максимумами (рис 116). На рис. 18 показана бифуркационная диаграмма для данного сценария.

III. В третьем сценарии эволюции двумерные структуры при увеличении параметра β приближаются к радиально-симметричным СФ и в точке бифуркации сливаются с ними. Это означает, что провалы между максимумами находящимися в одном слое уменьшается до нуля, в то

время как провалы между слоями сохраняются. На рис.19 представлена эволюция СФ U_{n2m4} .

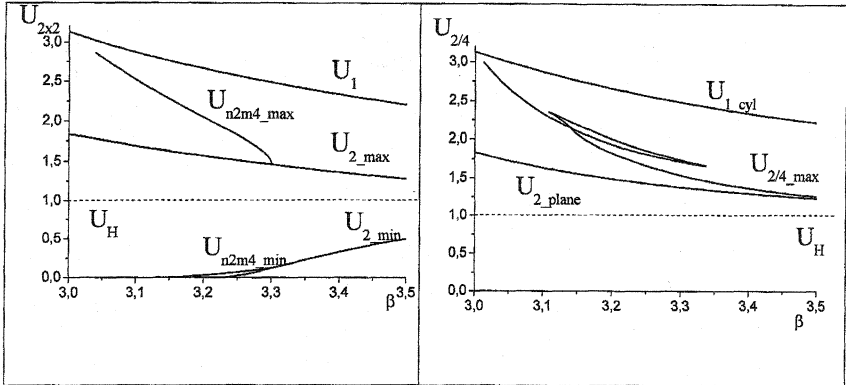


Рис.19

Рис.20

IV. Для одной из СФ наблюдалась более сложная зависимость характеристик от параметра β . СФ дважды испытывала бифуркацию поворота, в результате линия зависимости от параметра описала петлю. Такое поведение наблюдалось для СФ и при $\sigma=1$ и при $\sigma=2$. На рис. 20-21 изображена эволюция СФ при уменьшении параметра и представлены несколько характерных видов в процессе эволюции.

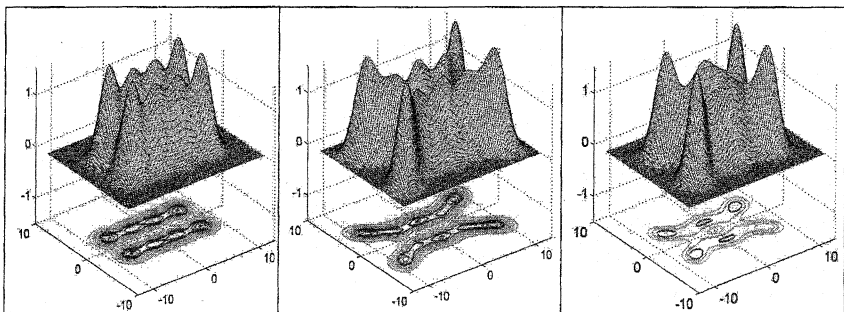


Рис. 21. Вид СФ $U_{2/4}$ на различных ветвях эволюции.

6. Заключение

Изучение сценариев эволюции позволило систематизировать найденные структуры. Например, структуры, имеющие седловую точку в центре, были выделены в отдельный тип. Как уже было сказано, структуры с минимумом в центре могут превращаться в структуры с максимумом в центре, проходя через седловую точку при одном значении параметра. Некоторые из них при этом не испытывают бифуркацию поворота.

Структуры с седловой точкой во всем своем интервале существования остаются структурами с седловой точкой, характер точки в начале координат не изменяется.

Кроме того, особо стоят структуры с порядком симметрии 4. В этом случае найдены три похожие друг на друга, но разные СФ, имеющие разные сценарии эволюции.

Литература

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи. – М.: Наука. 1998. – 255с.
2. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.
3. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. //J. Discrete and continuous dynamical systems, 2002, V. 8, № 2, pp. 399-433.
4. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью //Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
5. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потанов А.Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука. 1996. С. 95.
6. Лобанов А.И., Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови – //В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002 г., с. 346-367.
7. Кириченко Н.А. Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии //В книге [1] с. 217-230.

8. *Белавин В.А., Курдюмов С.П.* Режимы с обострением в демографической системе: Сценарий усиления нелинейности //Жур. Вычислит. Матем. и Матем. Физ., 2000, Т.40, №2, С.238-251.
9. *Катица С.П.* Феноменологическая теория роста населения Земли // Успехи физ. наук, 1996, Т.166, №1, с.63-80.
10. *С.П. Катица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
11. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики //СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
12. *Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Док. АН СССР, 1976, Т.227, №2.
13. *Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур // Док. АН СССР, 1977, Т.237, №6.
14. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Жур. вычислит. Матем. и матем. Физ. 1983, т. 23, № 2, с. 380-390.
15. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Самарский А. А.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде // Док. АН СССР, 1980, Т.251, №3.
16. *Димова С. Н., Касичев М. С., Курдюмов С.П.* Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // Жур. вычислит. матем. и матем. физ. 1989, т. 29, № 11, с. 1683–1704.
17. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации //Современные проблемы мат. физики и выч. математики. М. Наука 1982, 217–243.
18. *Kurdumov S. P.* Evolution and self-organization laws in complex systems //Int. J. Modern Phys. C1. 1990, 299–327.
19. *Куркина Е. С.* Исследование спектра автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Прик. матем. и информат. М.: Изд-во МГУ, 2004. № 16. С. 27-65.
20. *Куркина Е.С., Курдюмов С.П.* Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением //Доклады АН, Т. 395, № 6, с.1–6, 2004 г.
21. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* «Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником» // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.
22. *Куркина Е. С.* Атом как структура горения нелинейной среды. // «Синергетика». Труды семинара. Естественнонаучные и гуманитарные аспекты. М.: МИФИ, 2004 г., Том № 7, 37–51.

23. Куркина Е.С., член-корр. Курдюмов С.П. «Квантовые свойства нелинейной диссипативной среды». // Доклады АН, Т. 399, № 6, с.1-6, 2004 .
24. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потапов. Исследования многомерной архитектуры собственных функций нелинейной среды: Препринт № 75 М.: ИПМатем. АН СССР. 1982.
25. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потапов, А.А. Самарский. Архитектура многомерных тепловых структур // Док. АН СССР. 1984. Т. 274. № 5. С. 1071–1075.
26. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., А.Б. Потапов, А.А. Самарский Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 8. С. 1189-1205.
27. А.Б. Потапов. Построение двумерных собственных функций нелинейной среды: Препринт № 8 М.: ИПМатем. АН СССР. 1986.
28. Димова С.Н., Касичев М.С., Колева М. Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов //Матем. моделир. Т. 4, № 3, 1992, С. 74–83.
29. Куркина Е.С. «Двумерные и трехмерные тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью»// Прикладная математика и информатика № 17, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2004, с.84 - 112.
30. E. Doedel, H.V. Keller, J.P. Kernevez. Numerical analysis and control of bifurcation problems. (I) Bifurcation in finite dimensions (II) Bifurcation in infinite dimensions //International J. of Bifurcation and Chaos, Vol. 1. (1991), (I) No. 3, pp. 493-520; (II) No. 4, pp. 745-772.