

Е. С. Куркина, И. М. Никольский

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КВАДРАТИЧНЫМ
ИСТОЧНИКОМ.¹**

Введение.

Изучение режимов с обострением (blow-up) является одной из самых быстроразвивающихся областей современной математики. Более сорока лет назад были предприняты первые успешные попытки вывода условий неограниченности решений параболических уравнений. Методы, предложенные в этих работах, послужили основой для дальнейшего развития теории. Режимы с обострением нашли много важных приложений в различных областях науки от физики до экономики и социологии [1]-[4].

Под режимом с обострением мы будем понимать процесс, в котором исследуемая величина (температура, энергия, численность популяции и т.д.) неограниченно возрастает при стремлении времени t к конечному моменту t_* , называемому моментом обострения.

Данная работа посвящена исследованию режимов с обострением в квазилинейном параболическом уравнении теплопроводности с источником. Общий вид этого уравнения следующий:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k(T)\operatorname{grad} T) + Q(T). \quad (\text{A})$$

Предполагается, что функции $k(T)$ (коэффициент теплопроводности) и $Q(T)$ (источник/сток) определены и обладают достаточной гладкостью для всех значений $T \geq 0$.

Уравнение вида (A) изучается уже в течение длительного времени в связи с разными приложениями и в разных контекстах учеными из разных областей: математиками, физиками и др. Большое количество работ посвящено исследованию уравнения Франк-Каменецкого ($k(T)=1$, $Q(T)=T^3$), уравнения Буссинеска ($k(T)=T$, $Q(T)=T$) и других.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-06-80254 и № 05-01-00852).

Большой вклад в изучение более общего уравнения теплопроводности со степенными нелинейностями

$$k(T) = T^\sigma, \quad Q(T) = T^\beta$$

внесли отечественные учёные А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П. Михайлов и другие. Классическая монография [5] является настольной книгой специалистов по режимам с обострениями во всём мире.

В предлагаемой работе изучается уравнение с $k(T) = T$ и со знакопеременным источником, который представляет собой многочлен второй степени. Интерес к выбранному виду уравнения обусловлен его возможными приложениями, в частности, к моделированию вспышек, наблюдаемых в короне Солнца. В работе [6] уже исследовалось уравнение с источником подобного вида $Q(T) = \alpha T^{\sigma+1} + \delta T$, $\sigma > 0$. Там с помощью разделения переменных были получены автомодельные решения, которые в зависимости от значений параметров α и σ могут быть либо затухающими, либо неограниченными (в этом случае соответствующая задача Коши не разрешима в целом).

В рассматриваемом нами уравнении источник содержит свободный член, что делает обычный метод разделения переменных неприменимым и вынуждает использовать другие подходы.

1. Постановка задачи.

Рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = (uu_x)_x + (u - u_0)(u - u_1) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x) \geq u_0 \quad (2)$$

где $u_1 > u_0 > 0$. Задача ставится в области $(0, T) \times R$, где T – некая положительная константа. Функция $f(x)$ предполагается непрерывной и ограниченной на числовой оси.

Нас будут интересовать классические решения задачи (1)-(2). Под *классическими* понимаются решения $u(x, t)$, обладающие следующими свойствами: $u(x, t) \in C_{tx}^{1,2}((0, T) \times R) \cap C([0, T] \times R)$. Далее в работе будет установлено, что в зависимости от начальной функции $f(x)$ решения могут затухать (т.е. поточечно стремиться к ненулевому фону u_0) или существовать лишь конечное время. Всюду в тексте решения, не существующие глобально, мы будем называть неограниченными (этот термин принят в литературе, см., например, [5]) или развивающимися в режиме с обострением.

Вкратце план предлагаемой работы следующий. В пункте 2 методом Галактионова строится семейство частных аналитических решений

уравнения (1). Эти решения имеют вид $p(t) + q(t) \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$. Коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ удовлетворяют некой динамической системе. В этом же пункте описан её фазовый портрет.

Пункт 3 посвящён исследованию поведения решения динамической системы. Выяснены условия на начальные данные $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$, при которых $p(t)$ и $q(t)$ стремятся к конечным значениям или развиваются в режиме с обострением. В последнем случае доказывается, что момент обострения обоих коэффициентов одинаков, а отношение $\frac{p(t)}{q(t)}$ стремится к единице. Показано, что неограниченные решения семейства в некотором смысле близки к автомодельному решению уравнения

$$u_t = (uu_x)_x + u^2, \quad (3)$$

которое развивается в S-режиме (см [5]).

В пункте 4 доказано наличие неограниченных и затухающих решений у задачи (1)-(2). В последнем пункте приведены профили различных решений (1)-(2), построенные на ЭВМ, а также даны результаты численного исследования локализации решений задачи Коши для уравнения (1) и для близких к нему уравнений.

2. Поиск частных решений уравнения.

Для наших целей полезно найти некоторые частные решения уравнения (1). Для этого применим метод Галактионова (см. [7], [8]). Коротко его можно описать следующим образом.

Будем рассматривать дифференциальные операторы с квадратичной нелинейностью, т.е. операторы вида:

$$A(u) \equiv \alpha(u_{xx})^2 + \gamma uu_{xx} + \delta(u_x)^2 + \varepsilon u^2, \quad (4)$$

где $\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon$ - некоторые действительные константы.

Конечномерное линейное пространство гладких функций W_s назовём *инвариантным* относительно оператора $A(u)$, если $A(W_s) \subseteq W_s$. Основная идея метода состоит в том, чтобы строить такие пространства в виде линейных оболочек простых функций $f_1(x), \dots, f_s(x)$. Как показано в [7], в этом случае решение уравнений вида

$$P\left(t; \frac{\partial}{\partial t}\right) = A(u) + Q\left(t; \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (5)$$

(здесь $P\left(t; \frac{\partial}{\partial t}\right)$, $Q\left(t; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ - линейные полиномиальные операторы,

$P\left(t; \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=0}^M a_i(t) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(i)}$, $Q\left(t; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j=1}^K b_j(t) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(j)}$) можно искать в виде линейной комбинации $C_1(t)f_1(x) + \dots + C_s(t)f_s(x)$, а само уравнение (5) будет эквивалентно некой динамической системе относительно коэффициентов $C_1(t), \dots, C_s(t)$.

Легко видеть, что уравнение (1) представимо в виде

$$u_t = A(u) - (u_0 + u_1)u + u_0u_1, \quad (6)$$

где оператор

$$A(u) = u_x^2 + uu_{xx} + u^2 \quad (7)$$

является квадратичным дифференциальным.

Непосредственной подстановкой устанавливается, что пространство $W = L\left\{1, \cos \frac{x}{\sqrt{2}}\right\}$ инвариантно относительно оператора (7). Следовательно, по методу Галактионова будем искать решение уравнения (1) в виде

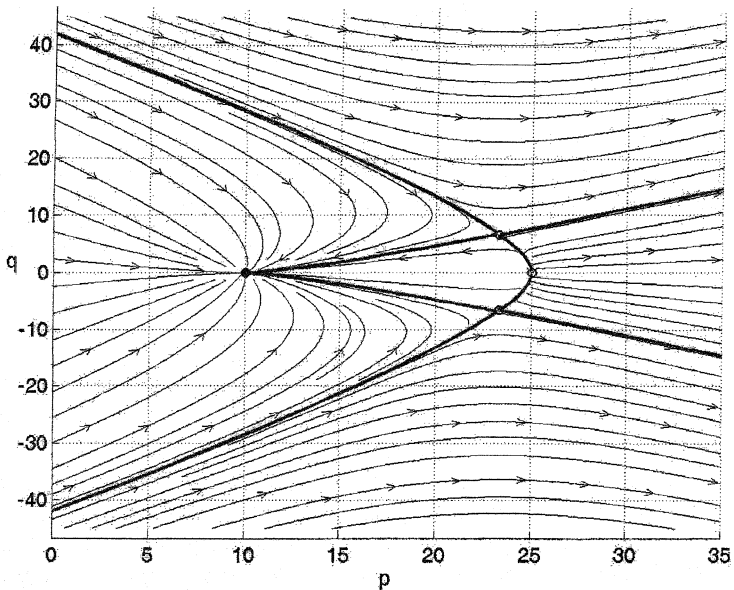
$$u(x, t) = p(t) + q(t) \cos \frac{x}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1), получаем динамическую систему относительно $p(t)$ и $q(t)$:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{1}{2}q^2 + p^2 + u_0u_1 - (u_0 + u_1)p \\ \dot{q} = \frac{3}{2}pq - (u_0 + u_1)q \end{cases} \quad (9)$$

Исследуем особые точки этой системы, построим её фазовый портрет.

При $u_1 > 2u_0$ система имеет 4 особых точки: два седла с координатами $\left(2(u_1 + u_0)/3, \pm \sqrt{2[2(u_1 + u_0)^2/9 - u_0u_1]}\right)$ и два узла: устойчивый $(u_0, 0)$ и неустойчивый $(u_1, 0)$. Есть также особые точки, лежащие на бесконечности (подробнее о таких точках см. [12]). Это концы прямых $p = \pm q$ (устойчивые узлы) и концы оси p (седла).



Фазовый портрет системы (9)
рис. 1

Фазовый портрет системы для $u_0 = 10$, $u_1 = 25$ представлен на рис. 1. Особые точки отмечены кружочками, жирными линиями нарисованы сепаратрисы.

При уменьшении значения u_1 ($u_1 \rightarrow 2u_0$) фазовый портрет меняется, седла приближаются к неустойчивому узлу и при $u_1 \leq 2u_0$ у системы остаётся лишь две особые точки – устойчивый узел $(u_0, 0)$ и седло $(u_1, 0)$.

3. Аналитическое исследование динамической системы.

3.1 Вспомогательное уравнение.

Рассмотрим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, которое будет нам полезно в дальнейшем:

$$\dot{z} = (z - a)(z - b), \quad (10)$$

где $a < b$.

С помощью замены $v = z - a$ можно свести (10) к уравнению типа Бернулли:

$$\dot{v} = v^2 + (a - b)v. \quad (11)$$

Используя формулу общего решения этого уравнения (см. [8]), получаем:

$$z(t) = a + \frac{1}{C e^{(b-a)t} + \frac{1}{b-a}}, \quad (12)$$

где $C = \frac{b-z_0}{(z_0-a)(b-a)}$, $z_0 = z(0)$, $z_0 \neq a$.

Поведение решения определяется начальным значением $z(0) = z_0$. При $z_0 \in (a, b)$ решение $z(t)$ стремится к a справа при $t \rightarrow \infty$. В случае $z_0 = a$ или $z_0 = b$ решение будет стационарным. Режим с обострением наблюдается при $z_0 \in (b, +\infty)$, $z(t)$ разрушается при

$$t = t_* = \frac{1}{b-a} \ln \left(-\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{b-a} \right). \quad (13)$$

И, наконец, при $z_0 \in (-\infty, a)$ $z(t)$ стремится к a слева при $t \rightarrow \infty$.

3.2 Неограниченные и затухающие точные решения.

В этом разделе будет доказано существование неограниченных и затухающих точных решений путём исследования системы (9). Будут выведены условия на начальные значения коэффициентов $p(t)$ и $q(t)$, стартуя с которых они затухают или же, наоборот, неограниченно возрастают с ростом аргумента t .

Заметим вначале, что $p(t)$ и $q(t)$ положительны, если начальные данные $p_0 = p(0)$, $q_0 = q(0)$ больше нуля. Это следует из формулы Коши, которую применим к обоим уравнениям системы (9). Получим:

$$p(t) = p_0 \exp(-\omega t) + \exp(-\omega t) \cdot \int_0^t \exp(\omega s) \cdot \alpha(s) ds, \quad \omega = u_0 + u_1, \quad (14)$$

$$q(t) = q_0 \exp \left(\int_0^t \beta(s) ds \right), \quad (15)$$

где

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} q^2(t) + p^2(t) + u_0 u_1, \quad \beta(t) = \frac{3}{2} p(t) - (u_0 + u_1), \quad (16)$$

Всюду далее нас будут интересовать решения системы (9) ($p(t)$, $q(t)$), лежащие в положительном квадранте.

Получим оценки на коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$. Для этого используем технику дифференциальных неравенств (см. Гл. III [11]). Из первого уравнения системы (9) следует, что

$$\dot{p} \geq p^2 - (u_0 + u_1)p + u_0 u_1. \quad (17)$$

Сложив уравнения системы (9), получим

$$\frac{d(p+q)}{dt} \leq (p+q)^2 - (u_0 + u_1)(p+q) + u_0 u_1. \quad (18)$$

Рассмотрим уравнение $\dot{z} = z^2 - (u_0 + u_1)z + u_0 u_1$, которое, очевидно, эквивалентно уравнению

$$\dot{z} = (z - u_0)(z - u_1). \quad (19)$$

Используя результаты предыдущего пункта, получаем:

$$z(t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow t_*, \text{ если } z_0 > u_1, \quad (20)$$

$$z(t) \rightarrow u_0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ если } z_0 < u_1. \quad (21)$$

Результаты 3.1 позволяют также вычислить и время обострения решений

$$(20): t_* = \frac{1}{(u_1 - u_0)} \ln \left(-\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{u_1 - u_0} \right), \quad C = \frac{u_1 - z_0}{(z_0 - u_0)(u_1 - u_0)}.$$

Из (17)-(18) следует, что

$$p(t) \geq z_1(t) \text{ при } p_0 \geq z_1(0) \quad (22)$$

$$p(t) + q(t) \leq z_2(t) \text{ при } p_0 + q_0 \leq z_2(0). \quad (23)$$

Здесь $z_1(t)$, $z_2(t)$ - решения уравнения (19) с соответствующими начальными условиями.

Используя (20), (23), мы получаем, что при $p_0 > u_1$ функция $p(t)$ обращается в (плюс) бесконечность за конечное время T_0 , которое оценивается сверху числом t_* .

Доказательство наличия у системы (9) затухающих решений получим с помощью (21)-(23). Фиксируем p_0 и q_0 такие, что $u_0 \leq p_0 < u_1$, $0 \leq q_0 < u_1 - p_0$. Возьмём два решения уравнения (19) с начальными данными равными, соответственно, p_0 и $p_0 + q_0$. Оба этих решения (обозначим их $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$), согласно (21) стремятся к u_0 .

При названных ограничениях на начальные значения, верна следующая цепочка неравенств:

$$\zeta_1(t) \leq p(t) \leq p(t) + q(t) \leq \zeta_2(t).$$

Отсюда делаем вывод, что $p(t) \rightarrow u_0$, $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3.3 Асимптотический анализ динамической системы.

Выше было установлено, что при $p_0 > u_1$ функция $p(t)$ растёт в режиме с обострением. Теперь покажем, что при $p_0 > u_0 + u_1$ функция $q(t)$ также развивается в режиме с обострением, причём моменты обострения $p(t)$ и $q(t)$ совпадают.

Поделим первое уравнение системы (9) на второе. Получившееся дифференциальное уравнение относительно функции $p = p(q)$ можно записать в виде

$$\frac{dp(q)}{dq} = \frac{\left(p^2(q) + \frac{1}{2}q^2\right)}{\frac{3}{2}p(q)q} \cdot \varphi(p(q), q), \quad (24)$$

где

$$\varphi(p(q), q) = \frac{1 + \frac{u_0 u_1 - (u_0 + u_1)p(q)}{p^2(q) + \frac{1}{2}q^2}}{1 - \frac{2u_0 + u_1}{3p(q)}}. \quad (25)$$

Таким образом, системе (9) мы поставили в соответствие уравнение (24).

Пусть начальные условия для системы (9) следующие:

$$p(0) = p_0 > u_0 + u_1, \quad q(0) = q_0 > 0. \quad (26)$$

Тогда соответствующее начальное условие для уравнения (24) будет выглядеть так:

$$p_0 = p(q_0) > u_0 + u_1. \quad (27)$$

Отметим, что при условиях (26) в правой части (25) не может возникнуть деления на нуль. Для задачи Коши (24), (27) будут выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения (см. [12]). Таким образом, интегральной кривой уравнения (24) с начальными условиями (27) $p(q)$ соответствует некая фазовая кривая системы (9) $(p(t), q(t))$, для них выполняется соотношение $p(t) = p(q(t))$.

Оценим функцию $\varphi(p(q), q)$ при условиях (26)-(27). Очевидно, что

$$\varphi(p(q), q) \leq 3 \cdot \left(1 + \frac{u_0 u_1}{(u_0 + u_1)^2}\right), \quad (28)$$

$$\varphi(p(q), q) \geq \frac{1 - \frac{u_0 + u_1}{p(q)}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{u_0 + u_1}{p(q)}} \geq 1 - \frac{u_0 + u_1}{p(q_0)} = \gamma_1 > 0. \quad (29)$$

Столь же просто выводится оценка сверху для первого множителя из правой части (24):

$$\frac{p^2(q) + \frac{1}{2}q^2}{\frac{3}{2}p(q)q} = \frac{2}{3} \cdot \frac{p(q)}{q} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q}{p(q)} \leq \frac{2}{3q_0} p(q) + \frac{1}{3} \frac{q}{u_0 + u_1}. \quad (30)$$

Для оценки снизу воспользуемся неравенством Коши-Буняковского:

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \quad (31)$$

Тогда при $p(q) > 0$, $q > 0$

$$\frac{p^2(q) + \frac{1}{2}q^2}{\frac{3}{2}p(q)q} \geq \gamma_2 = \frac{2}{3}. \quad (32)$$

Из (28)-(32) получаем

$$\gamma \leq \frac{dp}{dq} \leq C_1 p(q) + C_2 q, \quad (33)$$

где γ , C_1 , C_2 - положительные константы.

Левое неравенство в (33) даёт нам возможность утверждать, что при условиях (26)-(27) функция $p(q)$ монотонно возрастает и стремится к бесконечности при $q \rightarrow \infty$. Правое неравенство означает бесконечную продолжимость $p(q)$ (т.е. $p(q)$ не может обращаться в бесконечность при конечном q).

В самом деле, из теорем сравнения следует, что при всех $q \geq q_0$ верна оценка $p(q) \leq r(q)$, где $r(q)$ - решение уравнения сравнения

$$\frac{dr}{dq} = C_1 r + C_2 q \quad (34)$$

с начальным условием $r(q_0) = p_0$. Функция $r(q)$ ограничена при любом конечном q . Следовательно, $p(q)$ не может развиваться в режиме с обострением.

Вернёмся к системе (9). Выше мы выяснили, что при $p_0 > u_1$ (и, тем более, при $p_0 > u_0 + u_1$) функция $p(t)$ растёт в режиме с обострением, т.е. $p(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, где T_0 - момент обострения. Докажем от противного, что $q(t)$ также развивается в режиме с обострением и что времена обострения функций $p(t)$ и $q(t)$ совпадают. Если это не так, то при $t \rightarrow T_0^-$ $q(t)$ стремится к конечному значению. Чтобы показать, что это невозможно, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Если решение уравнения (24) $p(q) \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$, то верно следующее утверждение:

$$\frac{p(q)}{q} \rightarrow 1. \quad (35)$$

Доказательство. Очевидно, что в условиях леммы функция $\varphi(p(q), q)$ (25) стремится к единице. Поэтому при q , большего или равного некоторого $q_0 > q_0$ верна оценка

$$A(p(q), q, \varepsilon) \leq \frac{dp(q)}{dq} \leq B(p(q), q, \varepsilon), \quad (36)$$

где

$$A(p(q), q, \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \frac{\left(p^2(q) + \frac{1}{2}q^2\right)}{\frac{3}{2}p(q)q}, \quad (37)$$

$$B(p(q), q, \varepsilon) = (1 + \varepsilon) \frac{\left(p^2(q) + \frac{1}{2}q^2\right)}{\frac{3}{2}p(q)q}, \quad (38)$$

ε - произвольное положительное сколь угодно малое фиксированное число.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{d\tilde{p}(q)}{dq} = \alpha \frac{\left(\tilde{p}^2(q) + \frac{1}{2}q^2\right)}{\frac{3}{2}\tilde{p}(q)q}, \quad (39)$$

где $\alpha \approx 1$. Начальные условия зададим в точке $q = q_\varepsilon$: $\tilde{p}(q_\varepsilon) = p(q_\varepsilon)$.

Чтобы найти решение $\tilde{p}(q)$, сделаем замену

$$u(q) = \frac{\tilde{p}(q)}{q}. \quad (40)$$

Тогда после простых преобразований уравнение (39) примет вид

$$q \frac{du}{dq} = \frac{(2\alpha - 3)u^2 + \alpha}{3u}. \quad (41)$$

Последнее уравнение легко интегрируется, так как переменные разделяются.

Приходим к равенству

$$\left|(2\alpha - 3)u^2 + \alpha\right| = Cq^{\frac{2(2\alpha-3)}{3}}, \quad C > 0. \quad (42)$$

Поскольку $\alpha \approx 1$, правая часть стремится к нулю при $q \rightarrow \infty$. Отсюда делаем вывод, что

$$\left(\frac{\tilde{p}(q)}{q}\right)^2 \rightarrow \frac{\alpha}{3 - 2\alpha}. \quad (43)$$

Вернёмся к оценке (36). Используя теоремы сравнения, мы можем утверждать, что при $q \geq q_\varepsilon$

$$p_1(q) \leq p(q) \leq p_2(q), \quad (44)$$

где $p_1(q), p_2(q)$ - это решение уравнений типа (39) с параметром α , равным, соответственно, $1 - \varepsilon$ и $1 + \varepsilon$.

Утверждение (44) эквивалентно

$$\left(\frac{p_1(q)}{q}\right)^2 \leq \left(\frac{p(q)}{q}\right)^2 \leq \left(\frac{p_2(q)}{q}\right)^2, \quad (45)$$

поскольку $p_1(q), p(q), p_2(q)$ - положительные функции. Используя результат (43), при $q \geq q_\varepsilon$, получим такую оценку

$$1 - \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon} - \varepsilon_1 \leq \left(\frac{p(q)}{q}\right)^2 \leq 1 + \frac{3\varepsilon}{1-2\varepsilon} + \varepsilon_2, \quad (46)$$

где $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ - произвольные фиксированные, сколь угодно малые положительные числа. Из (46), в силу произвольности $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ следует утверждение леммы.

Если мы предположим, что $q(t)$ стремится к конечному значению при $t \rightarrow T_0^-$, то получим противоречие с утверждением леммы. Следовательно, $q(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$, т.е. $p(t)$ и $q(t)$ разрушаются одновременно.

Подведём промежуточный итог наших рассуждений: при начальных условиях (26) коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ обращаются в бесконечность за время $T_0 < \infty$, а отношение $\frac{p(q)}{q}$ (а следовательно, и $\frac{p(t)}{q(t)}$) стремится к единице при $t \rightarrow T_0^-$. Эти факты позволяют нам сделать некоторые заключения относительно поведения этих решений при приближении времени t к моменту обострения T_0 .

Пусть $u(x, t)$ - решение из семейства (8), т.е. записывается в виде

$$u(x, t) = p(t) + q(t) \cos \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad (47)$$

и пусть $p, q \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$. Всюду далее используем норму в пространстве $C(R)$: $\|u(x, t)\| = \max_{x \in R} |u(x, t)|$. Покажем, что определённым образом обработанные решения из семейства (8) стремятся к пространственной части автомодельного решения уравнения

$$u_t = (uu_x)_x + u^2, \quad (48)$$

которое имеет вид

$$u_s(t, x) = \frac{1}{(T_0 - t)} \theta_s(x), \quad (49)$$

где

$$\theta_s(x) = \frac{2}{3} \left(1 + \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \quad (50)$$

Норма решения (8) в любой момент времени t равна

$$\|u(x, t)\| = p(t) + q(t) \quad (51)$$

Очевидно, что

$$\|u(x, t) - \|u(x, t)\|\| = 2q(t). \quad (52)$$

Введём понятие обработки решения.

Обработкой решения $u(x, t)$ будем называть функцию

$$\Theta(u(x, t), A) = A \frac{u(x, t)}{\|u(x, t) - \|u(x, t)\|\|}, \quad (53)$$

где A – константа.

Обработка решений вида (8) при $q(t) > 0$ выглядит так

$$\Theta(u(x, t), 2A) = A \left(\frac{p(t)}{q(t)} + \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \quad (54)$$

Заметим, что функцию $\theta_s(x)$ (см. (50)), согласно нашему определению, можно считать обработкой решения $u_s(t, x)$:

$$\theta_s(x) = \Theta(u_s(t, x), 2). \quad (55)$$

В пункте 3.3 было показано, что при начальных условиях (26) $p(t)/q(t) \rightarrow 1$, когда $t \rightarrow T_0^-$, а, следовательно, справедлив следующий факт:

$$\left\| \Theta \left(u(x, t), \frac{4}{3} \right) - \theta_s(x) \right\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow T_0^-, \quad (56)$$

т.е. обработка решения из семейства (8) сходится по норме к $\theta_s(x)$.

4. Доказательство существования неограниченных и затухающих решений, задачи с локализованной начальной функцией.

Для описания физических явлений (напр., вспышек на Солнце) интересна задача (1)-(2) с начальной функцией $f(x)$, являющейся финитным возмущением ненулевого фона u_0 (температура поверхности Солнца). Локальное существование решения при таких начальных функциях доказано в [5]. В этом пункте исследуются решения (1)-(2), соответствующие таким начальным данным.

4.1 Затухающие решения.

Наличие таких решений легко установить с помощью теоремы сравнения для нелинейных параболических уравнений (см. [5]). Как было

установлено в 3.2, существуют решения исходного уравнения из семейства (8), которые стремятся к u_0 при $t \rightarrow \infty$.

С помощью теоремы сравнения можно легко обосновать, что решение $u(x, t)$, соответствующее начальной функции $v_0(x) \geq u_0 \forall x$, в любой момент времени будет больше или равно фону u_0 (который также является стационарным решением нашего уравнения).

Таким образом, существуют точные затухающие решения (8), превосходящие фон $u_0 \forall x \in R, \forall t \in [0, T)$. Коэффициенты $p(t)$ и $q(t)$ для таких решений при $t=0$ должны удовлетворять следующим условиям: $u_0 \leq p_0 < u_1, 0 \leq q_0 < \min(u_1 - p_0, p_0 - u_0)$. Пусть $\tilde{u}(x, t)$ - одно из таких решений. Тогда, если в задаче (1)-(2) начальная функция $f(x)$ всюду не превосходит $\tilde{u}(x, 0)$, то соответствующее ей решение будет затухающим.

4.2 Неограниченные решения.

Сразу отметим, что решение, соответствующее начальной функции, ограниченной сверху на всей прямой константой u_1 , не может развиваться в режиме с обострением. Функция $g(x, t) \equiv u_1$ является стационарным решением уравнения (1) и, как следует из теоремы сравнения, любое решение задачи Коши $u(x, t)$, не превосходящее u_1 в начальный момент времени, будет удовлетворять неравенству $u(x, t) \leq u_1$ в любой последующий момент времени.

Очевидно, что правая часть уравнения (1) оценивается снизу функцией $u^2 - (u_0 + u_1)u$. Следовательно, для решения (1) будет выполнено:

$$u_t \geq (uu_x)_x + u^2 - (u_0 + u_1)u. \quad (57)$$

Рассмотрим уравнение:

$$v(x, t)_t = (vv_x)_x + v(x, t)^2 - (u_0 + u_1)v(x, t). \quad (58)$$

Его можно решить с помощью разделения переменных. Будем искать автомодельные решения вида $v(x, t) = f(t)g(x)$. Для функций f и g получим следующие уравнения (константу разделения переменных положим равной единице):

$$\dot{f} + (u_0 + u_1)f = f^2, \quad (59)$$

$$(gg')' + g^2 = g. \quad (60)$$

В работе [5] показано, что уравнение (60) имеет финитное решение $\theta_s(x)$. Амплитуда $f(t)$ легко вычисляется из (59), в итоге получаем семейство решений

$$v(x, t) = \frac{u_0 + u_1}{1 - C_0 e^{(u_0 + u_1)t}} \theta_s(x). \quad (61)$$

При $0 < C_0 < 1$ решение (61) развивается в режиме с обострением. Это решение соответствует начальной функции $v_*(x) = v(x, 0)$.

Из теоремы сравнения следует, что решения исходной задачи (1)-(2), отвечающие начальным функциям $v_*(x)$ (или превосходящие их), будут развиваться в режиме с обострением.

5. Результаты расчётов.

Расчёты проводились с помощью пакета Matlab 7.0. Вычисления велись на подробных сетках (400 – 1800 узлов по x , динамический выбор шага t). Контроль над достоверностью вычисляемого решения осуществлялся с помощью сгущения сетки по x . Константа u_0 была положена равной 10, $u_1 = 22$.

Рассмотрим поведение решений нашего уравнения при различных начальных данных. Как уже было сказано, если начальная функция на всей числовой оси мажорируется функцией $p_1(0) + q_1(0) \cos \frac{x}{\sqrt{2}}$, где $p_1(t)$, $q_1(t)$ удовлетворяют системе (9) и затухают (соответствующие условия на $p_1(0)$ и $q_1(0)$ даны в 4.1), то соответствующее решение также будет затухающим.

Это наглядно продемонстрировано на рис. 2, где представлены профили решения в различные моменты времени. Начальная функция для

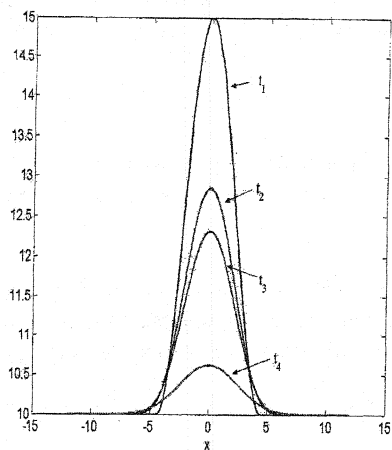
$$\text{этого решения: } u_0(x) = \begin{cases} u_0 + 5 \cos^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} x \right), & |x| < \pi\sqrt{2}, \\ u_0, & |x| > \pi\sqrt{2}. \end{cases}$$

Чтобы получить режим с обострением, возьмём начальную функцию в виде треугольника с достаточно большой амплитудой.

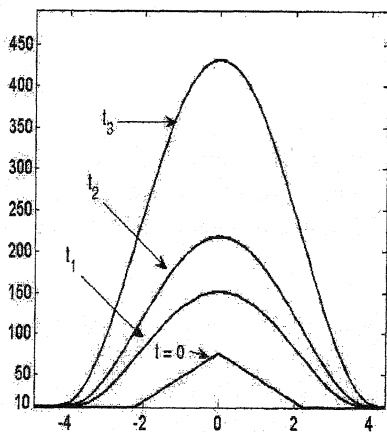
Профили соответствующего решения представлены на рис.3. Вид профилей решения говорит о наличии явления *локализации*. Существуют два типа локализации – строгая и эффективная (см [5]). Будем называть неограниченное решение исходной задачи $u(t, x)$ *строго* локализованным, если $u(t, x) = u_0$ всюду вне некоторого отрезка (a, b) при $t \in (0, T)$, где T - время обострения $u(t, x)$. *Эффективная* локализация имеет место, если

$$\text{множество } w_L = \left\{ x \left| \lim_{t \rightarrow T^-} u(t, x) = \infty \right. \right\} \text{ ограничено. В данном случае числен-}$$

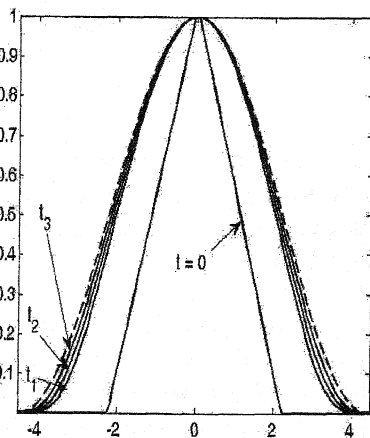
но показана строгая локализация решений. Решение неограниченно возрастает внутри некоторой ограниченной области w_L , имеющей в данном случае ненулевую меру, т.е. развивается в S-режиме.



*Профили затухающего решения
рис.2*



*Профили решения, растущего в режиме
с обострением
рис.3*



*Автомодельная обработка
рис.4*

Отметим сходство с хорошо изученным в литературе уравнением нелинейной теплопроводности со степенными нелинейностями

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta \quad (62)$$

Согласно [5], в этом уравнении S-режим имеет место при $\beta = \sigma + 1$. В нашей задаче $\sigma = 1$, а старший член в источнике имеет степень $\beta = \sigma + 1 = 2$.

На рис.4 показана так называемая автомоделная обработка профилей. Здесь мы используем определение обработки, отличное от (53). Автомоделной обработкой профиля решения $u(x, t_n)$ будем называть

функцию $g(x) = \frac{1}{\max_x u(x, t_n) - u_0} \cdot (u(x, t_n) - u_0)$. Пользуясь такой обра-

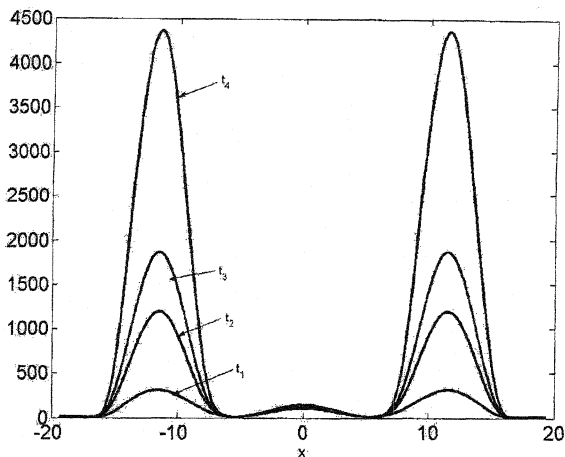
боткой профилей решения, мы легко можем отследить его асимптотическое поведение. На рис.4 видно, что обработанные профили с течением времени меняются всё меньше и меньше. Пунктирной линией, к которой приближаются обработанные профили, показана функция

$g_s(x) = \cos^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, которая является автомоделной обработкой точного решения $u_s(x, t)$ уравнения

$$u_t = (u u_x)_x + u^2, \quad (63)$$

(т.е. уравнения (62) при $\sigma = 1$), развивающегося в S-режиме. В какой-то момент обработанные профили сливаются с пунктирной линией и практически перестают меняться, то есть обработанное решение выходит на стационар.

Рассмотрим более интересные режимы с обострением – решения с несколькими максимумами. Будем называть их структурами. Чтобы получить такой режим с обострением, зададим локализованную начальную функцию с несколькими максимумами, превышающую $v(x, 0)$, где $v(x, t)$ - неограниченное решение уравнения (57). Расчёты (см. рис. 5) показывают, что соответствующее решение обладает структурной устойчивостью (сохраняется количество экстремумов) и свойством строгой локализации.



Сложная структура, развивающаяся в режиме с обострением
рис.5

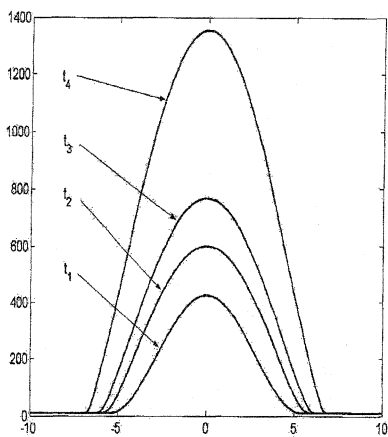
Кроме S-режима развития неограниченных решений известно ещё два – LS-режим, когда решение обращается в бесконечность в одной точке ($\text{mes } w_L = 0$), а полуширина решения сокращается, а также HS-режим, когда решение неограниченно возрастает на всей прямой.

Возникает вопрос – нельзя ли получить LS и HS-режимы с обострением путём изменения степени положительного члена в источнике? Согласно теории уравнения (62), LS-режим имеет место при $\beta > \sigma + 1$, а HS – при $1 < \beta < \sigma + 1$. В нашем случае $\sigma = 1$. Численно найдём решения уравнений

$$u_t = (uu_x)_x + u^{1.8} - (u_0 + u_1)u + u_0u_1 \quad (64)$$

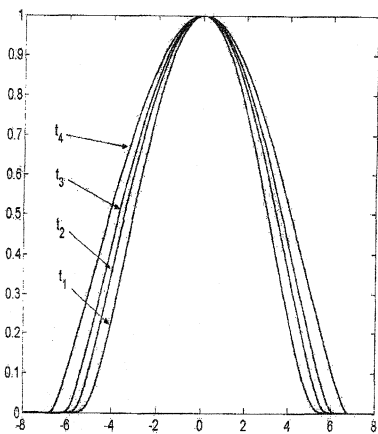
$$u_t = (uu_x)_x + u^{2.5} - (u_0 + u_1)u + u_0u_1 \quad (65)$$

При достаточно большой амплитуде начального возмущения решение уравнения (64) развивается в режиме с обострением, при этом фундаментальная длина увеличивается (рис.6). Это свидетельствует о наличии HS-режима.

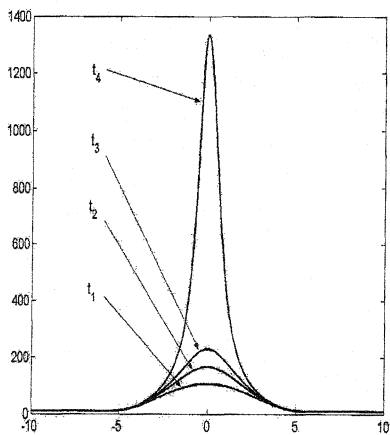


HS – режим

рис.6

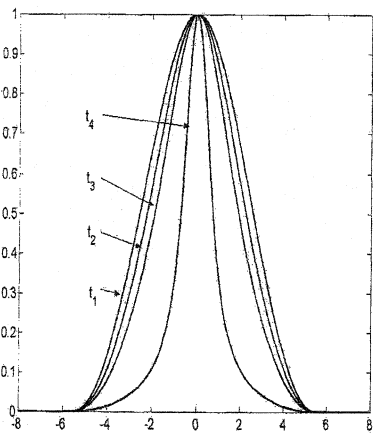


*Автомодельная обработка профилей
HS – режима
рис.7*



LS – режим

рис.8



*Автомодельная обработка профилей
LS – режима
рис.9*

На рис.7 представлены профили неограниченного решения уравнения (65). На рис.8 показана их автоматическая обработка. Легко видеть, что полуширина решения сокращается, т.е., как и ожидалось, имеет место LS-режим.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобанов А.И., Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови. // В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002, с. 346-367.
2. Кириченко Н.А. Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии. // В книге Режимы с обострением. Эволюция идеи. М.: Наука.1998. с. 217-230.
3. Белавин В.А., Курдюмов С.П. Режимы с обострением в демографической системе: Сценарий усиления нелинейности. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000, т.40, №2, с.238-251.
4. Капица С.П. Феноменологическая теория роста населения Земли. // Успехи физ. наук, 1996, т.166, №1, с.63-80.
5. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.
6. Галактионов В.А, Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. // Итоги науки и техники, сер. "Современные проблемы математики. Новейшие достижения", 1987, т. 28, с. 95–205.
7. Galaktionov, V.A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A., 1995, no.2, pp 225-246.
8. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005, 254с.
9. Ковалёв В.А., Чернов Г.П., Ханаока И. Мелкомасштабные высокотемпературные структуры во вспышечной области. // Письма в астрономический журнал, 2001, том 27, № 4, с. 310-320
10. Режимы с обострением. Эволюция идеи. М.: Наука, 1998, 255 с.
11. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970, 720 с.
12. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990, 486 с.