

## ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### **Введение**

Настоящая работа посвящена изучению автомодельных решений уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником тепла и плотностью, зависящей от радиуса по степенному закону. Она продолжает цикл работ, в которых исследуются свойства автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением [2]-[4]. **Режимом с обострением** называется процесс, в котором в одной точке или некоторой области пространства, или во всем пространстве температура обращается в бесконечность за конечное время  $t_f$ , называемое временем обострения.

Интерес к режимам с обострением возник около тридцати лет назад в связи с изучением процессов термоядерного горения в высокотемпературной плазме [5], [6]. Было открыто, что процесс горения в среде с нелинейной теплопроводностью может сопровождаться образованием **нестационарных диссипативных структур** и явлением **локализации**. При этом в ограниченной области пространства (на фундаментальной длине  $L_T$ ) происходит интенсивный нагрев в режиме с обострением, в то время как вне этой области температура либо строго равна нулю, либо ограничена.

Режимы с обострением имеют место не только в плазме, но и в других системах [7]-[13]. Динамика свертывания крови [9], взрыв научно технического прогресса, быстрое увеличение потребления земных ресурсов и т. д. хорошо ложатся на кривую, описываемую режимом с обострением [12]. Одним из наиболее важных и интересных их приложений режимов является социология [8]. Изучение закона роста народонаселения в течение сотен и даже многих тысяч лет также показывает, что численность земного шара увеличивается в режиме с обострением и к 2025 году должна обратиться в бесконечность [11]-[13]. Понятно, что режимы с обострением являются идеализацией реальных процессов (упрощенной моделью), и не учитывают факторы, которые ограничивают рост исследуемой функции вблизи момента обострения. Однако, модель позволяет понять и изучить существенные, наиболее значимые черты исследуемой системы, которые проявляются длительное время, вплоть до момента обострения.

Рассмотрим процесс горения среды инициированный заданием отдельных возмущений температуры в разных областях пространства. С

помощью вычислительных экспериментов было установлено, что если фундаментальные длины этих областей не пересекаются, то процесс горения идет в виде отдельных структур, каждая из которых существует в течение своего времени обострения, зависящего от максимума распределения температуры [14], [22]. Если фундаментальные длины пересекаются, то идет перестройка профиля распределения температуры и процесс вырождается в горение одной структуры, имеющей один максимум. Было замечено, что конфигурации, обладающие большей симметрией, дольше сохраняют свою структуру [16]. И, наконец, существуют особые сложные неоднородные распределения температуры со многими максимумами, которые развиваясь в режиме с обострением, сохраняют свою структуру почти все время  $t_f$  и только перед самым моментом обострения разваливаются, вырождаясь в простые структуры с одним максимумом [15]-[17]. Было установлено, что они описываются автомодельными решениями. Автомодельные решения определяют все типы структур или волн, которые могут возникнуть в данной нелинейной среде с одним моментом обострения.

Автомодельная задача для нелинейного уравнения теплопроводности представляет собой краевую задачу на собственные значения и собственные функции. Хотя эта задача изучалась много лет разными авторами, и накоплен большой материал по свойствам автомодельных решений [2], [3], до сих пор оставался невыясненным целый ряд вопросов, касающихся спектра автомодельных решений. Сначала задача рассматривалась в случае плоской геометрии и постоянной плотности. Было установлено, что в LS-режиме она может иметь неединственное решение при некоторых значениях параметров [15], [17]. Была найдена связь собственных функций автомодельной задачи с решением линеаризованного около пространственно однородного решения уравнения. Там же была изучена устойчивость автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением. Результаты этих исследований были затем обобщены на случай сферической и цилиндрической геометрии и распределенной плотности [18], [19]. В [20] найдены собственные функции, имеющие нулевую область в центре симметрии.

В настоящей работе впервые проводится **бифуркационный анализ** автомодельных решений с помощью численных алгоритмов продолжения по параметру, позволивший получить ряд принципиально новых результатов. В работе изучена эволюция с. ф. при изменении параметра, найдены и исследованы несколько бифуркаций, связанных с рождением или прекращением существования данных решений. Впервые определено число собственных функций при данных значениях параметров и найдена область существования по параметру каждой из собственных функций. Параметрический анализ проводился как в плоской геометрии, так и ци-

линдрической и сферической, и также в случае распределенной плотности. Показано, что спектр собственных функций автомодельной задачи в цилиндрической и сферической геометрии может иметь качественные отличия от спектра решений в плоском случае.

В работе исследовано также влияние профиля плотности. Показано, что в сферической геометрии введение распределения плотности эквивалентно увеличению размерности пространства в среде с постоянной плотностью. Установлено, что при сильном нарастании плотности в центре симметрии может произойти качественное изменение автомодельных решений (см. также [18], [19]).

В работе исследована устойчивость автомодельных решений. Кроме первой собственной функции, имеющей единственный максимум в центре симметрии, найдено еще одно структурно устойчивое решение – вторая собственная функция, имеющая нулевую область в центре симметрии (структура в виде сферического или цилиндрического слоя). Собственные функции с несколькими максимумами не обладают структурной устойчивостью и вырождаются вблизи момента обострения в простую структуру горения с одним максимумом. Однако, они могут иметь метастабильную устойчивость. Исследования, проведенные в настоящей работе показали, что метастабильная устойчивость сложных собственных функций зависит от значения параметров и от четности их номера. Нечетные собственные функции обладают низкой метастабильной устойчивостью и начинают вырождаться при росте температуры на порядок. Четные собственные функции могут иметь очень высокую метастабильную устойчивость. Чем ближе параметры задачи к S-режиму, тем выше становится устойчивость четных собственных функций.

В численных расчетах выявлено два разных сценария вырождения сложных с. ф. в простые при приближении к моменту момента обострения в зависимости от значений параметров. Показано, что при параметрах близких к S – режиму четные сложные с.ф. существуют очень долго и поэтапно распадаются на независимо горящие на своей фундаментальной длине со своим моментом обострения структуры.

## **1. Постановка и основные свойства автомодельной задачи**

### **1.1. Постановка автомодельной задачи**

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящими от температуры по степенному закону в плоской ( $\nu = 0$ ), цилиндрической ( $\nu = 1$ ) и сферической ( $\nu = 2$ ) геометрии. Распределение температуры  $T(r, t)$  в пространстве удовлетворяет уравнению:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \chi_0 T^\sigma \frac{\partial}{\partial r} T \right) + q_0 \rho T^\beta, \quad (1)$$

где  $E = c_V T$ ,  $c_V, \chi_0, q_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 1$  – заданные параметры.

Предполагается, что при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  плотность зависит от радиуса по степенному закону:

$$\rho = Ar^{-k}, \quad 0 \leq k < 2, \quad (2)$$

и в частном случае может быть постоянной (при  $k = 0$ ). Если  $0 < k < 2$ , она обращается в бесконечность при  $r = 0$ , однако эта особенность интегрируема, так что масса вещества в центральной области остается ограниченной.

Уравнение (1) разделим на произведение  $A^* c_V$ , и полученные коэффициенты  $\chi = \frac{\chi_0}{Ac_V}$ ,  $q = \frac{q_0}{c_V}$  положим равными единице, что не ограничивает общности рассмотрения, а означает преобразование масштабов:

$$\tilde{r} = r_0 r, \quad \tilde{t} = t_0 t, \quad r_0 = \left( \frac{q}{\chi} \right)^{\frac{1}{-k+2}}, \quad t_0 = q. \quad (3)$$

Задача рассматривается как в ограниченной области, на отрезке  $0 \leq r < r_f$ , так и на полупрямой  $0 \leq r < \infty$ . Горение инициируется заданием некоторого начального ограниченного центрально-симметричного распределения температуры  $T(r, 0) = T_0(r) \leq M < \infty$ , которое будет определено ниже.

На фронте волны горения ставятся обычные условия непрерывности температуры и теплового потока по нулевому фону. Если фронт конечный, то

$$r^\nu T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_f} = 0, \quad T \Big|_{r=r_f} = 0, \quad (4')$$

и требуется определить закон движения фронта  $r_f(t)$ .

Если фронт находится на бесконечности, то граничные условия имеют вид:

$$r^\nu T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4'')$$

В центре симметрии решения удовлетворяют условию:

$$r^\nu T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0. \quad (5)$$

Работа посвящена исследованию автомодельных решений уравнения (1), развивающихся в режиме с обострением. Подстановка выражения:

$$T(r,t) = g(t)\Theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (6)$$

в уравнение (1) определяет вид функций  $g(t)$ ,  $\psi(t)$ :

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta-1}, \quad n = \frac{\beta-\sigma-1}{(\beta-1)(-k+2)}, \quad (7)$$

и вид автомодельного уравнения относительно функции  $\Theta(\xi)$ :

$$\frac{1}{\xi^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \xi^\nu \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \xi^{-k} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi^{-k+1} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \xi^{-k} \Theta^\beta, \quad (8)$$

где  $\tau$  – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (6).

В соответствии с условиями (4) и (5) будем искать решения автомодельного уравнения (8), удовлетворяющие следующим граничным условиям, либо на фронте при  $\xi = \xi_f$ :

$$\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad (9)$$

либо на бесконечности при  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Исследуются ограниченные автомодельные решения, которые в начале координат удовлетворяют условиям:

$$\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = 0} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = 0} < \infty. \quad (11)$$

Краевая задача (9) или (10), (11) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (8) является задачей на собственные значения (с. з.)  $\tau$  и собственные функции (с. ф.)  $\Theta(\xi, \tau)$ . Цель настоящей работы заключается в исследовании спектра с.ф. в зависимости от значенных параметров  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  и  $k$ . В работе проводится также исследование устойчивости автомодельных решений (6) уравнения с частными производными (1).

## 1.2. Пространственно-однородные решения

Автомодельное уравнение (8) представляет собой неавтономное (за исключением случая  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ ,  $\beta = \sigma + 1$ ) уравнение второго порядка. Заменой

$$y = \Theta^{\sigma+1}, \quad w = \frac{dy}{d\xi} \quad (12)$$

оно сводится к системе двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dy}{d\xi} = w,$$

$$\frac{dw}{d\xi} = -\frac{\nu}{\xi} w + \xi^{-k} \left( \frac{n}{\tau} \xi y^{\frac{\sigma}{\sigma+1}} w + (\sigma+1) \left( -\frac{m}{\tau} y^{\frac{1}{\sigma+1}} - y^{\frac{\beta}{\sigma+1}} \right) \right). \quad (13)$$

Уравнение (8) имеет два частных пространственно-однородных решения: нулевое

$$\Theta_0(\xi) \equiv 0 \quad (14)$$

и гомотермическое решение

$$\Theta_H = \left( \frac{1}{(\beta-1)\tau} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}. \quad (15)$$

Эти два решения являются стационарными точками в фазовом пространстве системы (13). Граничное условие (10) означает, что траектория, описывающая собственную функцию, при  $\xi \rightarrow \infty$  стремится к стационарной точке (0,0), а граничное условие (9) означает выход траектории в ту же точку за конечное время  $\xi_f$ : Отметим, что стационарная точка (14) является особой точкой автомодельного уравнения, так как она обращает в ноль коэффициент теплопроводности, стоящий перед старшей производной. В этой точки мы имеем вырожденное уравнение, а при приближении к ней уравнение с малым параметром при старшей производной. Именно этот факт приводит к возможности достижения стационарной точки за конечное время.

Уравнение с частными производными (1) имеет два соответствующих пространственно-однородных автомодельных решения: нулевое ( $T(r,t) \equiv 0$ ) и гомотермическое:

$$T_H(t) = T_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_f} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad \tau_f = \frac{T_0^{1-\beta}}{\beta-1}. \quad (16)$$

Гомотермическое решение развивается в режиме с обострением при  $\beta > 1$  и является решением задачи Коши для уравнения (1) при однородных начальных данных:  $T_0(r) = T_0 = \text{const} > 0$ ,  $-\infty < r < +\infty$ .

### 1.3. Три типа автомодельных решений и их некоторые свойства

Если собственные значения (с. з.)  $\tau$  и собственные функции (с. ф.)  $\Theta(\xi, \tau)$  автомодельной задачи найдены, то распределение температуры в каждый момент времени задается формулами (6), (7).

Отметим некоторые свойства автомодельных решений, которые следуют непосредственно из анализа функций  $g(t)$ ,  $\psi(t)$  и уравнения (8)

[15], [17]–[19]. Так как  $\beta > 1$ , то  $m < 0$  и при положительном с. з.  $\tau > 0$  они существует конечное время  $\tau_f = \tau$  и развивается в режиме с обострением. При отрицательном с. з.  $\tau < 0$  автомодельное решение существует для любого  $t > 0$  и описывает затухающий режим. Поскольку нас интересуют режимы с обострением, то мы будем рассматривать только  $\tau > 0$ .

Из формулы (7) следует, что при  $n < 0$  (то есть при  $1 < \beta < \sigma + 1$ ) происходит расширение и рост с. ф. со временем. Если решение автомодельной задачи существует, то оно описывает в этом случае тепловую волну, амплитуда и скорость которой растут в режиме с обострением, а фронт увеличивается по закону:

$$r_f = \xi_f \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n. \quad (17)$$

Если  $n = 0$  (то есть  $\beta = \sigma + 1$ ), то фронт и все остальные точки профиля с. ф. не перемещаются по пространству; решение автомодельной задачи описывает локализованную в некоторой области нестационарную диссипативную структуру, развивающуюся в режиме с обострением.

При  $n > 0$  (то есть при  $\beta > \sigma + 1$ ) все точки профиля с. ф. движутся к центру; происходит сокращение полуширины области горения. В этом случае не существует решения автомодельной задачи в ограниченной области пространства, иначе бы фронт тепловой волны сокращался по закону (18), что противоречило бы второму началу термодинамики; в этом случае фронт находится на бесконечности, и выполняются условия (10).

Если исследуемая задача имеет решение при некотором значении  $\tau = \tau_1 > 0$ , то она имеет решение и при любом другом значении  $\tau = \tau_2 > 0$ . Эти решения связаны преобразованием подобия:

$$\Theta(\xi, \tau_2) = \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^m \Theta\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \xi, \tau_1\right). \quad (18)$$

Если существует решение автомодельной задачи на некотором отрезке пространства  $0 \leq \xi \leq \xi_f^1$  при  $\tau = \tau_1$ , то, как следует из формулы (19), решение существует и на любом другом отрезке  $0 \leq \xi \leq \xi_f^2$ , причем:

$$\left[\frac{\tau_1}{\tau_2}\right]^n = \frac{\xi_f^2}{\xi_f^1}. \quad (19)$$

Таким образом, с. ф. отвечающие разным собственным значениям на самом деле являются одним и тем же автомодельным решением, взятым в разные моменты времени. Это свойство позволяет не рассматривать все значения  $\tau$ , а выбрать одно произвольное, например

$$\tau = \frac{1}{\beta - 1} \quad (20)$$

(тогда гомотермическое решение  $\Theta_H = 1$ ), и найти ему соответствующий спектр функций  $\Theta(\xi, \tau)$ .

Исследуем поведение решений при  $\xi \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow \xi_f$  и  $\xi \rightarrow \infty$ . Это даст нам необходимые условия существования автомодельных решений на отрезке  $[0, \xi_f]$  и на полупрямой  $[0, \infty)$ .

Пусть задача (8) (9) имеет решение, тогда, как показывает анализ, главный член асимптотики функции  $\Theta(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \xi_f$  имеет вид:

$$\Theta(\xi) \cong A(\xi_f - \xi)^\alpha, \quad \xi < \xi_f, \quad (21)$$

где

$$\alpha = \frac{2}{\sigma}, \quad A = \left( \frac{\sigma}{2(\sigma+2)\tau} \xi_f^{-k} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \beta = \sigma + 1;$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma}, \quad A = \left( -\frac{n\sigma}{\tau} \xi_f^{-k+1} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad n \neq 0,$$

$$\nu = 0, 1, 2; \quad 0 \leq k < 2.$$

Представление (21) имеет смысл при  $\tau > 0$  (режим с обострением), если  $\beta = \sigma + 1$  или  $1 < \beta < \sigma + 1$ . Если же  $\beta > \sigma + 1$ , то разложение существует на бесконечности; у конечного фронта в этом случае разложение (24) тоже существует, но только при  $\xi > \xi_f$  (то есть когда фронт находится слева):

$$\Theta(\xi) \cong A(\xi - \xi_f)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \xi > \xi_f, \quad \beta > \sigma + 1. \quad (22)$$

При  $\beta = \sigma + 1$  фронт также может находиться слева, поскольку существует разложение у нулевого фона при  $\xi \rightarrow \xi_f + 0$ .

Проинтегрировав уравнение (8) на отрезке  $[0, \xi_f]$  с учетом граничных условий, получим глобальное необходимое условие существования решений, имеющих конечный фронт.

$$\int_0^{\xi_f} \xi^{-k+\nu} \Theta^\beta d\xi = \left( -\frac{m}{\tau} - \frac{n}{\tau}(-k+1+\nu) \right) \int_0^{\xi_f} \xi^{-k+\nu} \Theta d\xi, \quad \nu = 0, 1, 2.$$

Отсюда следует, что  $\left( -\frac{m}{\tau} - \frac{n}{\tau}(-k+1+\nu) \right) > 0$ , то есть  $1 < \beta \leq \sigma + 1$  ( $\tau > 0$ ).

При  $\beta > \sigma + 1$  существует асимптотическое разложение автомодельного решения при  $\xi \rightarrow \infty$ . Главный член асимптотики имеет вид:

$$\Theta(\xi) \approx C\xi^{-p}, \quad p = \frac{(-k+2)}{\beta - \sigma - 1} > 0. \quad (23)$$



Если подставить (23) в выражение для автомодельного решения (6), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры не зависит от времени:

$$T(r, t) \rightarrow Cr^{-p}. \quad (24)$$

Это обстоятельство указывает на локализацию горения: температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, в то время как вне этой области она стремится к предельному, постоянному по времени распределению температуры (24). Хотя автомодельное решение при  $\beta > \sigma + 1$  существует на бесконечной прямой, описываемый им режим, реализуется только в ограниченной области. С помощью теорем сравнения доказана локализация процессов горения в этом случае и «обрезание бесконечного хвоста» у автомодельного решения [21].

Уточним условие (11) в центре симметрии. Пусть решение автомодельной задачи существует и отлично от нуля при  $\xi = 0$ . Подставляя разложение  $\Theta(\xi) \approx C_0 + C_1 \xi^s + \dots$  в автомодельное уравнение, найдем асимптотику решений при  $\xi \rightarrow 0$ . Как показывает анализ,

$$s = -k + 2, \quad C_0 \neq \Theta_H, \quad C_0 \neq 0. \quad (25)$$

Отсюда следует, собственные функции имеют при  $\xi = 0$  строго определенную производную  $\Theta'_\xi(0)$ , которая в зависимости от показателя плотности  $k$  принимает значения от нуля до бесконечности:

$$\begin{aligned} \Theta'_\xi(0) &= 0 \quad \text{при } 0 \leq k < 1, \quad v = 0, 1, 2; \\ \Theta'_\xi(0) &= C_1 < \infty \quad \text{при } k = 1 \quad v = 1, 2; \\ \Theta'_\xi(\xi) &\rightarrow \infty \quad \text{при } \xi \rightarrow 0 \quad \text{если } 1 < k < 2, \quad v = 1, 2. \end{aligned} \quad (26)$$

Хотя производная собственной функции в точке  $\xi = 0$  при  $1 \leq k < 2$  отлична от нуля, поток и цилиндрической системе координат и в сферической равен нулю, и условие (11) выполняется.

Подытоживая описанные свойства автомодельных решений, можем утверждать, что три типа автомодельных режимов с обострением в цилиндрической и сферической геометрии и рассматриваемом распределении плотности ( $0 \leq k < 2$ ) имеют место при том же соотношении между параметрами  $\beta$  и  $\sigma$ , что и в плоском случае с постоянной плотностью [15], [17].

**HS-режим** реализуется при  $1 < \beta < \sigma + 1$ . Исследования показали, что автомодельная задача в этом случае имеет единственную собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке  $[0, \xi_f]$  с максимумом в центре симметрии ( $\Theta(0) > \Theta_H$ ). Решение представляет собой тепловую волну, амплитуда и фронт которой увеличиваются в режиме с обострением.

**S-режим** реализуется при  $\beta = \sigma + 1$ , и представляет собой нестационарную диссипативную структуру локализованную на фундаментальной длине  $L_T$ . Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. В случае плоской геометрии и постоянной плотности в [14] было получено аналитическое решение автомодельной задачи:

$$T(r, t) = T_0 g(t) \Theta_S(r), \quad \Theta_S(r) = \left[ \Theta_0 \cos^2 \left( \frac{\pi \cdot r}{L_T} \right) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 \leq r \leq 0.5 * L_T, \quad (27)$$

$$\Theta_0 = \frac{2(\sigma + 1)}{(\sigma + 2)}, \quad L_T = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{(\sigma + 1)}.$$

Автомодельное уравнение (8) в этом случае является автономным, поэтому решение (27) инвариантно относительно сдвига по оси  $\xi$ . Его можно рассматривать как периодическое с периодом  $L_T$ .

В сферической и цилиндрической геометрии автомодельное уравнение (8) не является автономным при  $\beta = \sigma + 1$ . Исследования показали, что при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  и рассматриваемых плотностях существует единственное решение автомодельной задачи на отрезке  $[0, \xi_f]$  ( $\Theta(0) > \Theta_H$ ). Если плотность постоянная, то решение качественно имеет такой же вид как и в плоской геометрии (27), только с увеличением размерности пространства фундаментальная длина и амплитуда решения увеличиваются. Для оценки размера области локализации при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$ ,  $k = 0$  будем искать с. ф. в виде:

$$\Theta(\xi) = \Theta_\nu \left( \cos \frac{\pi \xi}{L_{T\nu}} \right)^{\frac{2}{\sigma}} \quad (28)$$

со своей амплитудой  $\Theta_\nu$  и областью локализацией  $L_{T\nu}$ . Подстановка (28) в уравнение (8) позволяет определить приближенное значение фундаментальной длины и амплитуды:

$$L_{T\nu} \approx \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\left( \sigma + 1 + \frac{\sigma}{\pi} I \right)}, \quad \Theta_\nu \approx \left( \frac{2 \left( \sigma + 1 + \frac{\sigma}{\pi} I \right)}{(\sigma + 2)} \right)^{1/\sigma}. \quad (29)$$

$$\nu = 1, I \approx 1.84; \quad \nu = 2, I \approx 3.68$$

В формуле (29) значение  $I$  находится из решения некоторого интеграла. Влияние профиля плотности будет описано ниже.

**LS-режим** реализуется при  $\beta > \sigma + 1$ . Автомодельные решения существуют на интервале  $[0, \infty)$  или  $[\xi_f, \infty)$  и представляют собой неста-

ционарные диссипативные структуры; все точки такой структуры движутся к центру симметрии, полуширина области горения сокращается, и температура при  $t = \tau$  обращается в бесконечность только в одной точке — центре симметрии.

#### 1.4. Влияние распределения плотности

В автомодельном уравнении (8) сделаем замену переменных [18]:

$$z = \frac{2}{-k+2} \xi^{\frac{-k+2}{2}}, \quad k > -2, \quad (30)$$

переводящую полупрямую  $0 \leq \xi < \infty$  в полупрямую  $0 \leq z < \infty$ . Тогда уравнение (8) для среды с распределенной плотностью (2) перейдет в автомодельное уравнение с постоянной плотностью и плоской геометрии, в которой есть нелинейный переносный член:

$$\frac{d}{dz} \left( \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{dz} \right) + \frac{b}{z} \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{dz} = \frac{1}{(\beta-1)\tau} \Theta + \frac{(\beta-\sigma-1)}{2(\beta-1)\tau} z \frac{d\Theta}{dz} - \Theta^\beta, \quad (31)$$

где  $b = 1$  при  $\nu = 1$ ;  $b = \frac{-k+4}{-k+2}$  при  $\nu = 2$ .

В случае цилиндрической геометрии ( $\nu = 1$ ) преобразование (30) переводит уравнение (8) с  $\kappa \neq 0$  в уравнение с  $\kappa = 0$ , и решения автомодельной задачи  $\Theta(\xi)$  при  $\kappa \neq 0$  получаются из решений уравнения (31)  $\Theta(z)$  преобразованием растяжения по автомодельной переменной:

$$\xi = \left( \frac{-k+2}{2} z \right)^{\frac{2}{-k+2}}. \quad (32)$$

Таким образом, при  $\nu = 1$  автомодельные решения достаточно строить только для  $\kappa = 0$ , а влияние показателя  $\kappa$  проанализировать из (32). Из формулы (32) следует, что при  $z > \bar{z} = \frac{2}{-k+2}$  решение  $\Theta(\xi)$  растягивается, а при  $z < \bar{z}$  — сжимается. При  $k \rightarrow 2$   $\bar{z} \rightarrow \infty$ , и автомодельное решение все сильнее прижимается к центру. Кроме того, при  $k > 1$  с. ф. имеют бесконечную производную в начале координат (26).

В S-режиме ( $\beta = \sigma + 1$ ) при  $\nu = 1$  зная фундаментальную длину  $L_{T1}^0$  при  $\kappa = 0$  (29), находим значение фундаментальной длины  $L_{T1}^k(\xi)$  при любом показателе плотности  $\kappa$ :

$$L_T^k = 2 \left[ \frac{-k+2}{4} L_T^0 \right]^{\frac{2}{-k+2}}, \quad k < 2. \quad (33)$$

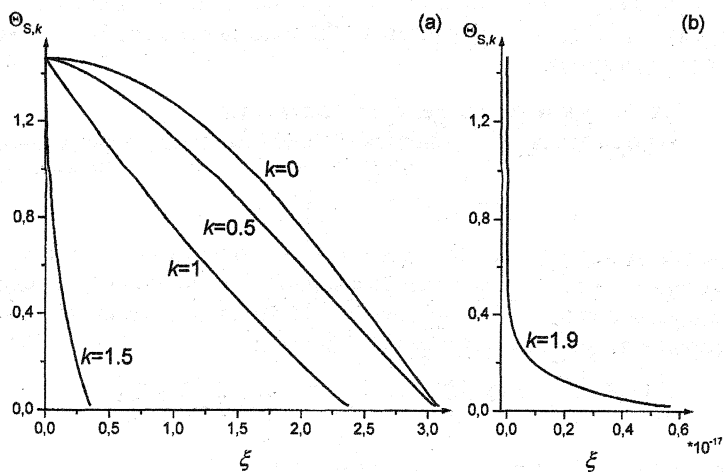


Рис. 1 Влияние профиля плотности в цилиндрической геометрии. S-режим. Вид собственной функции при  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3.0$ ,  $\nu = 1$  и разных показателях  $k$ .

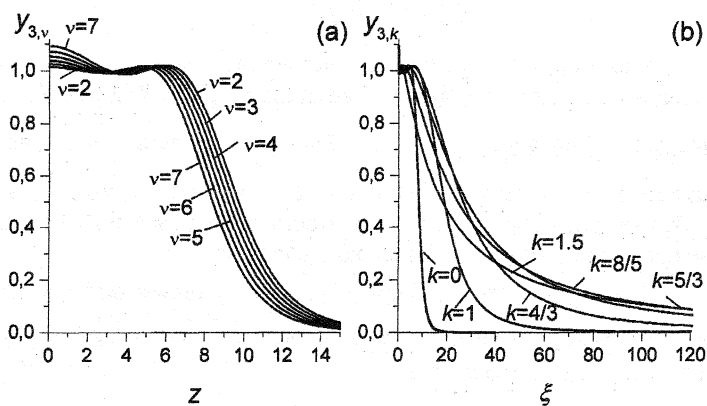


Рис. 2 Влияние профиля плотности в сферической геометрии. LS-режим. Вид третьей собственной функции при  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3.8$ ,  $\nu = 2$  и разных показателях  $k$ .

На рис. 1а представлен вид с. ф. при  $\beta = 3$ ,  $\sigma = 2$  при разных плоскостях. При  $k \rightarrow 2$ , как следует из формулы (33) фундаментальная длина стремится к нулю (так при  $k = 1.9$   $L_{T1}^k \approx 6 * 10^{-17}$ ), а собственная функция прижимается к оси ординат (см. рис. 1б).

В сферической геометрии с увеличением показателя плотности автомодельные решения не только растягиваются или сжимаются по закону (32), но и изменяется их профиль, так как увеличивается коэффициент  $b$  в уравнении (31). Поскольку

$$\frac{d}{dz} \left( \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{dz} \right) + \frac{b}{z} \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{dz} = \frac{1}{z^b} \frac{d}{dz} \left( z^b \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{dz} \right), \quad (34)$$

то увеличение показателя плотности эквивалентно увеличению размерности пространства в среде с постоянной плотностью. Исследования показали, что хотя при  $k \rightarrow 2$   $b \rightarrow \infty$ , что приводит в S-режиме к увеличению значения с. ф.  $\Theta(z)$  при  $z = 0$  и ее полуширины, тем не менее сжатие по закону (32) является преобладающим и фундаментальная длина  $L_{T2}^k(\xi)$  стремится к нулю при  $k \rightarrow 2$ . В LS-режиме собственные функции также прижимаются к оси ординат при  $k \rightarrow 2$  в области вблизи центра, в то время как «хвост» уходит в сторону бесконечности. На рис. 2а представлен вид одной из с. ф.  $y_3(z)$  для  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3.8$ ,  $\nu = 2$  при разных коэффициентах  $b$ , а на рис. 2б – вид того же решения  $y_3(\xi)$  при разных  $k$  для исходного автомодельного уравнения (8). Ниже будет показано, что в сферической геометрии увеличение показателя плотности приводит не только к деформации с.ф. как показано на рис. 2, но и к качественному изменению автомодельного решения. Четные с.ф. превращаются в структуры с нулевой областью в центральной части, а нечетные выпадают из спектра, распадаясь на первую с.ф. и четную с.ф. с нулевой областью.

### 1.5. Численные методы построения автомодельных решений

В настоящей работе решения автомодельных задач на отрезке (8), (9), (11) и на полупрямой (8), (10), (11) строились методом стрельбы. Все расчеты проводились с использованием библиотеки программ и среды MATLAB 6.5. Уравнение (8) заменой (12) сводилось к системе двух уравнений первого порядка (13), для которой задача Коши решалась методом (*ode15s*) для жестких систем с автоматическим выбором шага, с заданной относительной (*rtol*) и абсолютной (*atol*) точностью. В большинстве случаев для  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$   $rtol = 10^{-10}$ , а  $atol = 10^{-12}$ . В случае сферической геометрии и плотности с  $1 < k < 2$  сначала уравнение (8) подстановкой (30) сводилось к уравнению (31), а затем – к системе (13), тогда в начале координат производная автомодельного решения равна нулю.

Решение строилось от некоторой точки  $\xi = \xi_f$ , в которой задавались значения функции  $y(\xi_f)$  и ее производной  $w(\xi_f)$ , до начала координат т.  $\xi_0$  (для  $\nu = 0$   $\xi_0 = 0$ , для  $\nu = 1$   $\xi_0 = 10^{-5}$  и для  $\nu = 2$   $\xi_0 = 10^{-4}$ ). Функция  $y(\xi_f)$  бралась близкой к нулю (обычно  $y(\xi_f) = 10^{-5}$ ). Для нахождения производной  $w(\xi_f)$  в задаче на отрезке использовалось разложение (21) (считалось, что т.  $\xi_f$  близка к точке фронта). В задаче на полупрямой считалось, что в т.  $\xi_f$ , в которой функция  $y(\xi_f)$  мала, решение хорошо описывается асимптотикой (23), отсюда находилось значение  $w(\xi_f)$ . Значение  $\xi_f$  подбиралось так (методом дихотомии), чтобы в т.  $\xi_0$  производная  $w(\xi_0)$  была бы равна нулю с заданной точностью.

В работе также исследовались численно бифуркации собственных функций в LS-режиме. Для этого автомодельное решение продолжалось по параметру  $\beta$  и отслеживались изменения его профиля и формы траектории в фазовом пространстве уравнения (13). В процессе движения по параметру задавался максимальный шаг, который автоматически уменьшался, если не было сходимости за заданное количество итераций. На основе двух предыдущих значений  $\xi_f(\beta_i)$  прогнозировалось значение  $\xi_f$  для следующего значения  $\beta$ .

Стратегия выбора шага по параметру и по переменной  $\xi_f$  в методе пристрелки, а также адекватное задание точности численного построения решения позволили эффективно продолжить его по параметру и вплотную приблизиться к точкам бифуркации решения и тем самым исследовать их.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В LS-РЕЖИМЕ.

### 2.1. Связь собственных функций с решением линейной задачи

Первые численные расчеты автомодельной задачи при  $\beta > \sigma + 1$  были проведены более двадцати лет назад в случае плоской геометрии и постоянной плотности [15]. Было установлено, что рассматриваемая задача может иметь несколько с. ф.  $\Theta_i(\xi)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , в зависимости от значений параметров  $\beta$  и  $\sigma$ . Предполагалось [15, 17], что если  $\beta$  и  $\sigma$  таковы, что

$$a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1} = N - \text{целое число}, \quad (35)$$

то число с. ф. равно  $N$ . Если  $a$  – нецелое число, то  $N = [a] + 1$ , где  $[ ]$  – означает целую часть числа.

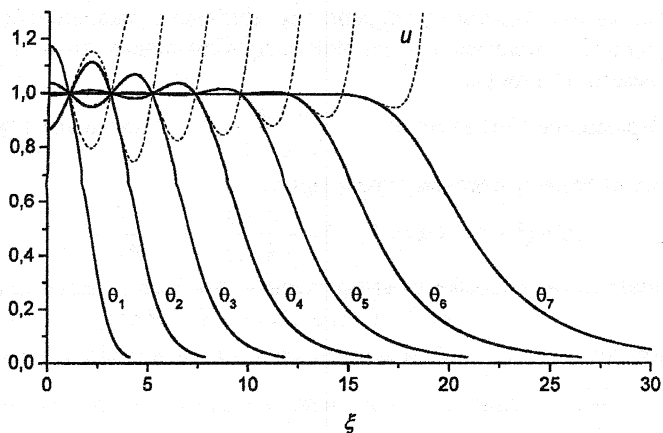


Рис. 3 Спектр с.ф. в LS-режиме при  $\sigma=2, \beta=3.3, \nu=0$ .

На рис. 3 приведены графики семи с. ф. (сплошная линия) при  $\sigma=2, \beta=3.3, \nu=0, \kappa=0$ , построенных численно описанным выше методом стрельбы. Первая с.ф. монотонно убывает. Следующие являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. Нечетные с. ф. в начале координат  $\Theta_{2j+1}(0) > \Theta_H$ , а четные —  $\Theta_{2j}(0) < \Theta_H$ . В области своей немонотонности, как видно из рис. 3, с.ф. совершают колебания около гомотермического решения (в данном случае  $\Theta_H=1$ ). Многочисленные расчеты показали, что поведение собственных функций при других значениях параметров в LS — режиме имеет аналогичный характер. Колебания эти во многих случаях малы и уменьшаются с ростом номера с. ф.. В области немонотонности автомодельные решения приближенно описываются функцией  $\Theta(\xi) \approx \Theta_H(1 + Au(\xi))$ , где  $A$  некоторая постоянная (для нечетных она положительная, для четных — отрицательная), а  $u(\xi)$  — решение линеаризованного около  $\Theta_H$  уравнения (8) ( $u(0)=1$ ):

$$\frac{1}{\xi^\nu} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^\nu \frac{du}{d\xi} \right) - \frac{\beta - \sigma - 1}{-k + 2} \xi^{-k+1} \frac{du}{d\xi} + (\beta - 1) \xi^{-k} u = 0. \quad (36)$$

Каждая с. ф. описывается решением линейной задачи со своей амплитудой  $A_j$ , причем старшая с. ф.  $\Theta_N$  в наибольшей области (по сравнению с областями для младших с. ф.) совпадает с решением линейного уравнения (см. фиг. 3 пунктирная линия). Остальные с.ф. «передают» только одно, два и т. д. колебаний решения линейного уравнения в соот-

ветствии с их номером. В [15] было высказано предположение, что число с. ф. совпадает с числом нулей решения линейного уравнения (36), так что последняя с.ф. описывается линейным приближением во всей своей области немонотонности.

Уравнение (36) заменой  $z = \frac{\beta - \sigma - 1}{(-k + 2)^2} \xi^{-k+2}$  сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению:

$$zu'' + (b - z)u' + au = 0, \quad b = \frac{-k + 3}{-k + 2}, \quad a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \quad (37)$$

решением которого является вырожденная гипергеометрическая функция:

$$u(z) = CM(-a, b, z), \quad C = \text{const},$$

которая представляет собой многочлен степени  $\mu$ , удовлетворяющий условию  $\frac{du}{dz} = 0$  при  $z = 0$  и имеющий ровно  $\mu$  нулей на полуоси  $0 < z < \infty$ . Отсюда и получалась оценка (35) числа с. ф.

Как видно из формулы (35) число с. ф. тем больше, чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$  и чем больше значения  $\beta$  и  $\sigma$ ; и  $N \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ . Численные расчеты, проведенные в [20] показали, что при  $\beta$  близких к  $\sigma + 1$  число с. ф. действительно сильно увеличивается, они сильнее отклоняются от гомотермического решения и линейное приближение «работает» плохо. Были также отслежены тенденции стремления с. ф. при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  к периодическому автомодельному решению (27) при  $\beta = \sigma + 1$ .

## 2.2 Бифуркационный анализ автомодельных решений в плоском случае.

С целью выяснения числа собственных функций автомодельной задачи в LS – режиме, а также исследования характера их зависимости от параметра был проведен бифуркационный анализ решений. Первые десять собственных функций были продолжены по параметру  $\beta$  при фиксированном параметре  $\sigma$  ( $\sigma = 2$ ). Результаты расчетов отражены на двух бифуркационных диаграммах на рис. 4а и 4б. На первой диаграмме (рис. 4а) показана зависимость от параметра  $\beta$  отклонения  $\delta(\beta) = y_j(0) - 1$ ,  $j = 1, \dots, 10$ ,  $y_j(\xi) = \Theta_j^{\sigma+1}(\xi)$ . На второй диаграмме показана зависимость от  $\beta$  значения автомодельной переменной  $\xi_{j,1}(\beta)$ , в которой  $y_j(\xi_j) = 10^{-5}$ .

Проведенный анализ показал, что собственная функция  $\Theta_j$  с номером  $j = 2, 3, 4, \dots$  существует в интервале

$$\sigma + 1 < \beta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \frac{j(\sigma + 1) - 1}{J - 1}. \quad (38)$$



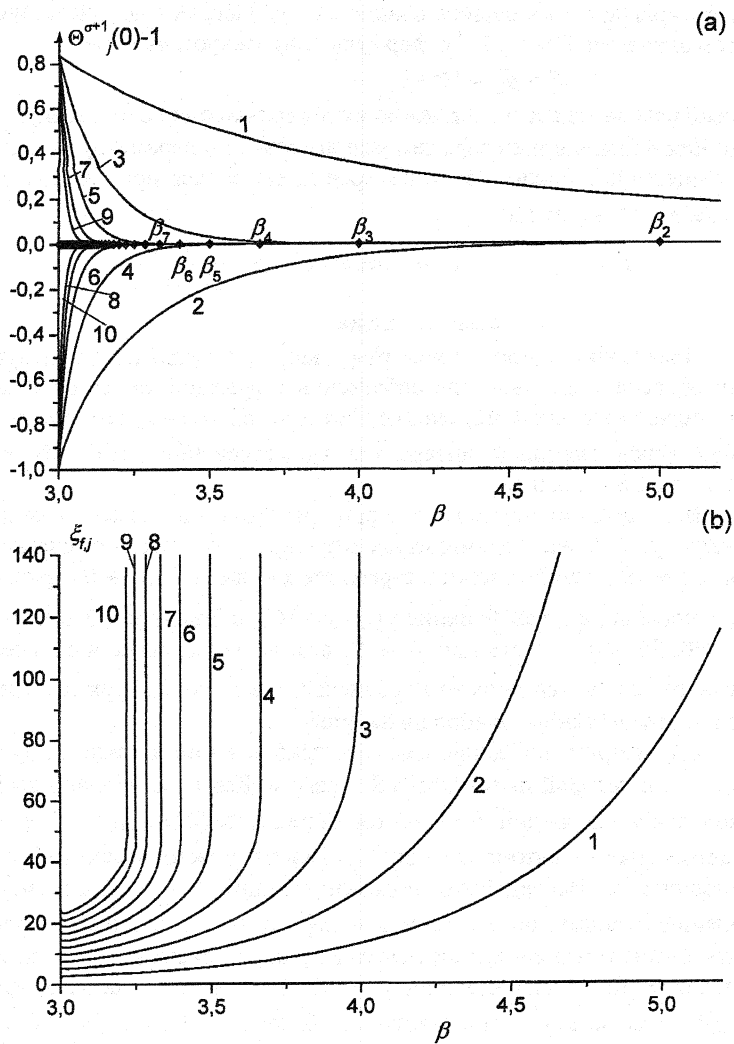


Рис. 4 Бифуркационный анализ первых десяти с.ф. в LS-режиме по параметру  $\beta$  при  $\sigma = 2, \nu = 0, k = 0$ .

Значения  $\beta = \sigma + 1$  и  $\beta = \beta_j$  являются точками бифуркации, в которых прекращает свое существование с.ф.  $y_j$ . Первая с.ф. существует при любом значении  $\beta > \sigma + 1$ . Из формулы (38) следует, что при

$$\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1 \quad (39)$$

автомодельная задача в LS режиме имеет только одну собственную функцию. Чем больше номер с.ф., тем уже интервал по параметру  $\beta$ , в котором она существует. Число с.ф.  $N$ , которое имеет задача при данных  $\beta$  и  $\sigma$  определяется формулой:

$$N = [a], \quad \text{если } a \text{ — нецелое, } a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}. \quad (40)$$

$$N = a - 1, \quad \text{если } a \text{ — целое}$$

Последовательность точек бифуркации, определяющих левую границу области существования собственных функций, является бесконечной последовательностью, сходящейся к т.  $\beta_\infty = \sigma + 1$ , которая является общей левой границей интервалов существования всех собственных функций в LS – режиме.

Исследования показали, что при приближении к правой границе интервала существования, амплитуда отклонения от гомотермического решения с.ф.  $\Theta_j$  уменьшается и стремится к нулю при  $\beta \rightarrow \beta_j$  (рис. 4а, 5а, 6а), а значение  $\xi_{jj}$ , где функция  $y_j(\xi_{jj}) = 10^{-5}$ , стремится к бесконечности (рис. 4б, 5б, 6б). То есть при  $\beta \rightarrow \beta_j$  с.ф.  $\Theta_j$  все сильнее и сильнее приближается к гомотермическому решению, и в точке бифуркации сливается с пространственно-однородным решением.

Рассмотрим поведение с.ф. при приближении к точке бифуркации  $\beta = \sigma + 1$ , в которой имеет место S – режим. Как было сказано выше, автоматодельная задача при  $\beta = \sigma + 1$  имеет решение (27)  $\Theta_S(\xi)$ , которое в силу автономности автоматодельного уравнения можно рассматривать, как периодическое. Исследования показали, что при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  амплитуда отклонений максимумов и минимумов с.ф. от гомотермического решения увеличивается: минимумы стремятся к нулю, а максимумы – к амплитуде решения  $\Theta_S(\xi)$ ; с.ф. с номером  $j$  приближается к решению в S – режиме  $\Theta_{S_j}(\xi)$ , имеющему  $j$  полупериодов на отрезке  $0 \leq \xi \leq j \times 0.5L_T$ , а вне этого отрезка приближается к нулю. Причем четные собственные функции  $\Theta_{2j}(\xi)$  в точке бифуркации  $\beta = \sigma + 1$  сливаются с автоматодельным решением в S – режиме, сдвинутому на полпериода для нечетных, и равным нулю в начале координат (см. рис. 5 и рис. 6).

На рис. 5а показана зависимость от параметра  $\beta$  отклонений минимума, максимума и значения в нуле третьей с.ф., на рис. 5б представлена

зависимость от  $\beta$  значения  $\xi_{f,3}$ , а на рис. 5с показан вид третьей с.ф. при нескольких значениях  $\beta$ . Рис. 6 демонстрирует аналогичные графики для четной шестой с.ф.

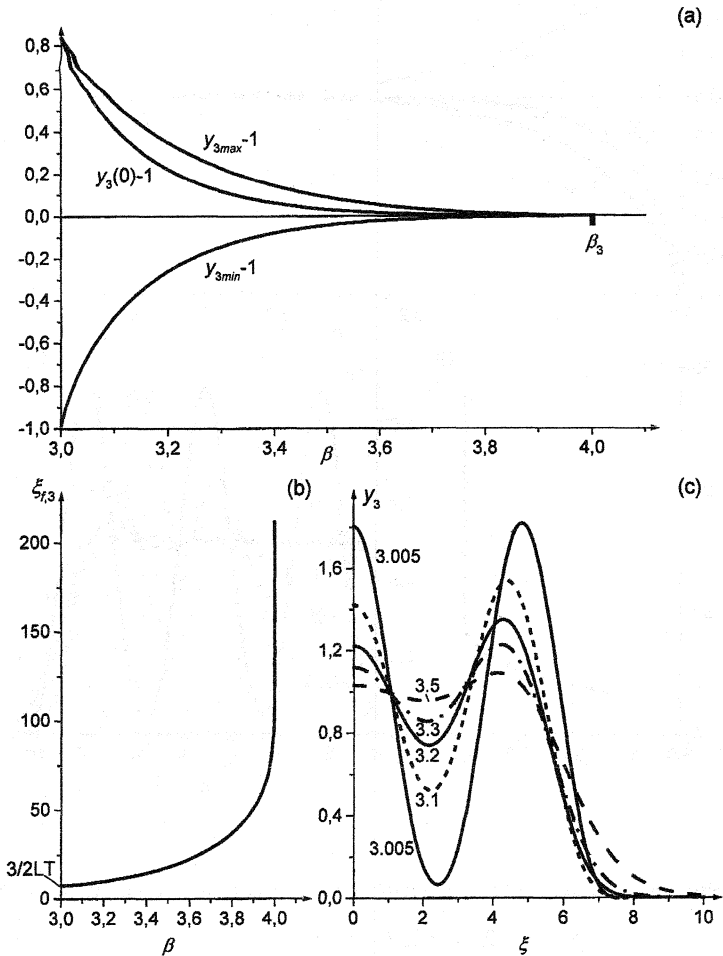


Рис. 5 Зависимость третьей с.ф. в LS-режиме от параметра  $\beta$  при  $\sigma = 2, \nu = 0, k = 0$ .

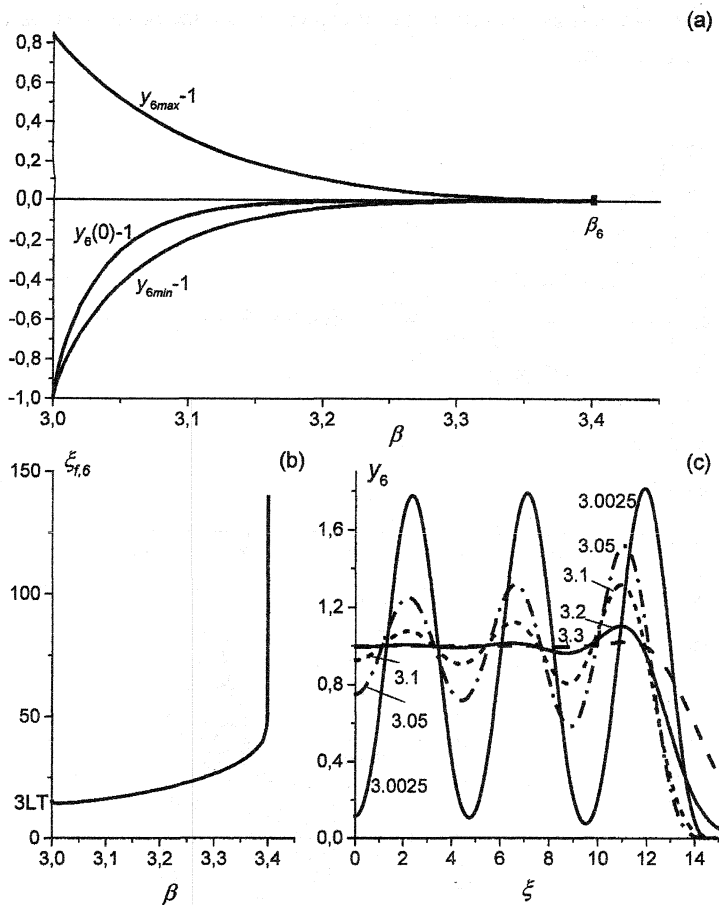


Рис. 6 Зависимость шестой с.ф. в LS-режиме от параметра  $\beta$  при  $\sigma = 2, \nu = 0, k = 0$ .

### 2.3. Бифуркационный анализ автомодельных решений в случае цилиндрической и сферической геометрии

Автомодельная задача при  $\beta > \sigma + 1$  в сферической и цилиндрической геометрии и распределенной плотности имеет спектр решений, чис-

ло которых зависит от параметров  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  и  $k$ . Старшие собственные функции, имеющие несколько экстремумов, в области своей немонотонности также как в плоском случае совершают колебания около гомотермического решения. Кроме собственных функций существующих на полубесконечной прямой и удовлетворяющих условиям (25), (26) в центре симметрии (назовем их обычными), автомодельная задача при  $\nu=1$  и  $\nu=2$  имеет решения, определенные на интервале  $[\xi_f, \infty)$ , то есть имеющие фронт слева (9) (см. фиг. 7 для  $\sigma=2$ ,  $\nu=1$ ,  $k=0$ ). Существование с.ф. с нулевыми участками в центре при  $\xi \in [0, \xi_f]$  было впервые установлено в [20]. Там же было проведено исследование таких решений и выдвинуты некоторые гипотезы об эволюции автомодельных решений при  $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ .

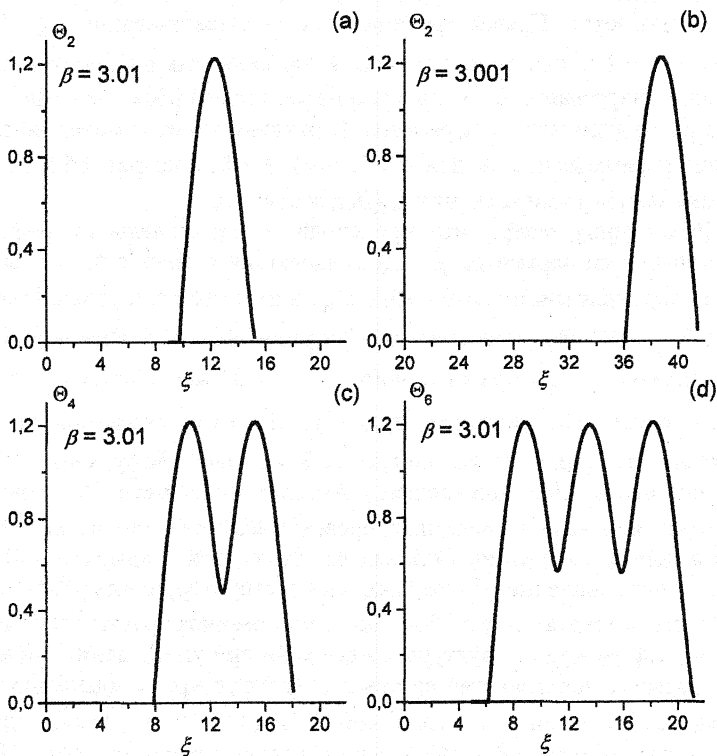


Рис. 7 LS-режим. Структуры с нулевой областью в центре симметрии при  $\sigma=2$ ,  $\nu=1$ ,  $k=0$ .

Продолжим автомодельные решения в сферической и цилиндрической геометрии по параметру  $\beta$ , и проведем их бифуркационный анализ, как это было сделано для  $\nu = 0$ ,  $\kappa = 0$ .

Расчеты показали, что все обычные собственные функции  $\Theta_j(\xi)$  кроме первой, определенные на полубесконечной прямой  $\xi \in [0, \infty)$  существуют в интервале:

$$\sigma + 1 < \beta_j^*(\nu, \kappa) < \beta < \beta_j, \quad j = 2, 3, \dots \quad (41)$$

Первая с.ф. так же как в плоском случае существует при всех  $\beta > \sigma + 1$ , вырождаясь при  $\beta = \sigma + 1$  в единственную с.ф. S – режима при данных  $\nu$  и  $\kappa$ .

При приближении к правой границе области своего существования старшие с.ф. совершают колебания со все меньшей и меньшей амплитудой около гомотермического решения, а значения точки  $\xi_{j,j}$  при этом резко увеличиваются. Правая граница области существования с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  при  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$  и любом допустимом  $\kappa$  такая же, как и в плоском случае и отвечает бифуркации слияния с гомотермическим решением. На рис. 8а показаны зависимости от параметра  $\beta$  отклонений от гомотермического решения первых пяти с. ф. для  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $\kappa = 0$ , а на фиг. 8б и 8с представлены зависимости значений  $\xi_{j,j}(\beta)$  для этих с.ф.

Рассмотрим теперь, что происходит с автомодельным решением при уменьшении параметра  $\beta$ . Здесь эволюция четных с.ф., имеющих в начале координат минимум  $\Theta_{2j}(0) < \Theta_H$ , и нечетных с. ф., имеющих максимум  $\Theta_{2j-1}(0) > \Theta_H$ , различается. При уменьшении  $\beta$  абсолютный минимум четной с.ф., который находится в т.  $\xi = 0$  уменьшается и при некотором значении  $\beta_{2j}^*$  достигает нуля  $\Theta_{2j}(0) = 0$  (см. эволюцию второй и четвертой с.ф. на рис. 8). На диаграмме 8 эти точки бифуркации обозначены ромбиками. При дальнейшем уменьшении параметра  $\beta$  четная с.ф. отодвигается от начала координат, превращаясь в с.ф. с нулевой температурой в центре симметрии (назовем ее структурой с «дыркой») Первой (при большем значении  $\beta$ ) вырождается в структуру с «дыркой» вторая с.ф., затем четвертая и т.д. Фиг. 9а и 9с демонстрируют превращение обычных с.ф.  $u_2$  и  $u_4$  в структуры с «дыркой» при уменьшении параметра  $\beta$ . В фазовом пространстве системы (13) структуры с «дыркой» представляют собой петли сепаратрис особой точки (0,0); вторая с.ф. образует простую петлю, остальные с.ф. – многовитковые петли (см. рис. 10б, е). Чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$  тем больше собственных функций с «дыркой» уже образовалось и тем дальше младшие с. ф. отодвинулись от центра (см.

фиг. 7). При  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  минимумы с.ф. с «дыркой» стремятся к нулю, и с.ф.  $\Theta_{2j}^\nu(\xi)$  при  $\nu=1, \nu=2$  и  $k=0$  приближается на бесконечности к с.ф. S-режима в плоской геометрии и с постоянной плотностью, имеющей  $j$  периодов.

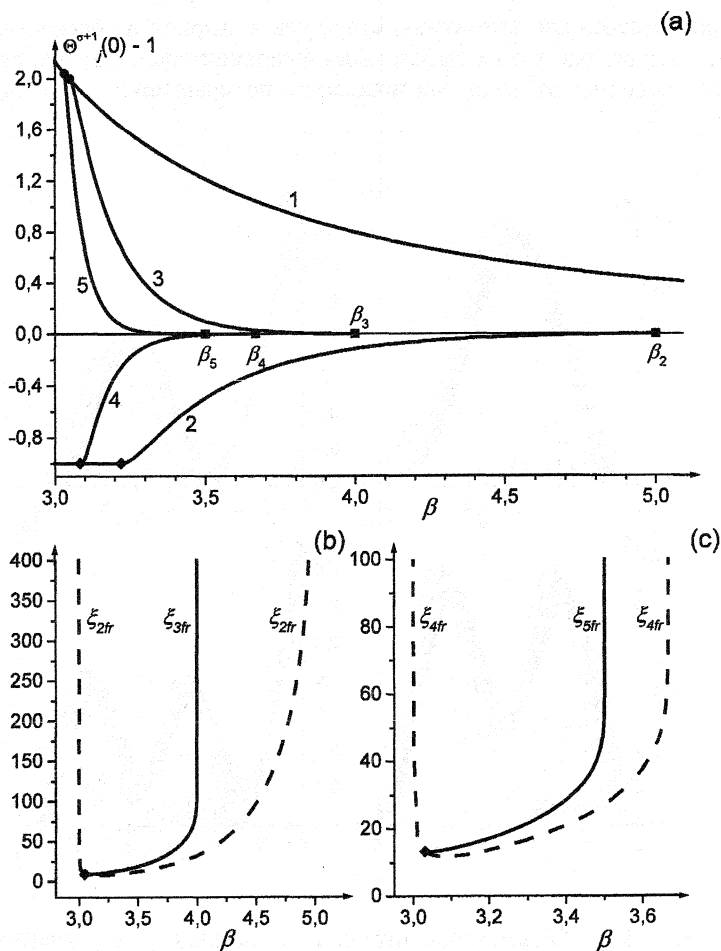


Рис. 8 Бифуркационный анализ по параметру  $\beta$  первых пяти с.ф. в LS-режиме при  $\sigma=2, \nu=1, k=0$ .

В случае распределенной плотности эволюция четной с.ф. происходит аналогичным образом; сначала она превращается в структуру с «дыркой», затем отодвигается от центра, и в преобразованном уравнении (31) с постоянной плотностью с.ф.  $\Theta_{2j}^{\nu}(z)$  при  $\beta \rightarrow \sigma+1+0$  стремится к с.ф. S-режима при  $\nu=0$ ,  $\kappa=0$ . Из анализа преобразования (32), который возвращает к исходной переменной  $\xi$  следует, что при  $\beta \rightarrow \sigma+1+0$  в среде с распределенной плотностью структуры с дыркой на бесконечности растягиваются, так что их эффективная фундаментальная длина, где они заметно отличны от нуля, увеличивается по сравнению с со случаем  $\nu=0$ ,  $\kappa=0$ .

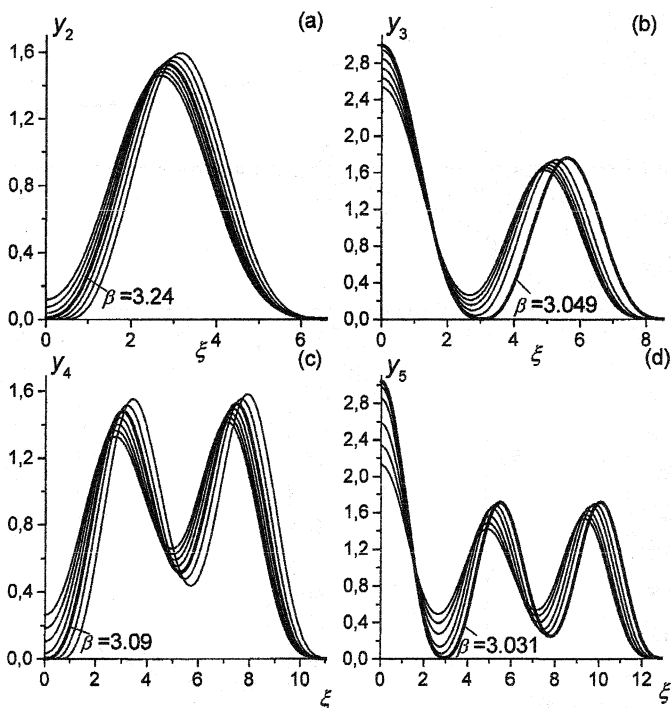


Рис. 9 Образование структур с «дыркой» при уменьшении параметра  $\beta$  ( $\sigma=2$ ,  $\nu=1$ ,  $k=0$ ).

Теперь рассмотрим эволюцию старших нечетных с.ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  с изменением параметра  $\beta$ . При уменьшении  $\beta$  амплитуда колебаний око-



ло гомотермического решения увеличивается и абсолютный минимум с.ф., который находится в т.  $\tilde{\xi}_{2j+1}$ , ближе всех других минимумов к началу координат, стремится к нулю. При этом одна часть с.ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$ , расположенная на отрезке  $[0, \tilde{\xi}_{2j+1}]$  приближается к первой с.ф.  $\Theta_1(\xi)$ , а другая часть, расположенная на отрезке  $[\tilde{\xi}_{2j+1}, \infty)$  стремится слиться со структурой с «дыркой»  $\Theta_{2j}(\xi)$ , которая образовалась раньше и к этому значению параметра отодвинулась от центра на расстояние  $\xi_{2j} \cong \tilde{\xi}_{2j+1}$ . В точке бифуркации  $\beta_{2j+1}^*$  (на диаграмме 8а они отмечены кружками) нечетная с.ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  прекращает свое существование, распадаясь на первую с.ф.  $\Theta_1(\xi)$  и четную  $\Theta_{2j}(\xi)$  структуру с «дыркой». (см. рис. 10 а, б, с и д, демонстрирующий эволюцию третьей с.ф. на фазовой плоскости при  $\sigma = 2, \nu = 1, k = 0$ ). Сначала распадается третья с.ф., затем пятая (см. рис. 10 ф) и т.д., чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$ , тем больше распавшихся нечетных с.ф.. Чтобы определить число с.ф. при данных  $\beta, \sigma, \nu$  и  $k$ , надо из числа с.ф. для плоского случая (40) вычесть число распавшихся нечетных с.ф. Это число в свою очередь зависит от геометрии области и от плотности при  $\nu = 2$  (при  $\nu = 1$  от плотности не зависит). Например, для  $\sigma = 2, \nu = 1, k = 0$  при  $3.049 < \beta$  число с.ф. определяется формулой (40); при  $3.031 < \beta < 3.049$  их на единицу меньше, чем дает формула. Таким образом, спектр с.ф. в сферической, цилиндрической геометрии и распределенной плотности может существенно отличаться от спектра с.ф. при  $\nu = 0, k = 0$ : 1) наличием четных с.ф. с нулевой областью в центре, 2) отсутствием в спектре некоторых нечетных с.ф., начиная с третьей.

В цилиндрической геометрии в случае распределенной плотности области существования всех с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  такие же как при  $k = 0$ , а сами с.ф. получаются из с.ф. при  $k = 0$  преобразованием растяжения (32).

В сферической геометрии структуры с дыркой образуются при большем значении  $\beta$  и нечетные с.ф. распадаются раньше по сравнению с  $\nu = 1$ . С увеличением плотности области существования обычных с.ф. сильно сужаются

$$\beta_j^*(k_2) > \beta_j^*(k_1), \text{ если } k_2 > k_1, \nu = 2$$

и в спектре все большую долю занимают структуры с «дыркой». Если при  $\nu = 1$  структуры с «дыркой» появляются при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  (так при  $\sigma = 2, \Theta_2$  превращается в структуру с «дыркой» при  $\beta^* \approx 3.22$ ), то при  $\nu = 2, k = 0$   $\beta^* \approx 3.38$ , а при  $\nu = 2, k = 1$  структуры с «дыркой» существуют уже при  $\beta^* \approx 3.45$ .

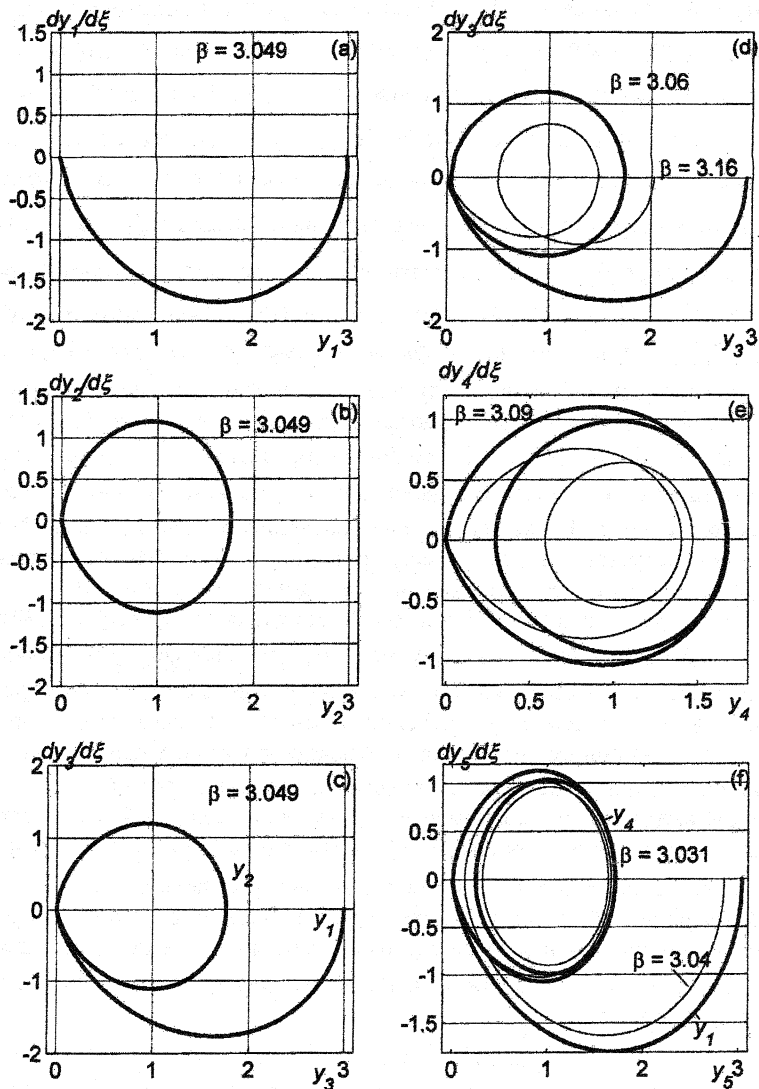


Рис. 10 Формирование на фазовой плоскости системы (13) петель сепаратрис особой точки  $(0,0)$ , соответствующих с.ф. с «дыркой».

На рис. 11 представлены первые 12 с.ф. при  $\beta = 65$ ,  $\sigma = 63$ ,  $\nu = 2$ ,  $\kappa = 1$ . Четыре нечетные с. ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$ ,  $j=1, \dots, 4$  выпали из спектра. Среди имеющихся 59 с.ф. – семь структур «с дыркой»  $\Theta_{2j}(\xi)$ ,  $j=1, \dots, 7$  и 52 обычные.

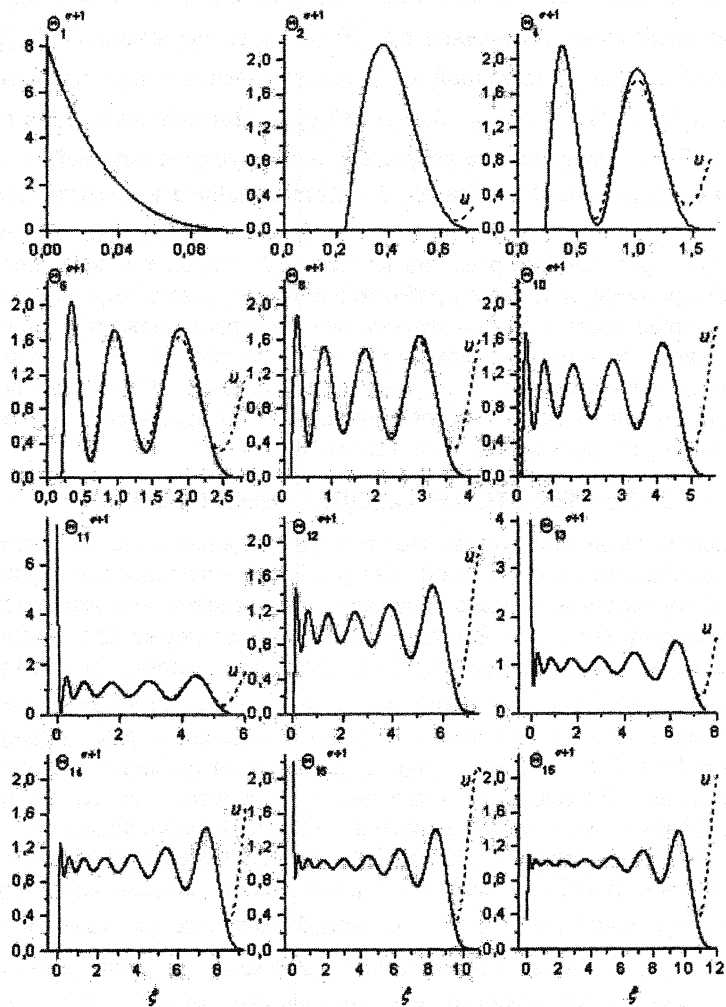


Рис. 11 Спектр с.ф. в LS-режиме при  $\sigma = 63$ ,  $\beta = 65$ ,  $\kappa = 1$ .

## 2.4. Линейное приближение

Исследования показали, что в сферической и цилиндрической геометрии и распределенной плотности, также как и в случае  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ , в области немонотонности с.ф. колеблются около гомотермического решения  $\Theta_H$  и описываются частью решения  $u_j(\xi)$  линеаризованного уравнения (36) со своей амплитудой. Амплитуду решения  $u_j(\xi)$  можно определить из требования совпадения с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  и ее производной  $\dot{\Theta}_j(\xi)$  с функцией  $u_j(\xi)$  и производной  $\dot{u}_j(\xi)$  соответственно в некоторой точке  $\xi = \xi_0$ :  $u_j(\xi_0) = \Theta_j(\xi_0) - \Theta_H$ ,  $\dot{u}_j(\xi_0) = \dot{\Theta}_j(\xi_0)$ . Для обычных с.ф. в качестве  $\xi_0$  обычно берут начало координат, для структур с «дыркой» – одну из точек экстремума функции  $\Theta_j(\xi)$ . Хотя линейное уравнение (36) не может предсказать наличие структур с «дыркой» и отсутствие некоторых нечетных с.ф. в спектре решений нелинейной задачи, тем не менее как показали расчеты, линейное приближение может давать хорошее совпадение и с обычными с.ф. и со структурами с «дыркой» даже при больших отклонениях от гомотермического решения (см. рис. 11, на котором линейное приближение обозначено пунктирной линией). Чем больше номер с.ф., тем меньше амплитуда колебаний около гомотермического решения, тем лучше «работает» линейное приближение.

## 3. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для исследования устойчивости автомодельных решений численно решалась задача Коши для уравнения (1). В качестве начального распределения температуры бралась либо сама с.ф. – резонансное возбуждение, либо «возмущенная» с.ф. В центре симметрии поддерживалось условие Неймана, а на конце отрезка при  $\xi = \xi_f$  ставилось условие третьего рода – соотношение между температурой и потоком тепла, которое следует из асимптотического разложения (23). Задача решалась с использованием пакета МАТЛАВ 6.5 методом прямых, при котором уравнение с частными производными (1) сводилось к системе ОДУ большого порядка и затем интегрировалось методами для жестких систем. Использовались адаптивные сетки, содержащие от 300 до 2000 точек по пространственной переменной; система ОДУ решалась методами разного порядка аппроксимации (по времени) (от 1 до 5) и разной точности (от  $\text{eps} = 10^{-3}$  до  $\text{eps} = 10^{-10}$ ). Изменение точности интегрирования и числа точек пространственной сетки почти не оказывало влияния на численное решение задачи, что дало основание сделать вывод о достоверности, полученных численно результатов.

Известно, что автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением неустойчивы по отношению к малым возмущениям. Малые изменения начального профиля приводят к малому изменению времени обострения  $t_f$ , что в свою очередь приводит к сколь угодно большому различию между решениями, начиная с некоторого момента времени близкого к  $t_f$ . Однако, эти решения могут обладать структурной устойчивостью, в смысле выхода на автомодельный режим [15], [17].

Для проверки следования решений задачи Коши автомодельному закону (6), (7) будем следить за ростом температуры  $T(r^*, t)$  в отдельных точках  $r^*(t)$ . Если решение развивается по автомодельному закону, то зависимость роста  $\log T(r^*, t)$  от  $\log r^*(t)$  со временем, взятая в какой либо точке  $r^*$ , описывается линейной функцией, тангенс угла наклона  $\alpha$  которой равен:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{-k+2}{\beta-\sigma-1}. \quad (42)$$

В численном счете удобно следить за смещением и ростом выделенных точек, например, максимумов, минимумов или полуширины с.ф. Если в логарифмической шкале эти зависимости ложатся на параллельные прямые, значит, по крайней мере, выделенные точки с.ф. следуют автомодельному закону.

Для исследования структурной устойчивости будем проводить так называемую автомодельную обработку [1]. В настоящей работе использовалась следующая процедура. В каждый момент времени температура  $T(r, t)$  в каждой точке отрезка  $r(t)$  делилась на максимум распределения температуры  $T_{\max}$ , а значение  $r(t)$  — на координату максимума  $r_{\max}(t)$ . (Если максимум находился в начале координат, то значение  $r(t)$  делилось на координату полуширины  $r_{1/2}(t)$  или любую другую выделенную точку.) Если автомодельное решение обладает структурной устойчивостью, то полученный таким образом нормированный профиль решения не изменяется со временем. Более того, если в начальный момент времени взять произвольный профиль, то в случае структурной устойчивости автомодельного режима будет наблюдаться сходимость нормированных решений к автомодельному профилю.

Проведенные исследования показали, что в любой геометрии и любом распределении плотности первая с.ф., имеющая один максимум в центре симметрии является структурно устойчивым автомодельным решением. Однако в сферической и цилиндрической геометрии в отличие от

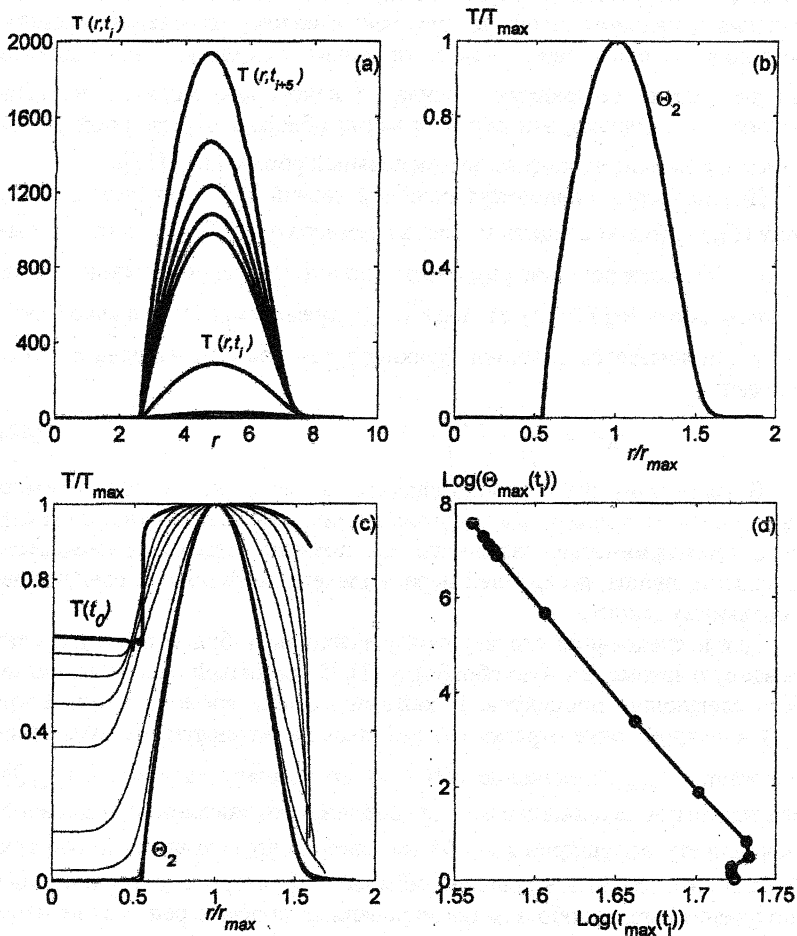


Рис. 12 Эволюция нерезонансного начального возмущения. Выход на автомодельное решение, описываемое с. ф. с «дыркой»  $\Theta_2$ .

случая  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ , область ее притяжения ограничена некоторым радиусом  $R_C$ . Другим структурно устойчивым решением найденным впервые в работе является вторая собственная функция с нулевой областью в центре симметрии – структура «с дыркой»  $\Theta_2$ . Структура с «дыркой»  $\Theta_2$  описывает растущую в режиме с обострением и медленнодвигающуюся (по сравнению со скоростью роста температуры) к центру симметрии тепловую волну в виде сферического или цилиндрического слоя. Исследования показали, что структура «с дыркой»  $\Theta_2$  обладает довольно широкой областью притяжения. На рис. 12 а показана эволюция начального распределения температуры, достаточно далекого от профиля с.ф.  $\Theta_2$  (даже отличного от нуля в центре) при  $\beta = 3.05$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $k = 0$ . Рис. 12 с демонстрирует сходимости нормированных решений задачи Коши к с.ф.  $\Theta_2$  (рис. 12 б), а рис. 12 д. показывает движение максимума распределения температуры в соответствии с автомодельным законом, начиная с некоторого момента времени.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет либо одно структурно устойчивое автомодельное решение, первую с.ф., либо два структурно устойчивых решения – первую и вторую с.ф., если при данном наборе параметров вторая с.ф. равна нулю в центре симметрии. Подробное исследование эволюции нерезонансных возмущений выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что при  $t \rightarrow t_f$  в расчетах всегда наблюдался выход на автомодельный режим, или на первую с.ф. для данных значений параметров, или на вторую структуру с «дыркой», если она существовала, или на первую с.ф. для тех же значений  $\beta$  и  $\sigma$  но для плоской геометрии и постоянной плотности. Последний случай имеет место, когда начальное возмущение в виде сферического или цилиндрического слоя поставлено достаточно далеко от центра или от второй с.ф. с «дыркой». Тогда интенсивное горение в  $LS$ -режиме происходит во все более и более сокращающейся области, в которой эффекты, связанные с геометрией и неоднородностью среды, становятся несущественными, а медленное смещение к центру области горения по сравнению со скоростью роста температуры не позволяет приблизиться к области притяжения первой или второй с.ф. [см. также 18].

Исследования, проведенные в настоящей работе и ранее показали, что старшие немонотонные с.ф. не являются структурно устойчивыми автомодельными решениями. Горение среды, вызванное заданием начального профиля в соответствии со старшей с.ф., только некоторое время следует автомодельному закону, затем один из максимумов начинает расти быстрее остальных, и процесс горения вырождается в горение одной структуры с одним максимумом. Однако, время следования автомодельному закону может быть в некоторых случаях очень велико, (будем его

оценивать по росту температуры), что позволяет говорить о **метастабильной устойчивости**. Проведенные расчеты выявили, что устойчивость собственной функции зависит от параметров, от ее номера и от четности номера. Нечетные с.ф. могут сохранять свою структуру при росте температуры в 10-20 раз, в то время как четные следуют автомодельному закону при росте температуры от нескольких раз до нескольких сотен раз. На фиг. 13а,б,с представлена эволюция нормированных профилей второй с.ф. в случае плоской геометрии ( $k=0$ ,  $\sigma=2$ ) при разных значениях  $\beta$ . Мы видим, что при больших значениях  $\beta$  нормированный профиль с.ф.  $\Theta_2$  не сохраняется за счет того, что рост температуры в центре сильно отстает от роста температуры в максимуме (рис. 13а); с. ф.  $\Theta_2$  в этом случае следует автомодельному закону при росте температуры в 3 – 5 раз. При уменьшении значения  $\beta$  устойчивость с.ф. увеличивается (фиг. 13 б, с). При  $\beta \rightarrow \sigma+1$  вторая с.ф. может обладать огромной метастабильной устойчивостью; на фиг. 13 с, показано, что при росте температуры в 3800 раз отклонение от автомодельного профиля составляет примерно 10%. В сферической и цилиндрической геометрии метастабильная устойчивость второй с.ф. при уменьшении значения  $\beta$  также повышается, и при бифуркационном значении параметра она превращается в структурно устойчивое автомодельное решение – структуру с «дыркой»  $\Theta_2$ . Старшие четные с.ф. (четвертая, шестая и т.д.) при уменьшении параметра  $\beta$  также становятся более устойчивыми и могут сохранять свою структуру при росте температуры в десятки и сотни раз. На рис. 14 а и 14 б представлена эволюция четвертой с.ф. при  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.05$ ,  $\nu=1$ ,  $k=0$ , рассчитанной с разной точностью. Автомодельная обработка показывает, что с. ф.  $\Theta_4$  сохраняет свою структуру при росте температуры примерно в 180 раз (рис. 14 а, 14 д) и 380 раз (рис. 14 б, 14 с). Далее один из двух максимумов начинает расти быстрее и профиль температуры перестраивается. При  $t \rightarrow t_f$  наблюдается выход на автомодельный режим, описываемый структурно устойчивой с.ф.  $\Theta_2$  (см. рис. 14 с и 14 д). На рис. 15 а,б представлена эволюция шестой с.ф. для двух наборов параметров. С.ф.  $\Theta_6$ , как видно из рисунков, сохраняет свою структуру достаточно долго, при росте температуры примерно в 100 раз. Обратим внимание, что вырождение шестой с.ф. происходит поэтапно, сначала она становится близкой к  $\Theta_4$  (один максимум отстает от роста двух других), а затем выходит на автомодельный режим, описываемый с.ф.  $\Theta_2$ . Таким образом, хотя с.ф.  $\Theta_4$  не является структурно устойчивым решением, здесь она выступает как промежуточная асимптотика.



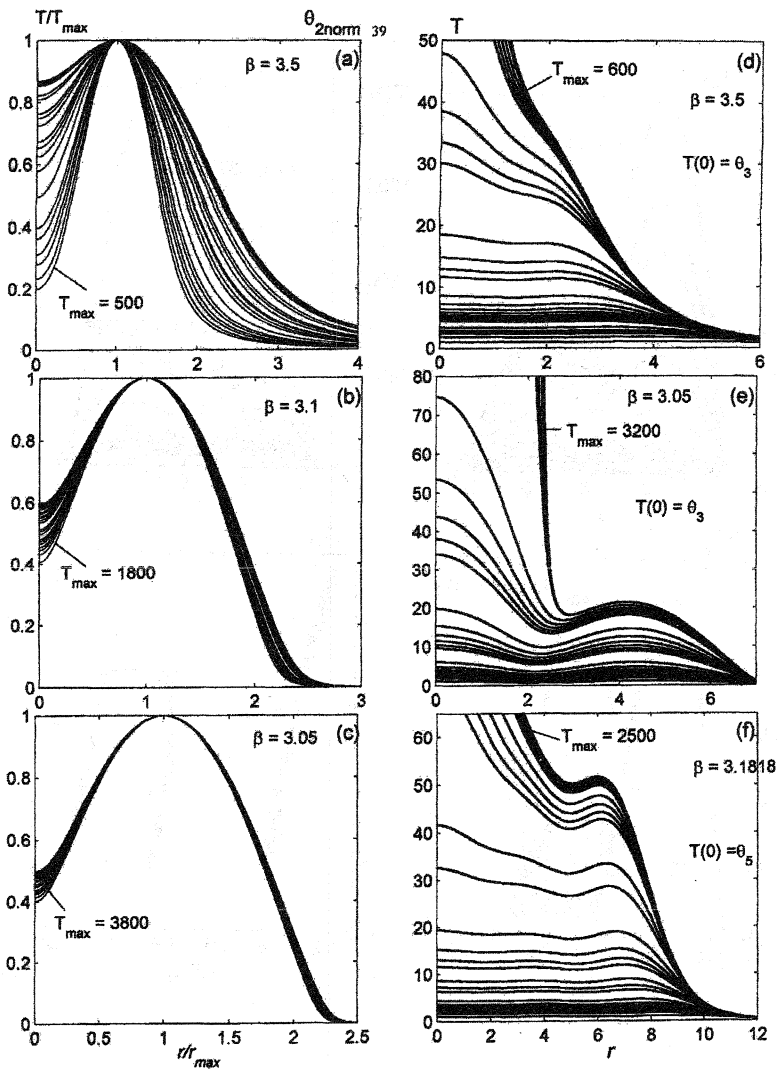


Рис. 13 Эволюция четной с.ф.  $\Theta_2$  и нечетных с.ф.  $\Theta_3$  и  $\Theta_5$  при разных значениях  $\beta$  в случае плоской геометрии и постоянной плотности.

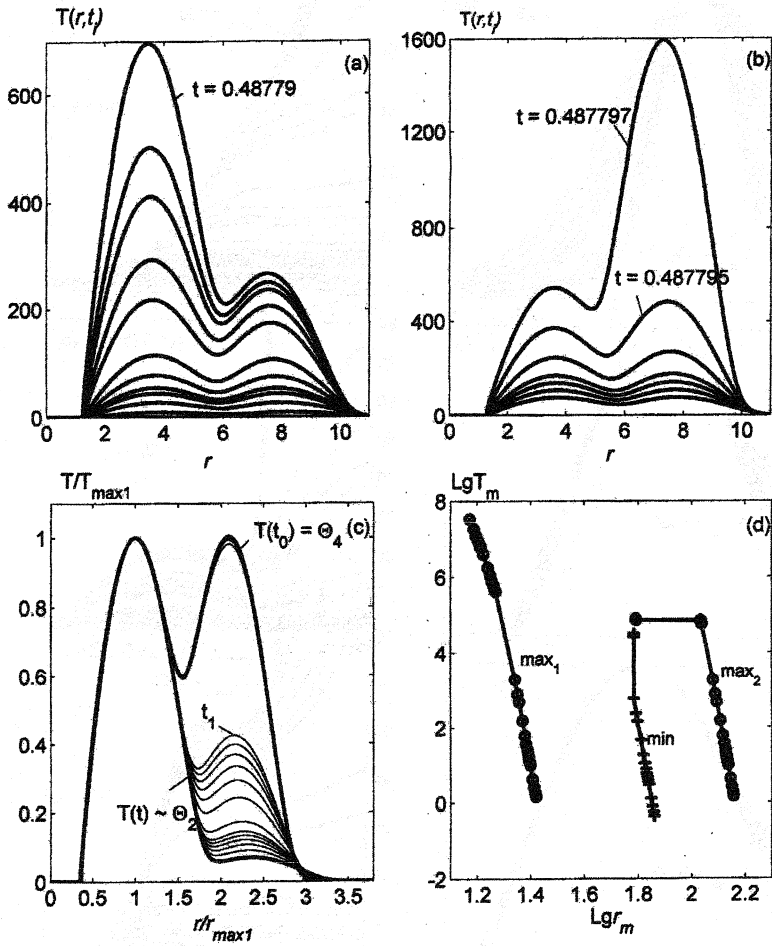


Рис. 14 Метастабильная устойчивость четвертой с.ф.  $\Theta_4$  с «дыркой». Выход на автомодельное решение, описываемое с.ф.  $\Theta_2$ .

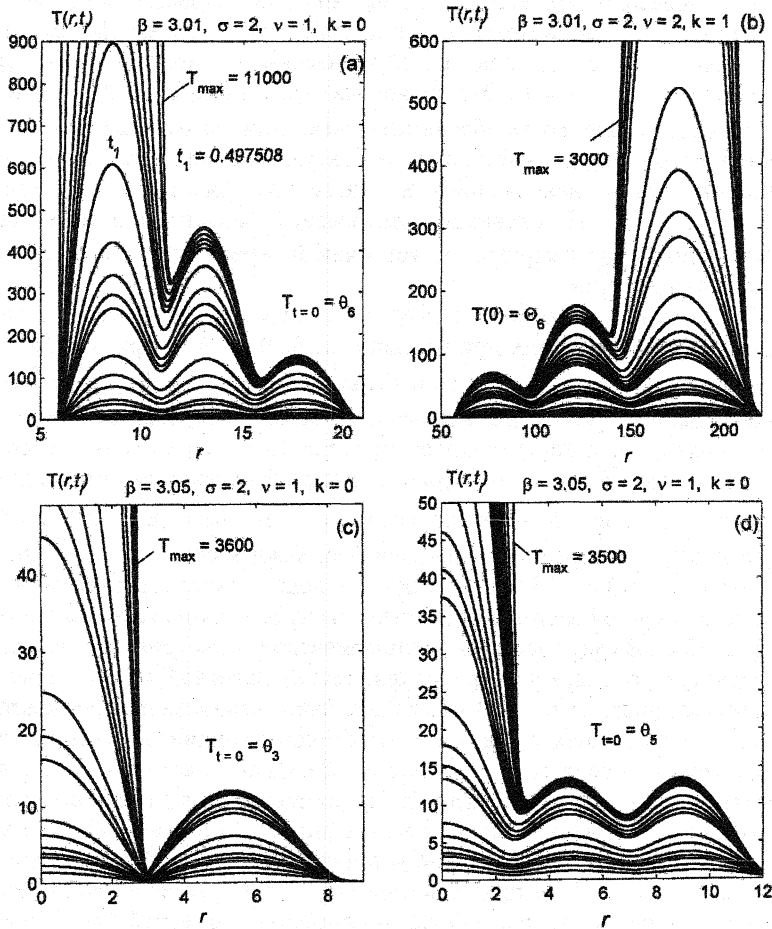


Рис. 15 Эволюция четных и нечетных с.ф. при значениях  $\beta$  близких к  $\sigma + 1$ .

Рассмотрим эволюцию старших нечетных с.ф.. Расчеты показали, что они не обладают высокой метастабильной устойчивостью и при всех значениях параметров вырождаются в центральную первую с.ф. (см. например рис. 15 с, д для цилиндрически-симметричного случая  $\beta = 3.05$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $k = 0$ ). Это происходит даже в плоском случае с постоянной плотностью, когда абсолютный максимум автомоделльного распределения температуры, отстоящий от центра, заметно превосходит локальный максимум, находящийся в центре (см. рис. 13 д, е, ф для  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ ). По-видимому центральный максимум в нечетной с.ф. близок по форме к структурно устойчивой первой с.ф., на которую и «сваливается» решение.

Проведенные в настоящей работе исследования обнаружили, что эволюция с.ф. в LS-режиме при больших значениях  $\beta$  и при близких к  $\sigma + 1$  качественно различается. При больших значениях  $\beta$  у нечетных с.ф. наблюдается преимущественный рост максимума, находящегося в центре симметрии, и «поглощения» им остальных максимумов, и затем выход на первую с.ф. при  $t \rightarrow t_f$  (рис. 13 д и ф). В плоской геометрии при небольших значениях  $\beta$  нечетная с.ф. распадается на первую с.ф. и оставшуюся часть, которые горят независимо, каждая со своим моментом обострения (рис. 13 е и 15 с, д). Первая с.ф. локализуется и растет на своей фундаментальной длине значительно быстрее «отколовшейся» части с.ф.. (фиг. 13 е). В сферической и цилиндрической геометрии, где существуют структуры с «дыркой», происходит распад нечетной с.ф. на первую и четную с.ф. (фиг. 11 с, д). В численном счете невозможно проследить эволюцию «отколовшейся» четной собственной функции, которая имеет больший момент обострения, чем первая с.ф.. Однако, естественно предположить, что она будет развиваться как соответствующая четная функция при данных значений параметров. На фиг. 15 с показано, как третья с.ф. расщепляется на две структурно устойчивые с.ф. – первую и вторую с «дыркой», а на фиг. 15 д представлены результаты расчетов пятой с.ф., которая расщепляется на первую с.ф. и близкую к четвертой с.ф.. Теоретически, разные собственные функции для одного и того же набора параметров должны иметь один момент обострения. Тем не менее, в численном счете никогда не наблюдался теоретический момент обострения; у нечетных с.ф. он был несколько меньше расчетного, а у четных собственных функций – несколько больше; это справедливо и для структурно устойчивых решений  $\Theta_1$  и  $\Theta_2$ .

По-видимому распад нечетных с.ф. при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  объясняется следующими обстоятельствами: 1) наличием глубокого минимума между центральным и вторым максимумом (почти до нуля) у с. ф., 2) близостью центральной части старшей с.ф. к первой, 3) явлением локализации и «об-

резанием» бесконечного «хвоста» с.ф. [21].

Метастабильная устойчивость старших с.ф. особенно ярко проявляется по отношению к эволюции нерезонансных возмущений. В работе с.ф. подвергались деформации и ставились в качестве начальных данных. Расчеты показали, что при нерезонансных начальных данных перестройка профиля температуры начинается сразу, и процесс горения первоначально имевший несколько максимумов вырождается в горение в виде простой структуры с одним максимумом, соответствующей структурно устойчивому автомодельному решению.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемые собственные функции автомодельной задачи представляют собой нестационарные диссипативные структуры. Спектр автомодельных решений определяет весь конечный набор структур в нелинейной среде, способных развиваться согласованно с одним моментом обострения длительное время. Сложную структуру можно рассматривать как объединение простых. В [22], [23] были впервые сформулированы принципы объединения простых структур в сложные и условия существования сложной организации в нелинейной среде. Проблемы сосуществования структур, находящихся на разных этапах развития и согласование темпов роста является актуальнейшей задачей нашего времени [8]. Найденные в работе области высокой метастабильности старших с.ф., при которых они сохраняют свою структуру при росте в сотни раз, позволяют говорить о **коэволюции** простых структур, объединенных в сложную, и открывает новые возможности приложений исследуемого уравнения нелинейной теплопроводности.

Автор выражает благодарность С. П. Курдюмову за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Barenblatt G. I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics.*// Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge university press, 1996, pp.386
2. Режимы с обострением. Эволюция идеи. –М.: Наука.1998. – 255с.
3. *Galaktionov V. A., Vazquez J. L.* The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. //J. Discrete and continuous dynamical systems, 2002, V. 8, № 2, pp. 399-433.
4. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.

5. *Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заключенский Л. А. и др.* Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики // Док. АН СССР, 1967, Т.173, №4, 808-811.
7. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А.Б.* Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука. 1996. С. 95-164.
8. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики //СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
9. *Лобанов А.И., Старожилова Т.К.* Нестационарные структуры в модели свертывания крови – //В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002 г., с. 346-367.
10. *Кириченко Н.А.* Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии //В книге Режимы с обострением. Эволюция идеи. –М.: Наука.1998. с. 217-230.
11. *Белавин В.А., Курдюмов С.П.* Режимы с обострением в демографической системе: Сценарий усиления нелинейности //Жур. Вычислит. Матем. и Матем. Физ., 2000, Т.40, №2, С.238-251.
12. *Капица С.П.* Феноменологическая теория роста населения Земли // Успехи физ. наук, 1996, Т.166, №1, с.63-80.
13. *С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
14. *Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Док. АН СССР, 1976, Т.227, №2.
15. *Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур // Док. АН СССР, 1977, Т.237, №6.
16. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко и др.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // Док. АН СССР, 1980, Т.251, №4.
17. *Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А.А.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Жур. вычислит. Матем. и матем. Физ. 1983, т. 23, № 2, с. 380-390.
18. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г.* Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами // Препринт ИП-Матем. АН СССР. М., 1979, № 16.

19. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // Док. АН СССР, 1980, Т.251, №3.
20. Димова С. Н., Касичев М. С., Курдюмов С.П. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // Жур. вычислит. матем. и матем. физ. 1989, т. 29, № 11, с. 1683-1704.
21. Галактионов В. А. Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения  $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^b$  // Дифференц. ур-ния, 1985, т. 21, № 1, с. 15-23.
22. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Препринт ИПМатем. АН СССР, М., 1979, № 29.; // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М. Наука 1982, 217-243.
23. Kurdumov S. P. Evolution and self-organization laws in complex systems // Int. J. Modern Phys. C1. 1990, 299-327.