Раздел II. Численные методы

Е.С. Куркина

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ СИСТЕМЫ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ АКТОРОВ*

Введение

В современном мире математическое моделирование становится неотъемлемой частью многих научных исследований. Математические модели позволяют глубже понять и объяснить наблюдаемые процессы и закономерности и во многих случаях сделать прогнозы. Математическое моделирование, являющееся с давних времен действенным инструментом изучения физических систем, сегодня интенсивно используется и в прикладных естественно-научных областях: химии, биологии, медицине и др., и даже вторгается в гуманитарные области, такие как социология и психология. В последнее время стали широко использоваться нелинейные динамические модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения. Методы нелинейной динамики и синергетики, опирающиеся на качественную теорию дифференциальных уравнений, заложенную А. Пуанкаре, позволяют проводить бифуркационный анализ уравнений, находить области существования колебаний, множественности и единственности стационарных решений и др., строить фазовые и параметрические портреты моделей.

Интерес представляют и сложные модели, дающие достаточно полное качественное и количественное описание существующих явлений, и относительно простые модели, позволяющие выявить и качественно описать механизм, наблюдаемого процесса. К последним относятся такие популярные системы, как модель «хищник-жертва», предложенная итальянским ученым Вольтерра еще в 1925 г., модель конкуренции двух видов и др. Эти модели, первоначально созданные для объяснения динамики популяций впоследствии получили широкое распространение и успешно использовались для моделирования различных социально-экономических систем.

В настоящей работе рассматривается достаточно общая качественная модель взаимодействий между двумя социальными субъектами: социальными или политическими группами, экономическими агентами, отдельными лицами, государствами, нациями

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект: 15-01-07944.

и т.п. В основе модели лежит система двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Модель такого типа была предложена известными учеными психологом Джоном Готтманом и математиком Джеймсом Мюрреем для исследования взаимоотношений между супругами [1], [2]. Первоначально модель была дискретной, и взаимодействия между супругами описывались кусочно-линейной функцией [2]. Результаты моделирования превзошли все ожидания. Долгосрочные статистические исследования, проведенные для 700 пар молодоженов, показали, что модель в 94% случаев дала правильный прогноз. Модель получила широкую известность и стала называться моделью Мюррея-Готтмана. В этой модели фазовыми переменными являются эмоциональные состояния мужа и жены. Эти состояния могут быть как нейтральными, так в большей или меньшей степени положительными или отрицательными. Модель учитывает влияние супругов друг на друга (положительное или отрицательное) и инертность собственных состояний. В дальнейшем модель Мюррея-Готмана была развита в работах других авторов и получила более широкую трактовку. В работе [3] в качестве фазовых переменных могут выступать не только состояния партнеров в браке, но и других взаимодействующих субъектов или акторов. По-прежнему состояния акторов качественно делятся на положительные, нейтральные и отрицательные.

В настоящей работе продолжено исследование разных типов взаимоотношений между партнерами на основе системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Фазовые переменные, описывающие состояния акторов, могут быть как положительными, так и отрицательными, в отличие от биологических моделей, в которых исследуются неотрицательные численности взаимодействующих популяций. С положительными состояниями (позитивными) связаны ощущения удовлетворенности, дружбы или сотрудничества, отрицательные состояния (негативные) означают неудовлетворенность, недружественные или враждебные отношения. Двигаясь по шкале состояний от отрицательных значений до некоторых положительных значений, получаем разные степени плохих или хороших отношений между партнерами. В этой модели все типы взаимодействий упрощенно характеризуются через положительные или отрицательные связи, описывающие сотрудничество, кооперацию или конкуренцию.

Рассмотрена динамика системы в случае *возбудимых, самодостаточных* и некоторых других акторов, которые в отсутствие партнера не стремятся к нейтральному состоянию, как в модели Мюррея-Готтмана. Исследованы новые функции, описывающие влияние партнеров друг на друга. В частности, учтено, что функции влияния зависят не только от состояний партнеров, но и от собственных состояний акторов. Найдены новые типы динамического поведения. В частности, модель в некоторых случаях демонстрирует колебательную динамику, которая в предыдущих моделях не имела места.

Рассмотренная модель имеет богатый набор фазовых портретов, описывающих динамику взаимодействий между двумя акторами, и может быть применена для моделирования различных социально-экономических взаимоотношений.

Модель двух взаимодействующих акторов

Вначале рассмотрим модель типа Мюррея-Готтмана. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ описывают состояния акторов в момент t. Изменение состояний задается следующими уравнениями [3]:

$$dx/dt = m_1 x + f_1(y), \tag{1.1}$$

$$dy/dt = m_2 y + f_2(x), \tag{1.2}$$

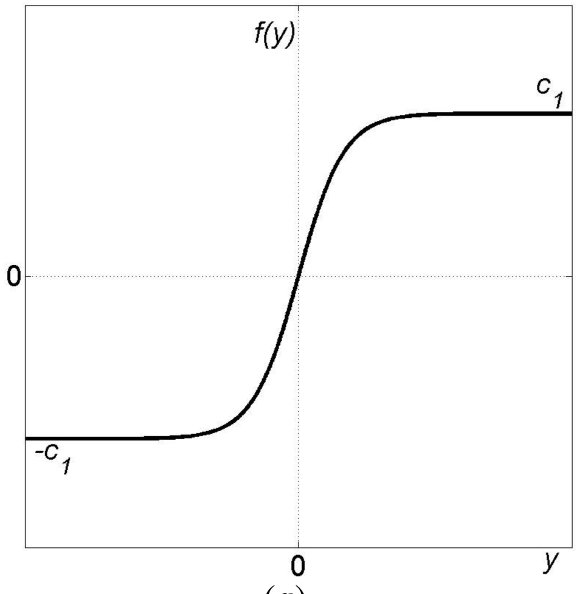
где $m_1 < 0$ и $m_2 < 0$ – параметры, описывающие инерцию собственного состояния актора (в отсутствии воздействий они определяют скорость экспоненциального стремления к нейтральному равновесию (0,0)), а функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ описывают влияние акторов друг на друга соответственно. Внешние влияния не учитывались.

В этой модели *сотрудничество представляется как положительная обратная связь* между акторами, то есть, позитивное состояние одного актора повышает положительное состояние другого актора, а негативное состояние одного актора усиливает негативное состояние другого актора. *Конкуренция моделируется как отрицательная обратная связь*, когда положительное состояние одного актора усиливает негативное состояние другого актора, а негативное состояние одного актора повышает позитивное состояние другого (другими словами, чем хуже одному, тем лучше другому).

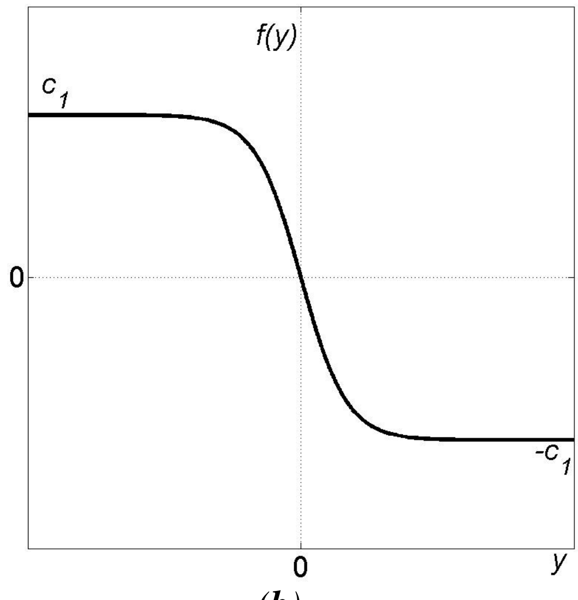
Для представления обратных связей между акторами в качестве функций f_1 и f_2 был выбран гиперболический тангенс (рис.1) [3], поскольку эта функция обладает следующими свойствами: 1) при малых уровнях сила воздействия пропорциональна уровню воздействия; 2) функция стремится к постоянному значению при высоком уровне влияния (есть насыщение); и 3) положительные или отрицательные обратные связи определяются только знаком c_1 или c_2 (рис.1), а их сила – модулем этих коэффициентов.

$$f_1(y) = c_1 th(y), \quad f_1 \xrightarrow[y\to\infty]{} c_1, \quad f_1{}'_y \xrightarrow[y\to\infty]{} 0; \tag{2.1}$$

$$f_2(x) = c_2 th(x). \quad f_2 \xrightarrow[x\to\infty]{} c_2, \quad f2_1{}'_x \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{2.2}$$



(*a*)



(*b*)

Рис. 1. Положительная (*a*) и отрицательная (*b*) функции обратной связи (2); влияние актора y на актор x. Влияние актора x на актор y будет аналогичным.

Таким образом, положительные коэффициенты c_1 и c_2 описывают положительную обратную связь или сотрудничество между двумя партнерами (рис. 1 *a*), а отрицательные коэффициенты c_1 и c_2 описывают отрицательную обратную связь или конкуренцию между двумя партнерами (рис. 1 *b*). Смешанный случай имеет место, когда первый актор реагирует на другого с положительной обратной связью, а другой на первого – с отрицательной обратной связью, или наоборот. Возможны три типа взаимоотношений:

$c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – двойная положительная обратная связь – сотрудничество;

$c_1 < 0$, $c_2 < 0$ – двойная отрицательная обратная связь – конкуренция;

$c_1 > 0$, $c_2 < 0$ или $c_1 < 0$, $c_2 > 0$ – смешанный случай.

Стационарные состояния

1. Фазовый портрет системы (1) определяется типом ее стационарных точек. Наличие устойчивых стационарных точек означает, что акторы находятся в устоявшихся стабильных отношениях. Если стационарная точка лежит в первом квадранте, где эмоциональные состояния обоих партнеров положительные, то такие взаимоотношения можно характеризовать, как положительные, партнерские или дружественные. Если стационарная точка лежит в третьем квадранте, то эмоциональные состояния акторов – отрицательные, и такие взаимоотношения можно отнести к недружественным или враждебным.

Если стационарная точка принадлежит второму или четвертому квадранту фазовой плоскости, то один актор имеет положительное состояние, а другой – отрицательное. Это можно трактовать, что один выиграл во взаимодействии, а другой проиграл.

В работе [3] проведен анализ устойчивости стационарных точек. В зависимости от значений параметров система (1) может иметь или одно состояние равновесия (нейтральное), или три состояния равновесия. При смешанных взаимодействиях существует только единственное нейтральное состояние равновесия при всех допустимых значениях параметров. Различают случаи сильной и слабой обратной связи.

Если $|c_j| > |m_j|$*, то связь сильная, если* $|c_j| < |m_j|$*, то связь слабая.*

Тип стационарной точки определяется следом и определителем матрицы Якоби A с элементами a_{ij} Для системы (1) они задаются формулами:

$$Sp_A = a_{11} + a_{22} = m_1 + m_2 < 0; \tag{3}$$

$$\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = m_1 m_2 - c_1 c_2 ch(x)^{-2} ch(y)^{-2}; \tag{4}$$

$$\Delta_A(x = 0, y = 0) = m_1 m_2 - c_1 c_2. \tag{5}$$

Собственные значения находятся по формуле:

$$\lambda_{1,2} = 0.5(Sp_A \pm \sqrt{Sp_A{}^2 - 4\Delta_A}. \tag{6}$$

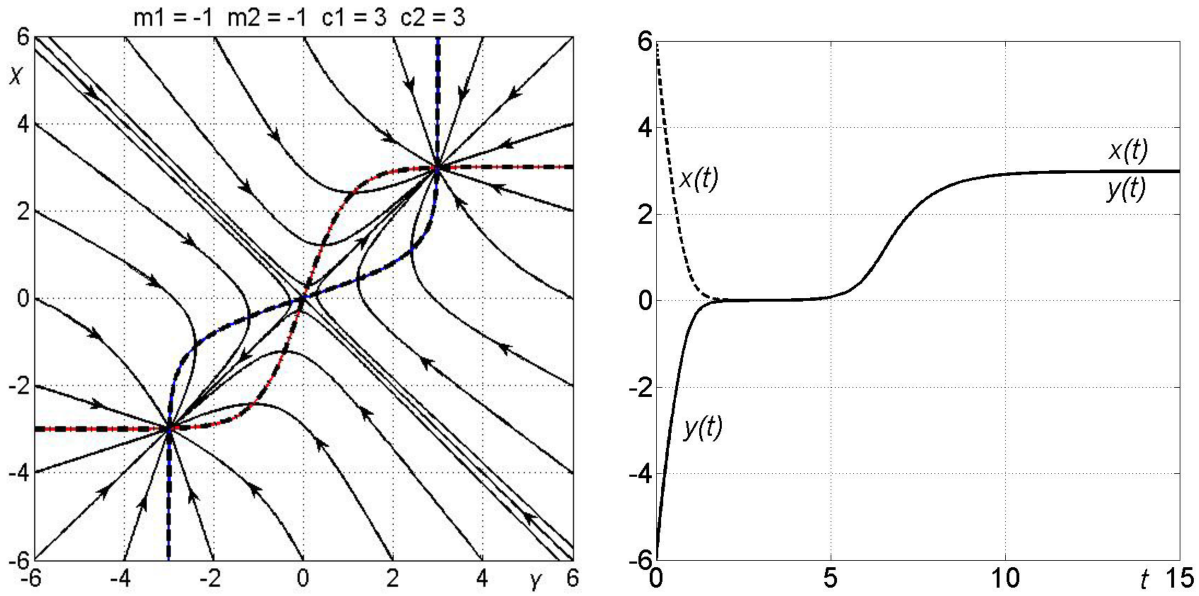
Для нейтрального состояния равновесия (0,0) имеем:

$$\lambda_{1,2} = 0.5(m_1 + m_2 \pm \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + 4c_1 c_2}. \tag{7}$$

След всегда отрицательный, значит устойчивость определяется знаком определителя. Если определитель больше нуля на стационаре, то точка устойчивая, если – меньше, то точка является седлом и неустойчивая.

В смешанной стратегии, когда $c_1 \times c_2 < 0$, определитель больше нуля (см. (5)). В этом случае единственное нейтральное состояние равновесия всегда устойчиво и является фокусом или узлом. Если $m_1 = m_2$, то собственные значения всегда комплексные (см. (7)), а значит стационарная точка – устойчивый фокус. Будучи выведенной из состояния равновесия, система совершает затухающие осцилляции из области положительных (дружественных) состояний в область отрицательных (враждебных) и обратно, постепенно возвращаясь в нейтральное положение. При $m_1 \neq m_2$ и слабой обратной связи состояние (0,0) может быть устойчивым узлом (см. (7)).

В случае двойной положительной или двойной отрицательной связи нейтральное состояние равновесия будет устойчивым узлом при слабой обратной связи и седлом при сильной обратной связи. При сильной обратной связи появляются еще два состояния равновесия, которые являются устойчивыми узлами, а нейтральное равновесие – становится седлом.



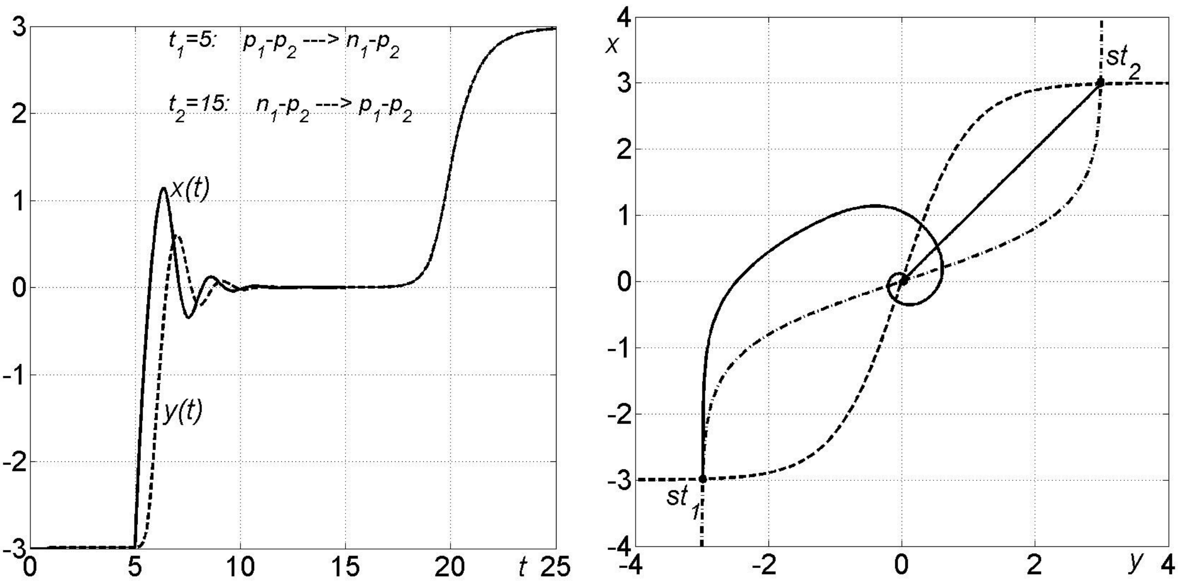
(***a***) (***b***)

Рис. 2 (***a***) **–** Фазовый портрет для случая сильной двойной положительной обратной связи: точка (0,0) – седло, две другие стационарные точки – устойчивые узлы; (***b***) – динамика системы, находящейся сначала на входящей сепаратрисе седла; система приходит в нейтральную точку, а затем малое возмущение переводит систему в положительную стационарную точку.

2. Рассмотрим *случай сильной двойной положительной связи*. На рис. 2 *a* изображен типичный фазовый портрет для этого случая. Главные изоклины системы отмечены жирными пунктирными линиями. Мы видим, что система может пребывать либо в устойчивом негативном (не дружественном) состоянии, либо в устойчивом положительном состоянии. Устойчивые состояния представляют собой узлы. Области притяжения этих двух узлов на фазовой плоскости разделяют устойчивые входящие сепаратрисы седловой точки (0,0).

Находясь на входящей сепаратрисе седла, акторы двигаются к нейтральному состоянию равновесия. Они долго могут там находиться, пока возмущения не выведут их из этого состояния (рис. 2 *b*). Тогда система перейдет или в положительное состояние равновесия, или в отрицательное в зависимости от направленности возмущений. На рис. 2 *b* изображена динамика системы для случая, когда небольшое возмущение, внесенное в систему, находящуюся в нейтральном состоянии, перевело систему в положительное состояние равновесия.

Пусть акторы находятся в отрицательном состоянии, и стационарная точка, определяющая их, принадлежит III-му квадранту. Возникает естественный вопрос, что надо сделать, чтобы отношения стали дружественными, и система из третьего квадранта переместилась бы в первый. Для этого один из акторов временно должен поменять стратегию. (Временное изменение стратегии рассматривалось ранее для смешанного случая взаимодействий [3].) Находясь в устойчивом отрицательном состоянии равновесия st_1, система переходит в устойчивое положительное состояние, благодаря тому, что, проявляя добрую волю, первый актор изменяет свою стратегию (с положительной на отрицательную в момент времени t_1). Тогда система начинает двигаться к нейтральному состоянию равновесия и совершать вокруг него затухающие колебания в соответствии с динамикой при смешанном взаимодействии. В момент времени t_2 первый актор снова изменяет свою стратегию на первоначальную. В результате система переходит в положительное состояние равновесия st_2. На рис. 3 *a* изображена динамика системы для этого случая, на рис. 3 *b* показана соответствующая траектория на фазовой плоскости.

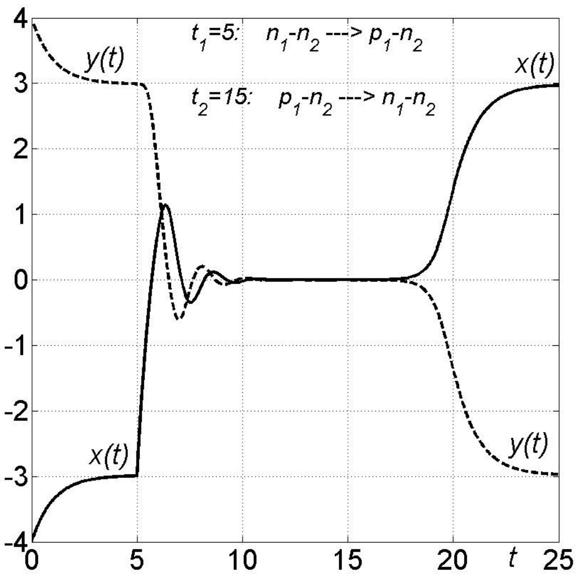


(***a***) (***b***)

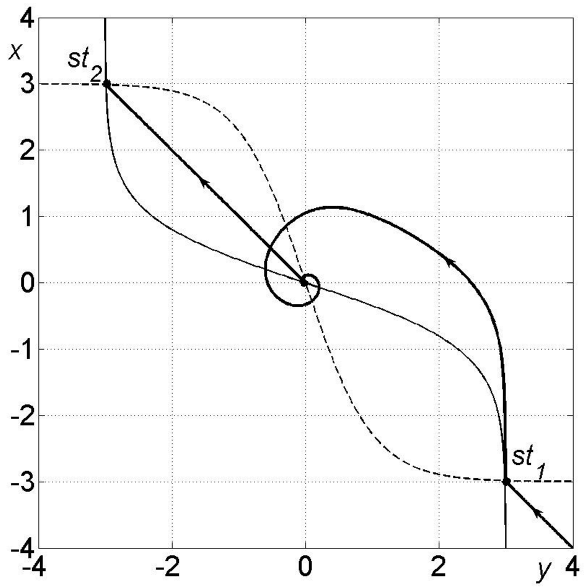
Рис. 3. (***a***) – Динамика системы, сначала находящейся в отрицательном состоянии равновесия st_1 в случае двойной сильной положительной обратной связи. В момент времени t_1 первый актор меняет свою стратегию на отрицательную. В результате система начинает двигаться к нейтральному равновесию и совершать затухающие колебания вокруг него. В момент времени t_2 первый актор снова изменяет свою стратегию на прежнюю – положительную, и система переходит в устойчивую стационарную точку st_2, описывающую дружественные отношения. (***b***) – соответствующая динамике траектория на фазовой плоскости системы.

Отметим, что изменение стратегии взаимодействия во второй раз (то есть возвращение первоначальной стратегии) актором может быть произведено, как только система перейдет сепаратрису нейтральной точки, разделяющей области притяжения двух устойчивых состояний равновесия st_1 и st_2. В рассматриваемом примере это можно было сделать намного раньше, например, в момент $t_2 = 7$.

3. В случае *сильной двойной отрицательной связи* фазовой портрет имеет аналогичный характер рассмотренному случаю, он только повернут на 90°. Устойчивые стационарные точки здесь находятся во II-м и в IV-м квадрантах. Это означает, что акторы всегда находятся в противоположных состояниях, для одного оно – позитивное, для другого негативное. Области притяжения этих состояний разделены входящей сепаратрисой седловой точки (0.0).



(***a***)



(***b***)

Рис. 4. Параметры: $m_1 = m_2 = -0.9$; $c_1 = c_2 = -3$; (***a***) – Динамика системы, сначала находящейся в точке равновесия st_1 (первый актор – в негативной состоянии, он проигравший, второй – в позитивном состоянии, он выигравший). В момент времени t_1 первый актор меняет свою стратегию на положительную. В результате система начинает двигаться к нейтральному равновесию и совершать затухающие колебания вокруг него. В момент времени t_2 первый актор изменяет свою стратегию на прежнюю – отрицательную, и система переходит в устойчивую стационарную точку st_2, описывающую положительное состояние первого автора и негативное состояние второго актора (победитель и побежденный поменялись ролями). (***b***) – соответствующая динамике траектория на фазовой плоскости системы отмечена жирной линией.

В работе [3] показано, чтобы изменить негативное состояние на позитивное актору с негативным состоянием надо на некоторое определенное время изменить свою стратегию, включив положительную обратную связь, а по истечению этого времени опять использовать прежнюю стратегию – отрицательную обратную связь. Таким образом победитель и проигравший поменяются ролями. Сменив отношение конкуренции на сотрудничество проигравший актор заставит другого актора двигаться в сторону нейтрального состояния. Когда тот пройдет нейтральное состояние, надо будет во второй раз первому актору переключить стратегию. Такая динамика системы представлена на рис. 4 *a*, а соответствующая траектория – на рис. 4 *b*.

Показано, что продолжительность времени между первым и вторым переключением пропорциональна периоду T затухающих колебаний около нейтральной точки, который пропорционален квадратному корню из произведения сил обратной связи между акторами. Как следует из формулы (7):

$$T \sim 2\sqrt{c_1 c_2}, \quad \text{при} \qquad m_1 = m_2.$$

В рассматриваемом случае второе переключение можно было сделать гораздо раньше, например, в момент времени $t_2 \approx 7$.

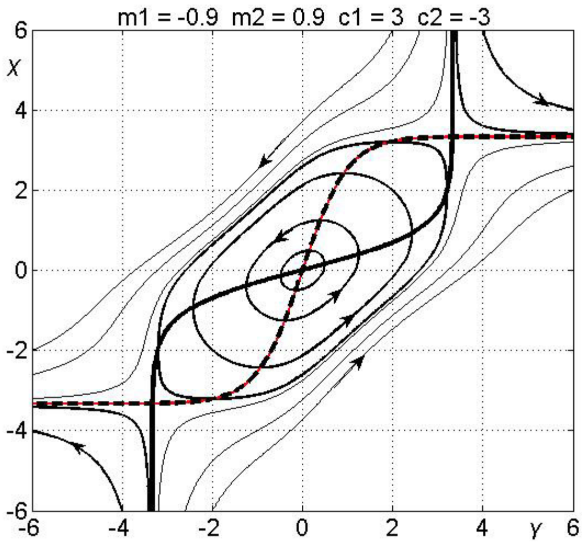
4. *Система* (*1*) *не имеет предельных циклов* ни при каких значениях параметров, поскольку след не изменяет свой знак на всей фазовой плоскости. Стационарных точек типа центр она тоже не имеет. Таким образом, система (1) при отрицательных значениях $m_1 < 0$ и $m_2 < 0$ не может демонстрировать колебания.

Самовозбудимые акторы

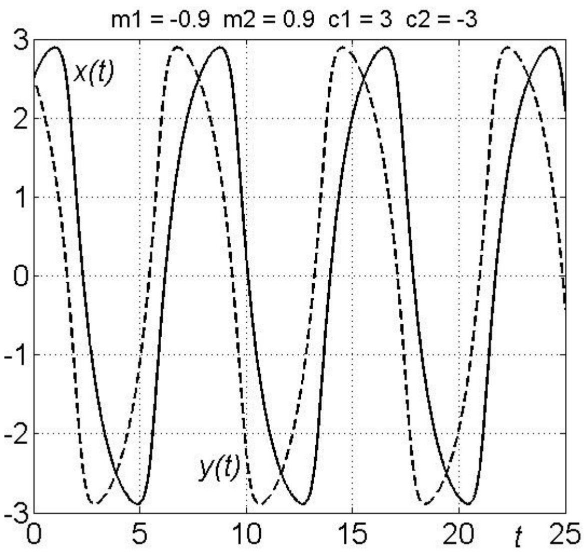
1. В модели (1) считалось, что $m_1 < 0$ и $m_2 < 0$. Это означает, что в отсутствие взаимодействий собственные состояния релаксируют к нейтральному равновесию, что не всегда бывает. Рассмотрим теперь случай, когда один из параметров m_1 или m_2 положительный. Пусть для определенности $m_1 < 0$, а $m_2 > 0$. Положительное значение m_2 можно интерпретировать, как самовозбудимость актора: возбуждение вплоть до эйфории или склонность к глубокой депрессии в психологической трактовке; стремление к генерации, как положительных, так и отрицательных идей, в социально-экономической трактовке. Понятно, что система с возбудимым партнером может существовать, только если коэффициент $c_2 < 0$. Во взаимодействии отрицательное значение c_2 будет означать, что партнер будет гасить возбуждение, подталкивая возбудимого актора к равновесию.

Рассмотрим сначала случай, когда невозбудимый партнер с $m_1 < 0$ использует положительную обратную связь по отношению к возбудимому партнеру, то есть $c_1 > 0$. Таким образом, возбудимый и невозбудимый акторы используют разные стратегии, и в модели (1) $m_1 m_2 < 0,\ c_1 c_2 < 0$. Сначала рассмотрим случай $|m_1|=|m_2|$, тогда след равен нулю и система – консервативная. След и определитель системы по-прежнему описываются соотношениями (3), (4), (5), а собственные значения − формулами (6) и (7). При слабой обратной связи существует единственное нейтральное состояние равновесия, которое является седлом, так как определитель меньше нуля. В этом случае мера воздействия актора на возбудимость его партнера – слабая, он не может гасить возбуждение партнера, система идет вразнос и распадается.

При сильной обратной связи ($|c_1|>|m_1|$, $|c_2|>|m_2|$) модель имеет три стационарных состояния. Нейтральное состояние равновесия (0,0) является центром и определяет колебательную динамику системы вокруг начала координат. Две другие точки относятся к типу седел. Типичный фазовый портрет для этого случая изображен на рис. 5 *а*.



(*a*)



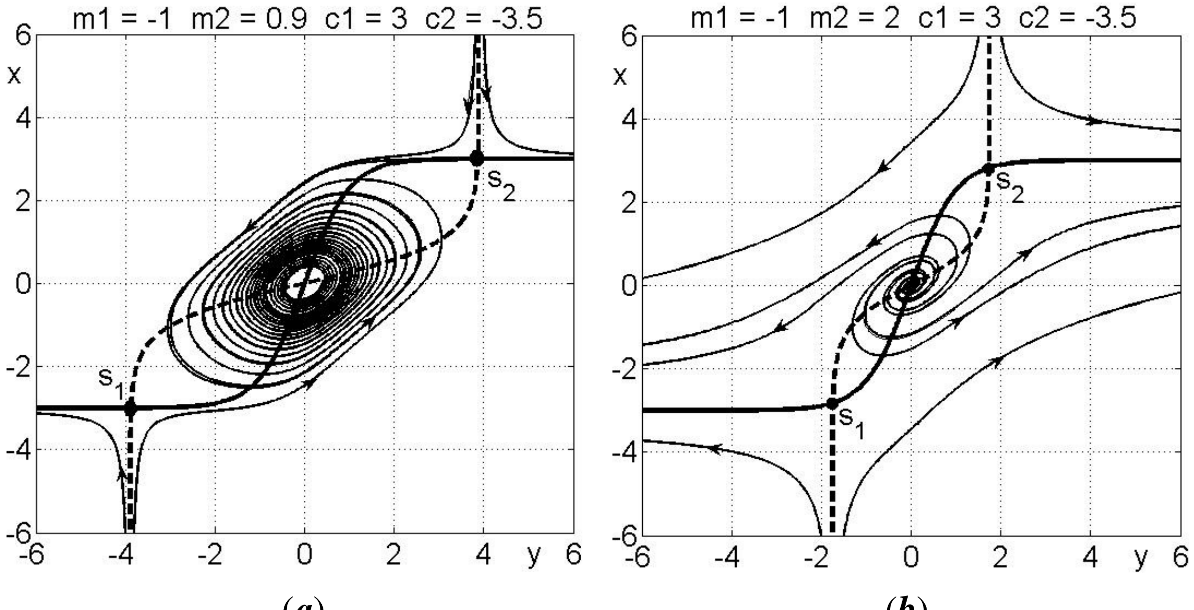
(*b*)

Рис. 5. (***a***) Фазовый портрет системы (1)(2) при $m_1 = -m_2$. Изоклины изображены жирными линиями. Точка (0,0) – центр. Две другие стационарные точки, находящиеся на пересечении изоклин в I-м и III-м квадрантах, – седловые;
(***b***) Вид колебаний вокруг нейтральной точки (0,0) типа центр.

Рассмотрим механизм колебаний, которые описывает эта модель. Он отличается от механизма колебаний в известной модели Лотки-Вольтерра, или «хищник-жертва» [4]. Пусть состояние возбудимого актора положительное, $y(t)>0$. Чем сильнее возрастает возбуждение $y(t)$ второго актора, тем сильнее он оказывает воздействие на первого актора, заставляя расти функцию $x(t)$ и переходить из отрицательного состояния в положительное. С другой стороны, чем больше $x(t)>0$, тем сильнее замедляется рост второго актора, и, доходя до максимума, рост прекращается, функция $y(t)$ начинает убывать, переходя в область отрицательных состояний. При малых положительных значениях $y(t)$ воздействие второго актора на первый слабо, и состояние первого актора начинает уменьшаться, двигаясь к нейтральному, в соответствии с собственным поведением. При отрицательных $y(t)<0$ состояние первого актора $x(t)$ продолжает уменьшаться, двигаясь в сторону больших отрицательных значений. При этом его воздействие на второго актора усиливается. Функция $y(t)$ перестает уменьшаться и начинает расти, переходя из области отрицательных состояний – в область положительных; и цикл замыкается. На рис. 5 *b* показан вид этих колебаний.

В модели хищник-жертва рост числа жертв ограничивают исключительно хищники, а численность жертв влияет на размножение хищников. В рассматриваемой модели «хищники» $x(t)$ стимулируют на некоторых фазах цикла размножение «жертв» $y(t)$. Здесь за процесс колебаний в равной степени отвечают и «хищники» $x(t)$, и «жертвы» $y(t)$, стимулируя и замедляя рост друг друга. В модели хищник-жертва за колебания отвечает только хищники.

2. Если $|m_1| \neq |m_2|$, то система уже не будет консервативной. При слабой обратной связи существует единственное нейтральное состояние равновесия, которое является седлом (так как $\Delta_{A(0,0)} = m_1 m_2 - c_1 c_2 < 0$), и динамика системы аналогична консервативному случаю.



(***a***) (***b***)

Рис. 6. Фазовые портреты системы (1) при сильной обратной связи, жирными линиями отмечены изоклины системы, s_1 и s_2 – седловые стационарные точки; (***a***) случай $m_1 + m_2 < 0$, т. (0,0) – устойчивый фокус; (***b***) случай $m_1 + m_2 > 0$, т. (0,0) – неустойчивый фокус.

При сильной обратной связи фазовый портрет системы зависит от значения $Sp_A = m_1 + m_2$ следа. Если $m_1 + m_2 < 0$, то нейтральная точка является устойчивым фокусом, а две другие – седлами (рис. 6 a). В этом случае, если случайные факторы выводят возбудимого актора из равновесия, то система, совершая затухающие колебания, стремится к нейтральному равновесию. Невозмутимый актор гасит возбуждение своего партнера, при этом их эмоциональные состояния испытывают то взлеты, то падения, причем с некоторым запаздыванием.

3. Рассмотрим теперь случай, когда невозбудимый партнер с $m_1 < 0$ использует отрицательную обратную связь ($c_1 < 0$) по отношению к возбудимому партнеру. Таким образом, возбудимый и невозбудимый акторы используют одинаковые стратегии, и мы имеем: $m_1 m_2 < 0,\ c_1 c_2 > 0.$ В этом случае изоклины системы пересекаются в единственной нейтральной точке, которая является седлом (и при сильной обратной связи, и при слабой, и даже когда след – отрицательный), поскольку в этом случае определитель всегда меньше нуля (см. (6)). Устойчивых стационарных точек система не имеет ни при каких значениях параметров, а значит такие партнеры не могут сосуществовать.

4. Если оба актора – самовозбудимые ($m_1 > 0$ и $m_2 > 0$), то след матрицы Якоби больше нуля при любых значениях c_1 и c_2, а следовательно имеющиеся стационарные точки (три или одна) – неустойчивые. Это означает, что такие акторы не могут существовать, как система.

Дружественные отношения, кооперация

1. В рассмотренной выше модели (1) функции взаимодействия между акторами зависели только от одной переменной: $f_1(y)$ и $f_2(x)$. В базовой модели Мюрея-Готтмана взаимодействие интерпретировалось, как реакция актора на состояние партнера, собственное состояние в функции взаимодействия не принималось во внимание. Однако, во многих случаях необходимо учитывать и состояния самих партнеров во взаимодействии.

В этом разделе изучим случай, когда акторы могут жить независимо, и при этом их состояния – положительные. Таким акторам выгодно вступать во взаимоотношения, только когда взаимодействие повышает их уровни состояний. Такие отношения можно назвать дружбой, сотрудничеством или кооперацией. Расширенная модель, описывающая сотрудничество, имеет вид:

$$dx/dt = m_1 x\,(1 - x/\,b_1) + c_1 x th(y), \qquad (8.1)$$

$$dy/dt = m_2 y(1 - y/\,b_2) + c_2 y th(x). \qquad (8.2)$$

Здесь m_1, m_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – положительные параметры. В отсутствии взаимодействий ($c_1 = c_2 = 0$), система (9) распадается на два независимых уравнения, описывающих логистический рост. В этом случае состояние первого актора стремится к положительному уровню b_1, а второго – к b_2, а параметры m_1 и m_2 описывают скорости экспоненциального роста при малых значениях фазовых переменных. Положительные значения c_1, c_2 означают положительную обратную связь между партнерами. Как видно из уравнений (8), здесь функции, описывающие взаимодействия между акторами, учитывают, как влияние партнеров, так и собственные состояния акторов:

$$f_1(y,x) = c_1 x th(y), \text{ и } \quad f_2(x,y) = c_2 y th(x).$$

Исследуем фазовый портрет системы (8) в зависимости от значения параметров. Стационарные точки лежат на пересечении изоклин системы: $x = 0$, $\quad y = 0$, и изоклин:

$$F_1(x,y) = m_1(1 - x/b_1) + c_1 th(y) = 0, \tag{9.1}$$

$$F_2(x,y) = m_2(1 - y/b_2) + c_2 th(x) = 0. \tag{9.2}$$

Система (8) имеет стационарные точки: (0,0), (0,b_2), (b_1,0) и (x_s,y_s), где:

$$x_s = b_1 + (c_1 b_1/m_1) th(y_s); \quad y_s = b_2 + (c_2 b_2/m_2) th(x_s). \tag{10}$$

Точек, координаты которых удовлетворяют (10), может быть несколько (от одной до трех). Всегда существует точка (10), лежащая в I квадранте и описывающая кооперацию. Если изоклины (9) пересекаются в области, где $th(y_s) \approx 1$ и $th(x_s) \approx 1$, то справедливо следующее приближение:

$$x_s \approx b_1(1 + c_1/m_1); \quad y_s \approx b_2(1 + c_2/m_2). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует интересный факт, что уровни совместного состояния при кооперативном взаимодействии превышают уровни собственных устойчивых состояний при независимом существовании.

Тип и устойчивость точек определим, проанализировав след и определитель матрицы Якоби A.

$$Sp_A = a_{11} + a_{22} = m_1(1 - \frac{2x}{b_1}) + c_1 th\, y + m_2(1 - \frac{2y}{b_2}) + c_2 th\, x; \tag{12}$$

$$a_{12} = \frac{c_1 x}{ch^2 y}, \quad a_{21} = \frac{c_2 y}{ch^2 x}, \tag{13}$$

$$Sp_A(0,0) = m_1 + m_2; \quad \Delta_A(0,0) = m_1 m_2, \tag{14}$$

$$Sp_A(b_1,0) = -m_1 + m_2 + c_2 th\, b_1; \quad \Delta_A(b_1,0) = -m_1(m_2 + c_2 th\, b_1), \tag{15.1}$$

$$Sp_A(0,b_2) = m_1 - m_2 + c_1 th\, b_2; \quad \Delta_A(0,b_2) = -m_2(m_1 + c_1 th\, b_2)\,, \qquad (15.2)$$

$$Sp_A(x_s, y_s) = -\frac{m_1 x_s}{b_1} - \frac{m_2 y_s}{b_2}; \qquad (16.1)$$

$$\Delta_A(x_s, y_s) = x_s y_s \left(\frac{m_1 m_2}{b_1 b_2} - c_1 c_2 \frac{1}{ch^2 x_s ch^2 y_s} \right). \qquad (16.2)$$

На рис. 7 представлены фазовые портреты системы (8) для двух наборов параметров при сильных взаимодействиях. В первом случае (рис. 7 *а*) имеется единственная стационарная точка (y_s,x_s), не лежащая на осях координат, а во втором случае (рис. 7 *б*) существует три такие точки. Нейтральная точка (0,0) st_4 будет неустойчивым узлом при всех значениях параметров, поскольку след и определитель – положительные (см. (14)). Точки (0,b_2) и (b_1,0), лежащие на осях координат, st_2, st_3 являются седлами, так как определитель меньше нуля (см. (15).

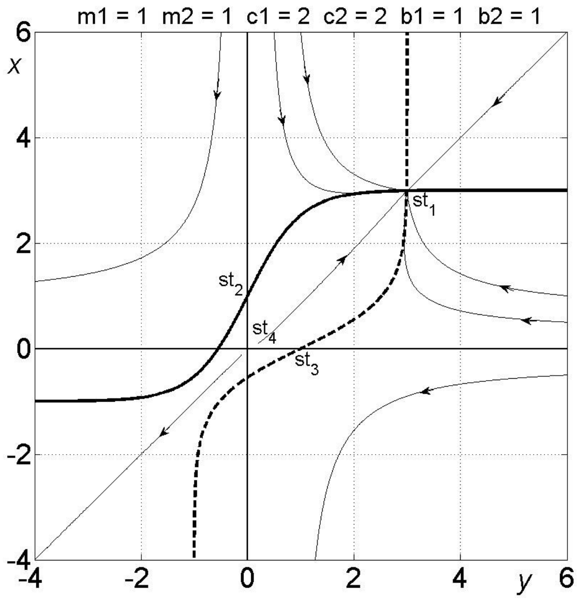


Рис. 7. Фазовые портреты системы (8), описывающие протокооперацию. Изоклины изображены жирными линиями. Состояние равновесия st_1 является устойчивым узлом, все траектории в первом квадранте сходятся к ней.

Единственной устойчивой точкой типа узла является точка st_1 с координатами (y_s, x_s) (10), лежащая в первом квадранте. В ней след меньше нуля, а определитель больше нуля, как видно из соотношения (16). (Определитель положительный, поскольку отрицательный член в выражении (16.2) близок к нулю). Все траектории, начинающиеся в I-м квадранте ($x > 0,\ y > 0$), сходятся к этой точке.

При втором наборе параметров (рис. 7 *б*) имеются еще 2 стационарные точки, находящиеся в области отрицательных состояний. Одна из них st_6 является неустойчивым узлом, а другая st_5 – седлом. В данной модели интерес представляет только первый квадрант, все траектории, начинающиеся вне первого квадранта, уходят в бесконечность, и модель теряет смысл.

Представленная модель дружественных отношений (8) аналогична известной модели симбиоза по типу протокооперации для биологических популяций [4]. Там фазовые переменные имеют смысл численностей популяций. Популяции могут жить независимо, но в протокооперации их численности выше, чем при независимом существовании.

2. Рассмотрим другой тип кооперации партнеров, которые в отсутствии взаимодействия стремятся к нейтральному состоянию, и имеют нижний отрицательный порог выживаемости, ниже которого данный актор перестает существовать. В этом случае в модели (8) параметры, m_1, m_2, b_1, b_2 – отрицательные. В качестве такого актора может выступать некоторый экономический или социальный субъект. Когда такие акторы участвуют во взаимодействии и используют двойную положительную обратную связь ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$), в системе при сильных взаимодействиях появляется устойчивая стационарная точка, отвечающая положительному состоянию обоих партнеров. Эта стационарная точка может иметь довольно большую область притяжения. Она описывает дружественные кооперативные отношения между партнерами, которые обоим идут на пользу. На рис. 8 изображен фазовый портрет системы для этого случая.

Рассматриваемая система имеет 6 стационарных точек, тип и устойчивость которых по-прежнему задаются формулами (12)-(16). Нейтральное состояние равновесия (0,0) здесь является устойчивым узлом (след меньше нуля, определитель больше нуля (см. (14)). В I-м квадранте находятся две стационарные точки: состояние равновесия st_1, которое описывает кооперативные отношения и является устойчивым узлом, и состояние st_5, представляющее собой седло. Входящая сепаратриса этого седла является границей, разделяющей области притяжения точек st_1 и st_4 (0,0). Все траектории, лежащие ниже сепаратрисы в первом квадранте, стремятся к нейтральной точке. В этом случае взаимодействие не приносит выгоду. Если начальный уровень состояний лежит выше сепаратрисы, то траектории системы приводят к положительному состоянию st_1, описывающему выгоду от кооперации. Стационарная точка st_6 принадлежит отрицательной области для обоих партнеров и является неустойчивым узлом. Стационарные точки st_2 и st_3 лежат на осях, одна из координат у них отрицательная. Они являются седлами и описывают предельные нижние состояния акторов в отсутствии взаимодействия. Входящие в них ветви сепаратрис, ограничивают область притяжения нейтральной точки во II-м, III-м и IV-м квадрантах. На рис. 8 они отмечены жирной штрихпунктирной линией. В III-м квадранте эти сепаратрисы выходят из точки st_6.

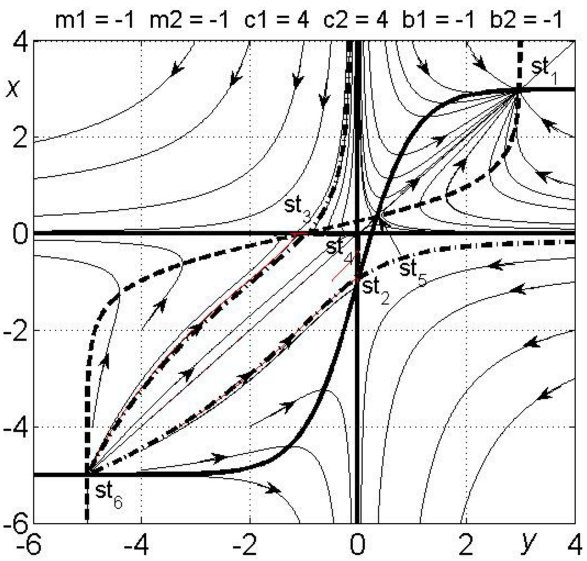


Рис. 8. Фазовый портрет системы (8), описывающий кооперацию по типу мутуализм. Изоклины изображены жирными линиями. st_1 – st_6 – стационарные точки. Точка st_1 соответствует устойчивому состоянию в кооперации, все траектории, находящиеся выше входящих сепаратрис в седловую точку st_5, сходятся к st_1.

Таким образом, в рассматриваемом случае существуют две устойчивые стационарные точки (т. (0,0) и st_1), которые определяют возможные состояния системы в кооперации. Одна из них (st_1) находится в I-м квадранте и описывает выгодную кооперацию для обеих партнеров; при некоторых наборах параметров она может характеризоваться высоким положительным уровнем. Область притяжения этой стационарной точки лежит в положительной области и имеет критический минимум. Если случайные взаимодействия опустят состояния системы ниже критической кривой, то система перейдет в устойчивое нейтральное состояние. Но и в этом состоянии кооперация выгодна, поскольку существенно может увеличить область притяжения к точке (0,0) в отрицательной области по сравнению с отрицательными минимумами b_1 и b_2 при независимом существовании акторов, то есть выживаемость системы сильнее.

Отметим, что аналогом таких отношений в биологических сообществах является симбиоз по типу мутуализм, когда популяции не могут жить друг без друга и вымирают [4].

Колебательная динамика самовозбудимых акторов

1. Выше была рассмотрена динамика модели (1), когда один или оба актора являются самовозбудимыми. Теперь исследуем, как повлияет на поведение системы учет во взаимодействии собственных состояний акторов, как в модели (8). Рассмотрим две системы:

I) $$dx/dt = m_1x + c_1xth(y), \quad (17.1)$$

$$dy/dt = m_2y + c_2yth(x). \quad (17.2)$$

II) $$dx/dt = m_1x + c_1xth(y), \quad (18.1)$$

$$dy/dt = m_2y(1 - y/b_2) + c_2yth(x). \quad (18.2)$$

Выберем следующие значения параметров:

$$m_1 < 0,\ \ m_2 > 0,\ \ c_1 > 0,\ \ c_2 < 0 \ \text{ и } \ b_2 > 0.$$

Сначала исследуем поведение модели (17). В ней второй актор является возбудимым и «заводит» первого актора, который в свою очередь является уравновешенным и гасит возбуждение первого. При всех значениях параметров она имеет стационарную точку, лежащую в начале координат. Точка (0,0) является седлом, так как определитель $\Delta_{A(0,0)} = m_1m_2 < 0$. Ее сепаратрисы совпадают с осями координат, входящая – с осью x, а выходящая с осью – y. При сильных взаимодействиях

$$(|c_2| > |m_2|, \quad |c_1| > |m_1|) \quad (19)$$

существует еще одна стационарная точка (x_s,y_s), лежащая в первом квадранте, которая находится из уравнений:

$$\frac{m_2}{c_2} + thx = \frac{m_2}{c_2} + \left(1 - \frac{2}{\exp(2x)+1}\right) = 0,$$

$$\frac{m_1}{c_1} + thy = \frac{m_1}{c_1} + \left(1 - \frac{2}{\exp(2y)+1}\right) = 0.$$

Ее координаты задаются выражениями:

$$y_s = \frac{1}{2}\ln\frac{(c1-m1)}{(c1+m1)}; \qquad x_s = \frac{1}{2}\ln\frac{(c2-m2)}{(c2+m2)}. \quad (20)$$

В линеаризованной системе состояние равновесия (x_s,y_s) является центром, так как след Sp_A матрицы $\boldsymbol{A}$ равен нулю, а определитель $\boldsymbol{A}$ больше нуля:

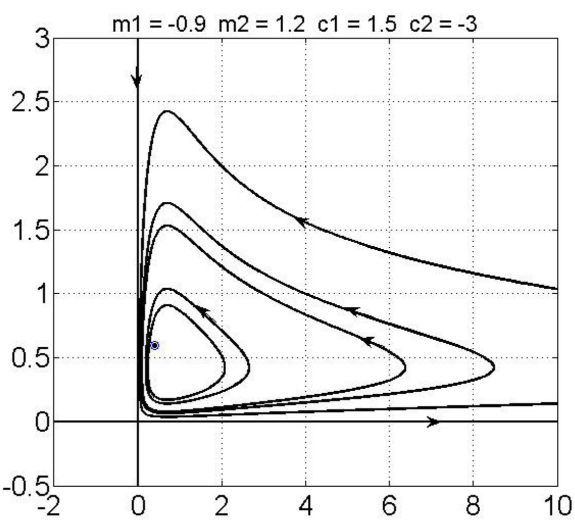
$$\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -c_1c_2xych(x)^{-2}ch(y)^{-2} > 0.$$

В нелинейной системе существует первый интеграл $I(x,y)=C$:

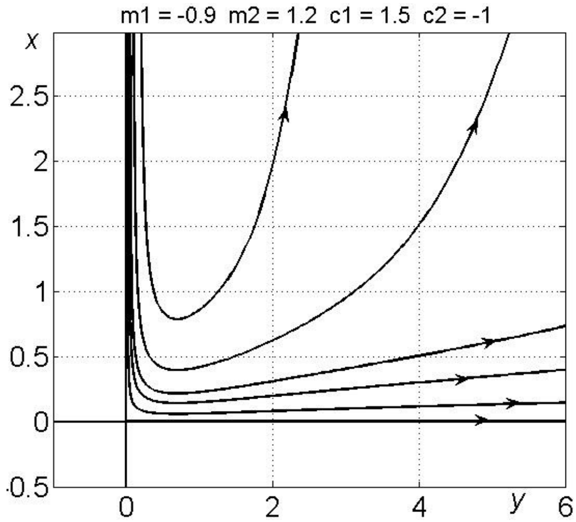
$$y^{m1+c1}e^{-c1g(y)} = Cy^{m2+c2}e^{-c2g(x)}, \qquad (21)$$

где функция $g(y) = \int \frac{2dy}{(e^{2y}+1)y}$, C>0. Максимум функции $I(x,y)$ находится в т. (x_s,y_s), которая также представляет собой центр. Линии уровня первого интеграла $I(x,y)=C$ описывают замкнутые кривые вокруг точки (x_s,y_s).

На рис. 9 изображены фазовые портреты модели (17), описывающей отношения с возбудимым актором и учитывающей собственные состояния партнеров во взаимодействиях: рис. 9*a* – в случае сильной обратной связи; рис. 9 *b* – в случае слабой обратной связи. Мы видим, что точка центр и колебания вокруг него существует только при сильной обратной связи. При слабой связи существует единственная неустойчивая стационарная точка (0,0) – седло. В этом случае уравновешенные актор не может гасить возбуждение своего партнера, и его состояние неограниченно возрастает; модель теряет смысл. Такие партнеры сосуществовать не могут.



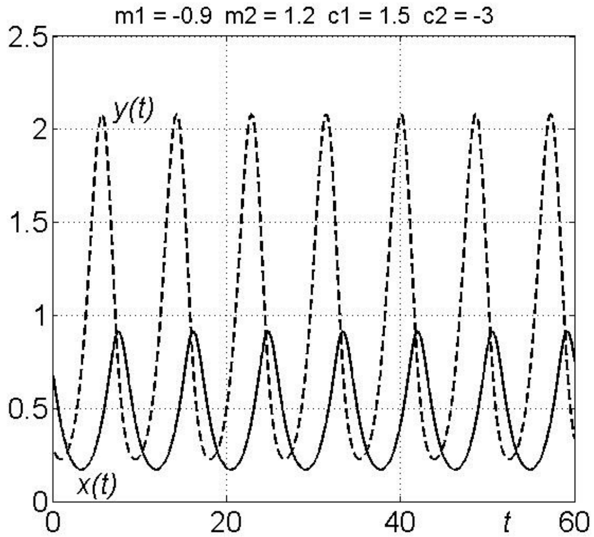
(a)



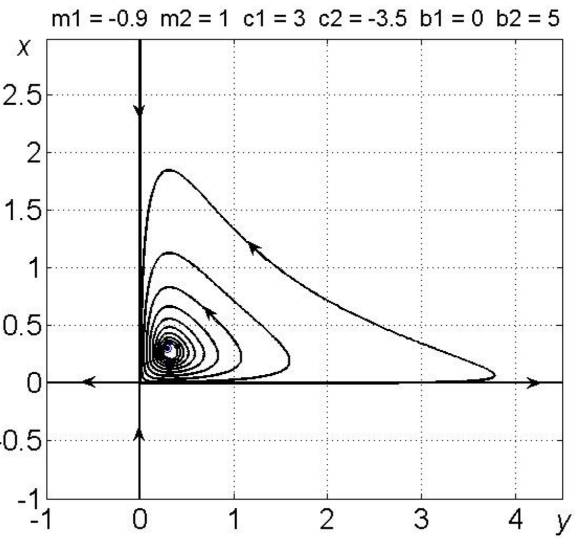
(***b***)

Рис. 9. Фазовые портреты системы (17) с возбудимым актором и учетом собственного состояния при взаимодействиях; ***a***) – случай сильной обратной связи; ***b***) – случай слабой обратной связи.

В случае сильной обратной связи модель (17) и ее фазовый портрет (рис. 9 *a*) качественно похожи на систему «хищник-жертва». Здесь роль жертвы играет возбудимый актор (с $m_2 > 0$), описываемый переменной $y(t)$, а роль хищника, который не дает сильно возбуждаться партнеру – первый актор, описываемый переменной $x(t)$ (с $m_1 < 0$).



a)



b)

Рис. 10. ***а***) Вид колебаний в модели (17); ***б***) Фазовый портрет системы (18); стационарная точка в первом квадранте – устойчивый фокус.

В отличие от системы Лотки-Вольтерра в модели (17) учитываются «насыщения» хищника и жертвы в разных уравнениях [4]. Механизм колебаний тот же. Чем сильнее возрастает возбудимость второго актора, тем сильнее становится обратное воздействие, оказываемое на него первым актором. В результате первый актор гасит возбуждение второго актора, и тот, дойдя до некоторого максимального возбуждения, начинает двигаться в сторону нейтрального состояния. По мере уменьшения возбуждения второго актора, уменьшается и сила воздействия на него первым актором, она становится меньше, чем сила возбудимости второго актора. В результате второй актор «выходит из-под контроля», и его возбуждение начинает снова расти, и цикл замыкается. На рис. 10 *а* показан вид этих колебаний.

Замечание. Найденные колебания, которые дает модель (17), качественно отличаются от колебаний в модели (1) с возбудимым актором и механизмом (см. выше), и тем, что они не уходят в отрицательную область. Но главное их отличие состоит в том, что они существуют при любых допустимых значениях параметров (19). В модели (1) колебания могут быть только в симметричном случае, когда $m_1 = -m_2$, $-c_1 = c_2$. Малейшее изменение параметров в сторону асимметрии приводит к тому, что стационарная точка превращается либо в устойчивый фокус, либо в неустойчивый фокус. Это означает, что в этом случае модель (1) не является структурно устойчивой, а значит не может описывать какой-либо реальный колебательный процесс. В модели (17) колебания существуют при сильных взаимодействиях (19), как в симметричном, так и в несимметричном случаях.

2. Исследуем теперь динамику модели (18). Здесь первый актор, в отсутствие взаимодействий стремится к нейтральному состоянию, а второй актор в отсутствие взаимодействий – к положительному состоянию b_1. При сильной обратной связи в этой системе в положительном квадранте существует устойчивая стационарная точка типа фокуса, описывающая кооперацию, выгодную для обоих партнеров. Фазовый портрет системы представлен на рис. 10 б.

Заключение

В работе изучена динамика различных взаимодействий между двумя партнерами, описываемая системой двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. В качестве партнеров могут выступать разные социальные субъекты: от отдельных лиц и социальных групп до государств и наций .Исследуемые модели является расширением модели Мюррея-Готтмана, предложенной для описания взаимоотношений между супругами. Рассмотрены новые функции, описывающие собственное поведение акторов в отсутствие взаимодействий, и новые функции, моделирующие влияние партнеров друг на друга. Построены фазовые портреты систем в случае *возбудимых, самодостаточных* и некоторых других акторов, которые в отсутствие взаимодействий не стремятся к нейтральному состоянию, как в модели Мюррея-Готтмана. Найдены новые типы динамического поведения. В частности, предложены две нелинейные консервативные модели, демонстрирующие колебательную динамику вокруг точки центр.

Все рассмотренные в работе модели достаточно простые (не сложнее, чем известные системы «хищник-жертва» или модель конкуренции двух видов) поскольку они носят качественный характер и ухватывают основную суть взаимодействий. Предложенные модели демонстрируют богатый набор фазовых портретов и могут быть применены для моделирования различных социальных взаимоотношений между двумя акторами.

Литература

1. *J.M. Gottman, J.D. Murray, C.C. Swanson, R. Tyson, K.R. Swanson* The Mathematics of Marriage – MIT Press, Cambridge, 2002, pp. 500.
2. *J. Gottman, C. Swanson, K. Swanson* A general systems theory of marriage: Nonlinear difference equation modeling of marital interaction, Personality and Social Psychology Review 4 (2002) 326–340.
3. *L. S. Liebovitch, V. Naudot, R. Vallacher, A. Nowak, L. Bui-Wrzosinska, P.T. Coleman* Dynamics of two-actor cooperation–competition conflict models// Physica A, V. 387, (2008), pp. 6360–6378.
4. *А.Д. Базыкин* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 368.