Г. Ламос, Г. Гузман, Е. Рейес

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ДИНАМИКИ СОРБЦИИ [1]

В работе рассматривается обратная задача для одной модели процесса динамики сорбции. Обратные задачи динамики сорбции исследовались в целом ряде работ (см., например, [1]-[4]).

Рассмотрим математическую модель процесса динамики сорбции

$$u_x + \alpha u = \alpha F(x) v, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$a_t = \beta(u - F(x)v), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2}$$

$$v_t + \gamma v = \gamma a + \lambda u - \lambda F(x) v, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$a(x,0) = v(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l. \tag{5}$$

Здесь $Q_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l \quad 0 \le t \le T\}$, α, β, γ, λ – положительные постоянные, $\lambda > \beta$. Функции $\mu(t)$ и $F(x)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\mu \in C[0,T], \quad \mu(0) = 0, \tag{6}$$

$$F \in C[0,l], \quad 0 < c_0 \le F(x) \le c_1, \quad x \in [0,l], \tag{7}$$

где c_0 и c_1 – положительные постоянные.

Сформулируем обратную задачу. Требуется определить функции $F(x)$, $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t)$, если постоянные α, β, γ, λ, функции $\mu(t)$, $t \in [0,T]$ и

$$g(x) = u(x,T), \quad x \in [0,l], \tag{8}$$

заданы.

Прежде чем исследовать обратную задачу изучим прямую задачу (1)-(5).

Определение. Функции $u(x,t), a(x,t), v(x,t)$ называются решением задачи (1)-(5), если $u, a, v, u_x, a_t, v_t \in C[Q_T]$ и $u(x,t)$, $a(x,t)$, $v(x,t)$ удовлетворяют (1)-(5).

[1]Департамент математики индустриального университета Сантандер, работа поддержана грантом Colciencias 11021-05-11427

Теорема 1. Если выполнены условия (6),(7), то задача (1)-(5) имеет единственное решение.

Доказательство. Если функции $u(x,t)$,$a(x,t)$, $v(x,t)$ являются решением задачи (1)-(5), то они являются решением следующей системы интегральных уравнений

$$u(x,t) = \mu(t)\exp\{-\alpha x\}+$$

$$+\alpha\int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\}F(\xi)v(\xi,t)d\xi, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{9}$$

$$a(x,t) = \beta\exp\{-\alpha x\}\int_0^t \mu(\tau)d\tau - \beta\int_0^t F(x)v(x,\tau)d\tau+$$

$$+\alpha\beta\int_0^t\int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\}F(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{10}$$

$$v(x,t) = \exp\{-\alpha x\}\int_0^t B_2(x,t,\tau)\mu(\tau)d\tau+$$

$$+\alpha\int_0^x\int_0^t B_2(x,t,\tau)\exp\{-\alpha(x-\xi)\}F(\xi)v(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-F(x)\int_0^t B_1(x,t,\tau)v(x,\tau)d\tau, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{11}$$

где

$$B_1(x,t,\tau) = \frac{\gamma\beta}{B(x)}[1-\exp\{-B(x)(t-\tau)\}],$$

$$B_2(x,t,\tau) = B_1(x,t,\tau)+\lambda\exp\{-B(x)(t-\tau)\}, \quad B(x)=\gamma+\lambda F(x).$$

Докажем, что система интегральных уравнений (9)-(11) имеет единственное непрерывное решение. Рассмотрим следующий итерационный процесс $v_0(x,t)=0$,

$$v_{n+1}(x,t) = \exp\{-\alpha x\}\int_0^t B_2(x,t,\tau)\mu(\tau)d\tau+$$

$$+\alpha\int_0^x\int_0^t B_2(x,t,\tau)\exp\{-\alpha(x-\xi)\}F(\xi)v_n(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$-F(x)\int_0^t B_1(x,t,\tau)v_n(x,\tau)d\tau, \quad (x,t)\in Q_T. \tag{12}$$

Докажем для всех $n\geq 1$ следующую оценку

$$|v_n(x,t)-v_{n-1}(x,t)| \leq \frac{p\times L_1^{n-1}\times 2^{n-1}\times t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (x,t)\in Q_T, \tag{13}$$

где $L_1 = [\lambda+\frac{\beta\gamma}{\gamma+\lambda c_0}]\times c_1$, $p = T\times[\lambda+\frac{\beta\gamma}{\gamma+\lambda c_0}]\times\|\mu\|_{C(0,T)}$. Из (12) имеем $|v_1(x,t)-v_0(x,t)|\leq p$. Предположим, что неравенство (13) выполнено для

$n = k$ и покажем, что оно справедливо для $n = k+1$. Используя формулу (12), получим

$$|v_{k+1}(x,t) - v_k(x,t)| \leq$$
$$\leq \alpha \int_0^x \int_0^t \exp\{-\alpha(x-\xi)\} B_2(\xi,t,\tau) F(\xi) |v_k(\xi,\tau) - v_{k-1}(\xi,\tau)| d\xi d\tau +$$
$$+F(x) \int_0^t B_1(x,t,\tau) |v_k(x,\tau) - v_{k-1}(x,\tau)| d\tau \leq$$
$$\leq \alpha \frac{p 2^{k-1} L_1^k}{(k-1)!} \int_0^x \int_0^t \exp\{-\alpha(x-\xi)\} \tau^{k-1} d\xi d\tau +$$
$$+\frac{p 2^{k-1} L_1^k}{(k-1)!} \int_0^t \tau^{k-1} d\tau \leq \frac{p \times L_1^k \times 2^k \times t^k}{(k)!}.$$

Следовательно, оценка (13) доказана по индукции. Из этой оценки следует, что последовательность функций $v_n(x,t)$ сходится равномерно к непрерывной функции $\overline{v}(x,t)$, которая является решением уравнения (11).

Если мы определим функции $\overline{u}(x,t)$, $\overline{a}(x,t)$ следующим образом

$$\overline{u}(x,t) = \mu(t) \exp\{-\alpha x\} + \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F(\xi) \overline{v}(\xi,t) d\xi \qquad (14)$$

и

$$\overline{a}(x,t) = \beta \exp\{-\alpha x\} \int_0^t \mu(\tau) d\tau - \beta \int_0^t F(x) \overline{v}(x,\tau) d\tau +$$
$$+\alpha\beta \int_0^t \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F(\xi) \overline{v}(\xi,\tau) d\xi d\tau, \qquad (15)$$

то мы получим, что функции $\overline{u}(x,t), \overline{a}(x,t), \overline{v}(x,t) \in C[Q_T]$ и являются решением системы (9)-(11). Непосредственным вычислением можно показать, что производные $\overline{u}_x, \overline{a}_t, \overline{v}_t \in C[Q_T]$ и функции $\overline{u}(x,t)$, $\overline{a}(x,t)$, $\overline{v}(x,t)$ удовлетворяют (1)-(5).

Докажем единственность решения задачи (1)-(5). Если $u_1(x,t)$, $a_1(x,t)$, $v_1(x,t)$ и $u_2(x,t), a_2(x,t), v_2(x,t)$ – решения задачи (1)-(5), то $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ являются решениями интегрального уравнения (11). Следовательно

$$\max_{0\leq x\leq l} |v_1(x,t) - v_2(x,t)| \leq 2 \times L_1 \times \int_0^t \max_{0\leq x\leq l} |v_1(x,\tau) - v_2(x,\tau)| d\tau.$$

Применяя лемму Гронуолла получим, что $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ в Q_T. Тогда из уравнений (9) и (10) следует, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ и $a_1(x,t) = a_2(x,t)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если

$$\mu \in C^1[0,T], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0 \quad t \in [0,T], \qquad (16)$$

и

$$F \in C^1[0,L], \quad 0 < c_0 \le F(x) \le c_1; \quad x \in [0,l], \tag{17}$$

то решение задачи (1)-(5) обладает следующими свойствами: $u, a, v \in C^1[Q_T]$ и

$$u_t(x,t) > 0, \qquad a_t(x,t) > 0, \qquad v_t(x,t) > 0, \qquad (x,t) \in {Q_T}^0, \tag{18}$$

где ${Q_T}^0 = \{(x,t), 0 \le x \le l, 0 < t \le T\}$.

Доказательство. Пусть $u(x,t), a(x,t), v(x,t)$ – решение задачи (1)-(5). Из условий (16), (17) и уравнений (9)-(11) следует, что $u, a, v \in C^1[Q_T]$. Тогда из уравнений (1)-(3) имеем $u_{xt}, a_{tt}, v_{tt} \in C[Q_T]$. Рассмотрим функции

$$z(x,t) = u_t(x,t), \qquad p(x,t) = a_t(x,t), \qquad q(x,t) = v_t(x,t),$$

являющиеся решением задачи

$$z_x + \alpha z = \alpha F(x) q, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$

$$p_t = \beta(z - F(x)q), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{20}$$

$$q_t + \gamma q = \gamma p + \frac{\lambda}{\beta} p_t, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{21}$$

$$z(0,t) = \mu'(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{22}$$

$$p(x,0) = q(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le l. \tag{23}$$

Из (19)-(23) имеем

$$z(x,t) = \mu'(t) \exp\{-\alpha x\} + \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F(\xi) q(\xi,t) d\xi, \tag{24}$$

$$q(x,t) = \int_0^t \exp\{-B(x)(t-\tau)\}[\gamma p(x,\tau) + \lambda z(x,\tau)] d\tau. \tag{25}$$

Интегрируя уравнение (21) с условием (23), мы получим

$$q(x,t) = \gamma \left[1 - \frac{\lambda}{\beta}\right] \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} p(x,\tau) d\tau + \frac{\lambda}{\beta} p(x,t).$$

Подставив это выражение в уравнение (20), получим

$$p_t + \lambda F(x) p = \beta z - \gamma[\beta - \lambda] F(x) \int_0^t \exp\{-\gamma(t-\tau)\} p(x,\tau) d\tau.$$

Интегрируя это уравнение с условием (23), имеем

$$p(x,t) = \beta \int_0^t \exp\{-\lambda F(x)(t-\tau)\} z(x,\tau) d\tau -$$

$$-\gamma[\beta-\lambda]F(x)\int_0^t p(x,\theta)\int_\theta^t \exp\{-\lambda F(x)(t-\tau)-\gamma(\tau-\theta)\}d\tau d\theta \quad (26)$$

Из (19)-(23) следует, что $z(x,0)=\mu'(0)\exp\{-\alpha x\}>0$, $p_t(x,0)>0$, $q_t(x,0)>0$ для $x\in[0,l]$. Тогда существует $t_0\in(0,T]$ такое, что $z(x,t)>0$, $p(x,t)>0$, $q(x,t)>0$ для всех $x\in[0,l]$, $t\in(0,t_0]$. Предположим, что одна из функций $z(x,t)$, $p(x,t)$, $q(x,t)$ обращается в ноль в ${Q_T}^0$. Тогда существуют $t_1\in(t_0,T]$, $x_1\in[0,l]$ такие, что $z(x,t)>0$, $p(x,t)>0$, $q(x,t)>0$ для $x\in[0,l]$, $t\in(0,t_1)$ и $z(x_1,t_1)p(x_1,t_1)q(x_1,t_1)=0$. Такое равенство возможно только если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Но из (24) следует, что $z(x_1,t_1)>0$, из (25) имеем $q(x_1,t_1)>0$ и из (26) $p(x_1,t_1)>0$. Следовательно наше предположение было неверно, а значит неравенства (18) и теорема 2 доказаны.

Перейдем к исследованию обратной задачи. Дадим определение ее решения.

Определение. Множество функций $\{F(x),u(x,t),a(x,t),v(x,t)\}$ называется решением обратной задачи (1)-(5),(8), если $F(x)$ удовлетворяет условиям (17), $u,a,v\in C^1(Q_T)$ и $F(x)$, $u(x,t),a(x,t),v(x,t)$ удовлетворяют (1)-(5), (8).

Для этой обратной задачи справедлива следующая теорема единственности решения.

Теорема 3. Пусть функция $\mu(t)$ удовлетворяет условиям (6) и $Tc_1(\lambda+\beta)(1+e^{c_1\beta T})<1$. Если $\{F_i(x),u_i(x,t),a_i(x,t),v_i(x,t)\}$, $i=1,2$ – решения обратной задачи (1)-(5),(8), то $F_1(x)=F_2(x)$ для $x\in[0,l]$ и $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, $a_1(x,t)=a_2(x,t)$, $v_1(x,t)=v_2(x,t)$ в Q_T.

Доказательство. Если $F_i(x)$, $\{u_i(x,t),a_i(x,t),v_i(x,t)\}$, $i=1,2$ – решения обратной задачи (1)-(5),(8), то

$$(u_i)_x+\alpha u_i=\alpha F_i(x)v_i,\quad (x,t)\in Q_T, \quad (27)$$

$$(a_i)_t=\beta(u_i-F_i(x)v_i),\quad (x,t)\in Q_T, \quad (28)$$

$$(v_i)_t+\gamma v_i=\gamma a_i+\lambda u_i-\lambda F_i(x)v_i,\quad (x,t)\in Q_T, \quad (29)$$

$$u_i(0,t)=\mu(t),\quad 0\le t\le T, \quad (30)$$

$$a_i(x,0)=v_i(x,0)=0,\quad 0\le x\le l. \quad (31)$$

Введем функции

$$q(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t),\qquad p(x,t)=a_1(x,t)-a_2(x,t),$$

$$w(x,t)=v_1(x,t)-v_2(x,t),\qquad z(x)=F_1(x)-F_2(x).$$

Из (27)-(31) следует, что функции $q(x,t), p(x,t), w(x,t)$ являются решением задачи

$$q_x + \alpha q = \alpha z(x) v_1 + \alpha F_2(x) w, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{32}$$

$$p_t = \beta q - \beta z(x) v_1 - \beta F_2(x) w, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{33}$$

$$w_t + B(x) w = \gamma p + \lambda q - \lambda z(x) v_1(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{34}$$

$$q(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{35}$$

$$p(x,0) = w(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{36}$$

где $B(x) = \gamma + \lambda F_2(x)$. Интегрируя уравнения (32),(33) с условиями (35),(36), мы получим

$$q(x,t) = \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,t) d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) w(\xi,t) d\xi,$$

$$p(x,t) = \beta \int_0^t q(x,\tau) d\tau - \beta z(x) \int_0^t v_1(x,\tau) d\tau -$$

$$-\beta F_2(x) \int_0^t w(x,\tau) d\tau.$$

Подставляя эти формулы в уравнение (34), мы получим следующее уравнение для функции $w(x,t)$

$$w_t + B(x) w = \alpha\beta\gamma \int_0^t \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,\tau) d\xi d\tau +$$

$$+\alpha\beta\gamma \int_0^t \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) w(\xi,\tau) d\xi d\tau - \beta\gamma z(x) \int_0^t v_1(x,\tau) d\tau -$$

$$-\beta\gamma F_2(x) \int_0^t w(x,\tau) d\tau - \lambda z(x) v_1(x,t) +$$

$$+\alpha\lambda \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,t) d\xi +$$

$$+\alpha\lambda \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) w(\xi,t) d\xi, \qquad (x,t) \in Q_T. \tag{37}$$

Интегрируя уравнение (37) с начальным условием (36) и меняя порядок интегрирования, мы получим следующее интегральное уравнение для функции $w(x,t)$

$$w(x,t) = \alpha \int_0^t \int_0^x B_2(x,t,\tau) \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) w(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$- \int_0^t B_1(x,t,\tau) F_2(x) w(x,\tau) d\tau + h(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{38}$$

где

$$B_1(x,t,\tau) = \frac{\gamma\beta}{B(x)}[1 - \exp\{-B(x)(t-\tau)\}],$$

$$B_2(x,t,\tau) = \lambda \exp\{-B(x)(t-\tau)\} + B_1(x,t,\tau),$$

$$h(x,t) = \alpha \int_0^t \int_0^x B_2(x,t,\tau) \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,\tau) d\xi d\tau -$$

$$- \int_0^t B_2(x,t,\tau) z(x) v_1(x,\tau) d\tau.$$

Используя резольвенту $R_1(x,t,\tau)$ ядра $-B_1(x,t,\tau)F_2(x)$, преобразуем уравнение (38) следующим образом

$$w(x,t) = h(x,t) + \int_0^t h(x,\tau) R_1(x,t,\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x B_3(x,\xi,t,\tau) w(\xi,\tau) d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t [R_1(x,t,\tau) \int_0^\tau \int_0^x B_3(x,\xi,\tau,\theta) w(\xi,\theta) d\xi d\theta] d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (39)$$

где $B_3(x,\xi,t,\tau) = \alpha \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) B_2(x,t,\tau)$. Изменив порядок интегрирования в последнем интеграле, входящем в уравнение (39) и введя функцию

$$B_4(x,\xi,t,\tau) = B_3(x,\xi,t,\tau) + \int_\tau^t R_1(x,t,\theta) B_3(x,\xi,\theta,\tau) d\theta,$$

мы получим интегральное уравнение для функции $w(x,t)$

$$w(x,t) = h(x,t) + \int_0^t h(x,\tau) R_1(x,t,\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x B_4(x,\xi,t,\tau) w(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in Q_T. \qquad (40)$$

Разрешив это уравнение при помощи резольвенты $R_2(x,\xi,t,\tau)$ ядра $B_4(x,\xi,t,\tau)$ и изменив порядок интегрирования в тройном интеграле, мы получим следующее представление для решения уравнения (40)

$$w(x,t) = h(x,t) + \int_0^t h(x,\tau) R_1(x,t,\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^x R_3(x,\xi,t,\tau) h(\xi,\tau) d\xi d\tau, \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (41)$$

где

$$R_3(x,\xi,t,\tau) = R_2(x,\xi,t,\tau) + \int_\tau^t R_2(x,\xi,t,\theta) R_1(\xi,\theta,\tau) d\theta.$$

Подставляя представление (41) для функции $w(x,t)$ в уравнение (32) и интегрируя полученное уравнение с условием (35), имеем

$$q(x,t) = \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,t) d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \int_0^t \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) R_1(\xi,t,\tau) h(\xi,\tau) d\tau d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} \left[\int_0^t \int_0^\xi R_3(\xi,\eta,t,\tau) h(\eta,\tau) d\eta d\tau \right] F_2(\xi) d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) h(\xi,t) d\xi, \qquad (x,t) \in Q_T. \tag{42}$$

Введем функции

$$R_4(x,\xi,t,\tau) = \int_\xi^x R_3(\eta,\xi,t,\tau) \exp\{-\alpha(x-\eta)\} F_2(\eta) d\eta,$$

$$R(x,\xi,t,\tau) = R_4(x,\xi,t,\tau) + \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) R_1(\xi,t,\tau).$$

Меняя порядок интегрирования в тройном интеграле, входящем в уравнение (42), получим

$$q(x,t) = \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,t) d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) h(\xi,t) d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \int_0^t R(x,\xi,t,\tau) h(\xi,\tau) d\tau d\xi, \qquad (x,t) \in Q_T. \tag{43}$$

Рассмотрим функцию

$$B_5(x,\xi,t,\tau) = \alpha \int_\xi^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\eta) B_2(\eta,t,\tau) d\eta -$$

$$- \exp\{-\alpha(x-\xi)\} F_2(\xi) B_2(\xi,t,\tau) +$$

$$+\alpha \int_\tau^t \int_\xi^x R(x,\eta,t,\theta) B_2(\eta,\theta,\tau) \exp\{-\alpha(\eta-\xi)\} d\eta d\theta -$$

$$- \int_\tau^t R(x,\xi,t,\theta) B_2(\xi,\theta,\tau) d\theta.$$

Подставляя выражение для функции $h(x,t)$ в уравнение (43) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$q(x,t) = \alpha \int_0^x \exp\{-\alpha(x-\xi)\} z(\xi) v_1(\xi,t) d\xi +$$

$$+\alpha \int_0^x \int_0^t B_5(x,\xi,t,\tau) z(\xi) v_1(\xi,\tau) d\tau d\xi, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Положив $t = T$ и использовав условие (8), мы получим однородное уравнение Вольтерра первого рода для функции $z(\xi)$

$$\int_0^x A(x,\xi,T) z(\xi) d\xi = 0, \tag{44}$$

где функция

$$A(x,\xi,T) = \exp\{-\alpha(x-\xi)\} v_1(\xi,T) + \int_0^T B_5(x,\xi,T,\tau) v_1(\xi,\tau) d\tau.$$

Докажем, что

$$A(x,x,T) = v_1(x,T) + \int_0^T B_5(x,x,T,\tau) v_1(x,\tau) d\tau > 0. \tag{45}$$

Из определения функций $B_5(x,\xi,t,\tau)$ и $R(x,\xi,t,\tau)$ следует, что

$$A(x,x,T) = v_1(x,T) + \int_0^T [-F_2(x) B_2(x,T,\tau) -$$

$$- \int_\tau^T F_2(x) R_1(x,T,\theta) B_2(x,\theta,\tau) d\theta] v_1(x,\tau) d\tau.$$

Рассмотрим функцию

$$A_1(x,x,T) = -F_2(x) \int_0^T B_2(x,T,\tau) v_1(x,\tau) d\tau -$$

$$-F_2(x) \int_0^T \int_\tau^T R_1(x,T,\theta) B_2(x,\theta,\tau) d\theta v_1(x,\tau) d\tau.$$

Из определения функции $R_1(x,t,\theta)$ следует оценка

$$|R_1(x,t,\theta)| \le c_1\beta \exp\{c_1\beta(t-\theta)\}.$$

Тогда

$$|A_1(x,x,T)| \le c_1(\lambda+\beta) T v_1(x,T)(1+e^{c_1\beta T})$$

Принимая во внимание условия теоремы, мы получим, что $A(x,x,T) > 0$. Следовательно уравнение (44) имеет единственное решение $z(x) = 0$ и $F_1(x) = F_2(x)$. Тогда из теоремы 1 имеем $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$, $v_1(x,t) = v_2(x,t)$ в Q_T и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1 . Денисов А.М., Туйкина С.Р. О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции // ДАН СССР, 1984, 276, N 1, С. 100-102.

2 . Lorenzi A., Paparoni E. An inverse problem arising in the theory of absorpsion // Applicable Analysis, 1990, 36, pp. 249-263.

3 . Ломоносова И.В., Чанов А.В. Обратные задачи определения характеристик ионитов по данным динамических экспериментов // Вестник МГУ, Сер.15, Вычислит. матем. и киберн. 1991, N 2, С. 36-42.

4 . Denisov A.M., Lamos H. An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics // J. Inverse Ill-Posed Problems, 1996, 4, N 3, pp. 191-202.