

В.С. Лапонин

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СОЛИТОНОВ.

Введение.

Одним из наиболее ранних наблюдений в нелинейной оптике, тесно связанным с понятием солитона, была самофокусировка оптических пучков в керровской среде [1,2]. Для теоретического анализа этого эффекта волновое уравнение в керровской (кубичной) среде – кубическое нелинейное уравнение Шредингера (далее НУШ) – было исследовано в 1964 г. для одного и двух поперечных измерений [3]. Было обнаружено, что двумерные самолокализованные решения кубического НУШ испытывают коллапс, что означает, что ширина пучка обращается в ноль на конечном расстоянии, так как двумерные солитоны динамически неустойчивы. Даже одномерные солитоны в сплошной нелинейной среде не всегда устойчивы и распадаются на нити (которые по сути являются солитонами высших порядков) вследствие поперечной модуляционной неустойчивости. В результате пространственные солитоны в керровской среде экспериментально могут наблюдаться только в схемах, в которых одно из двух поперечных направлений исключено, то есть дифракция подавлена в одном из направлений (например, в планарном волноводе).

Наиболее ранние наблюдения пространственных солитонов относятся к эксперименту 1974 г., в котором было найдено самоканалирование оптического пучка в сплошной среде [4]. Спустя 10 лет был получен тот же результат в экспериментах с использованием ориентационной нелинейности жидкости CS_2 (сероуглерод) в оптических волноводах [5]. Для подавления дифракции пучка в одном поперечном направлении жидкий сероуглерод размещался между двумя стеклянными пластинами, эффективно формируя планарный волновод. Эти эксперименты инициировали многочисленные наблюдения одномерных светлых пространственных солитонов в 1990-ых годах при использовании различных сред, таких как стекло, полупроводники и полимеры.

В ряде экспериментов [6-9] изучались взаимодействия солитонов при их столкновении. Как известно из теории, два однофазных солитона притягиваются, а противофазные отталкиваются. Более интересна ситуация для других значений относительной фазы солитонов, так как во

время неупругих столкновений возможен обмен энергией. Это свойство наблюдалось в эксперименте 1992 г. [7]. Когда разность фаз взаимодействующих солитонов была равна $(\pi/2)$, один из солитонов приобретал энергию за счет другого. Направление обмена энергией менялось на обратное, когда фаза составляла $(3\pi/2)$. Наблюдалось также слияние двух первоначально перекрывающихся пространственных солитонов, движущихся в различных направлениях.

Детализирование эффектов взаимодействия солитонов требует проведение математического моделирования физических экспериментов [10-17]. При этом возникает проблема развития эффективных численных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений [10-13]. В данной работе освещается вывод НУШ из уравнений Максвелла, а также получение аналитического решения НУШ в одномерном случае. Благодаря эффективному численному методу, представленному в работах [10-13], производится численное исследование пространственных солитонов и сравнение полученных численных результатов с аналитическим решением.

Нелинейность среды.

Основное уравнение, описывающее эволюцию излучения в нелинейной среде, известно как нелинейное уравнение Шредингера. Из уравнений Максвелла можно получить следующее волновое уравнение для напряженности электрического поля E , связанного со световой волной распространяющейся в такой среде:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где c – скорость света в вакууме, ϵ_0 – проницаемость вакуума. Поляризация среды P состоит из двух частей:

$$P(r, t) = P_{lin}(r, t) + P_{nl}(r, t),$$

где линейная P_{lin} и нелинейная P_{nl} части связаны с электрическим полем общими соотношениями [9]

$$P_{lin}(r, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t-t') E(r, t') dt', \quad (2)$$

$$P_{nl}(r, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) E(r, t_1) E(r, t_2) E(r, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$$

а $\chi^{(1)}$ и $\chi^{(3)}$ – тензоры восприимчивости первого и третьего порядков. Эти соотношения справедливы в электродипольном приближении для сред с локальным откликом. При этом пренебрегаются нелинейные

эффекты второго порядка, и предполагается, что среда имеет центр инверсии. Если нелинейный отклик предполагается мгновенным, так что временная зависимость $\chi^{(3)}$ описывается произведением трех дельта-функций $\delta(t-t_1)$, то (4) сводится к выражению

$$P_{nl}(r,t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} E(r,t)E(r,t)E(r,t). \quad (5)$$

Пусть P_{nl} является малым возмущением к P_{lin} . Предположив, что излучение сохраняет поляризацию на длине среды, можно использовать скалярное приближение. В приближении медленно изменяющейся огибающей полезно выделить быстро меняющуюся часть электрического поля, записав его в виде

$$E(r,t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E(r,t) \exp(-i\omega_0 t)], \quad (6)$$

где ω_0 – несущая частота, \hat{x} – единичный вектор поляризации поля и $E(r,t)$ – медленно изменяющаяся функция времени (в масштабе оптического периода). Компоненты P_{lin} и P_{nl} могут быть записаны в аналогичной форме. После подстановки (6) в (5) $P_{nl}(r,t)$ сводится к выражению

$$P_{nl}(r,t) \approx \varepsilon_0 \varepsilon_{nl} E(r,t), \quad (7)$$

где нелинейная составляющая диэлектрической проницаемости определена как

$$\varepsilon_{nl} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(r,t)|^2. \quad (8)$$

Согласно (2) $P_{lin} = \varepsilon_0 \chi_{xx}^{(1)} E$ и в результате линейная и нелинейная части могут быть объединены в следующее выражение для диэлектрической проницаемости [1-3]

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \chi_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{nl}, \quad (9)$$

Диэлектрическую проницаемость можно использовать для определения показателя преломления \tilde{n} и показателя поглощения $\tilde{\alpha}$, однако обе величины зависят от интенсивности, ввиду зависимости от ε_{nl} . Введем следующие величины:

$$\tilde{n} = n_0 + n_2 |E|^2, \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2, \quad (10)$$

Линейный показатель преломления n_0 и показатель поглощения α связаны с вещественной и мнимой частями $\chi_{xx}^{(1)}$. Используя соотношение $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{n} + i\tilde{\alpha}c / 2\omega_0)^2$ и уравнения (8), (9), получим следующие выражения

$$n_2 = \frac{3}{8n_0} \operatorname{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)}), \quad \alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4n_0 c} \operatorname{Im}(\chi_{xxxx}^{(3)}). \quad (11)$$

Нелинейная среда, в которой преобладает восприимчивость третьего порядка и уравнение (10) достаточно точно описывает нелинейный отклик, называется керровской.

Нелинейное уравнение Шредингера.

Зависимость показателя преломления от интенсивности существенно влияет на характер распространения электромагнитных волн. В случае пространственных солитонов можно ограничиться случаем пучка непрерывного излучения. Общее решение (1) записывается в виде (6) с $E(r,t) = A(r) \exp(i\beta_0 Z)$, где $\beta_0 = k_0 n_0 \equiv 2\pi n_0 / \lambda$ – постоянная распространения, выраженная через длину волны света $\lambda = 2\pi c / \omega_0$. Предполагается, что пучок распространяется вдоль оси Z и дифрагирует по поперечным направлениям X и Y , где X, Y, Z – пространственные координаты, составляющие r .

Когда в рассмотрение включены нелинейные и дифракционные эффекты и огибающая A является медленно изменяющейся функцией от Z с масштабом, много большим λ (параксиальное приближение), так что можно пренебречь второй производной $\frac{d^2 A}{dZ^2}$, то оказывается, что огибающая удовлетворяет следующему нелинейному параболическому уравнению [4,5]:

$$2i\beta_0 \frac{\partial A}{\partial Z} + \left(\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \right) + 2\beta_0 k_0 n_{nl}(I) A = 0. \quad (12)$$

В случае керровской нелинейности $n_{nl}(I) = n_2 I$, где n_2 – керровский коэффициент нелинейности среды. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{X}{\omega_0}, \quad y = \frac{Y}{\omega_0}, \quad z = \frac{Z}{L_d}, \quad u = (k_0 |n_2| L_d)^{1/2} A, \quad (13)$$

где ω_0 – поперечный масштаб, связанный с шириной пучка на входе, а L_d – дифракционная длина. В этих безразмерных переменных уравнение (12) принимает вид (2+1)-мерного НУШ:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu |u|^2 u = 0, \quad (14)$$

где $\nu = \pm 1$, а выбор знака зависит от знака нелинейного параметра n_2 , $n_2 < 0$ отвечает случаю самодефокусировки.

Размерность НУШ может меняться в зависимости от геометрии нелинейной среды. Для среды в виде планарного волновода излучение ограничено самим волноводом по одному из направлений. В отсутствие нелинейных эффектов пучок будет распространяться только по одному из

направлений. В этом случае решение уравнения (1) можно записать в виде (6), где

$$E(r, t) = A(X, Z)B(Y)\exp(i\beta_0 Z), \quad (15)$$

функция $B(Y)$ описывает амплитуду моды, а β_0 – соответствующая постоянная распространения. Используя те же преобразования, что и выше, получается одномерное НУШ

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu |u|^2 u = 0. \quad (16)$$

Выбору знака $\nu = \pm 1$ отвечают светлые и темные солитоны соответственно.

Аналитическое решение.

Рассмотрим случай, когда $n_{nl}(I) = n_2 I$, ($n_2 > 0$), с безразмерными переменными (13). Тогда НУШ примет вид

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(I)u = 0, \quad (17)$$

где $I = |u(x, z)|^2$ – интенсивность излучения и функция $F(I)$ характеризует нелинейные свойства среды, причем $F(0) = 0$. В случае керровской нелинейности $F(I) = I$ и уравнение (17) может быть точно проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния [3]. Односолитонное решение кубического НУШ имеет следующую общую форму:

$$u(x, z) = a \operatorname{sch}[a(x - Vz)] \exp[iVx + i(V^2 - a^2)z/2 + i\varphi] \quad (18)$$

где φ – произвольная фаза. Для пространственного солитона параметры a и V связаны, соответственно, с амплитудой и поперечной скоростью солитона.

Интегрируемое кубическое НУШ связано с бесконечным числом сохраняющихся величин, называемых интегралами движения. Первые три интеграла определяют мощность P , импульс M и гамильтониан H солитона [4-6]. Они определяются следующим образом:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dx, \quad M = i \int_{-\infty}^{\infty} (u_x^* u - u_x u^*) dx, \quad H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x|^2 - |u|^4) dx. \quad (19)$$

Чтобы найти солитоноподобные решения обобщенного уравнения (1), предположим, что оно имеет вид

$$u(x, z) = \Phi(x, \beta) \exp(i\beta z), \quad (20)$$

где β – постоянная распространения солитона ($\beta > 0$) и функция $\Phi(x, \beta) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. При двухстепенной конкурирующей нелинейности нелинейный член примет вид [1]

$$F(I) = \alpha I^p + \gamma I^{2p} \quad (21)$$

где α и γ – постоянные, выбранные так, чтобы обеспечить насыщение нелинейности с ростом интенсивности, $\alpha\gamma < 0$. Параметр p определяет форму нелинейности [1].

Подставив (20) и (21) в (1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для Φ [1], проинтегрировав которое, получим

$$\frac{d\Phi}{dx} = \left[\beta\Phi^2 - \frac{\alpha}{(p+1)}\Phi^{2p+2} - \frac{\gamma}{(2p+1)}\Phi^{4p+2} + C \right]^{1/2}, \quad (22)$$

где C – константа. Так как для светлого солитона должно выполняться условие $\Phi = 0$ и $d\Phi/dx = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, находим, что $C = 0$. Сделав замену переменных $\psi = \Phi^{-2p}$, проинтегрируем уравнение (22) и получим солитонное решение $u_s(x, z)$

$$u_s(x, z) = \left[\frac{A}{\text{ch}(Dx) + B} \right]^{1/(2p)} \exp(i\beta z), \quad (23)$$

где вещественные параметры A, B, D определены следующим образом

$$A = 2(p+1)B\beta / \alpha, \quad B = \nu \left[1 + \frac{3(1+p)^2 \gamma}{(1+2p)\alpha^2} \beta \right]^{-1/2}, \quad D = 2p\sqrt{2\beta}. \quad (24)$$

В частности при $p=1$, выражение (23) описывает светлые солитоны, связанные с кубическим НУШ. При $\alpha=1, \gamma=0, B=1, \nu=1$ солитонное решение можно записать в виде

$$u(x, z) = [A/2]^{1/(2p)} \text{sch}^{1/p}(Dx/2) \exp(i\beta z).$$

Оно сводится к светлomu солитону в керровской среде при $p=1$.

Численный метод.

Для применения итерационного метода М1 поиска солитонных решений, подробно описанного в работах [10-13], в уравнение (16) сделаем замену переменных $\xi = x - cz$ и получим следующее уравнение

$$-icu'(\xi) + \frac{1}{2}u''(\xi) + \nu |u(\xi)|^2 u(\xi) = 0. \quad (25)$$

Проинтегрировав последнее выражение по ξ , получим уравнение (26).

$$cu = -iu' + iv \int_{-L}^{\xi} (|u|^2 u)(p) dp. \quad (26)$$

Введем пространство сеточных функций H_N размерности N [10], состоящее из векторов $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$, $y_i = u(\xi_i)$ и снабженное скалярным произведением $(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h$, где $y, v \in H_N$. В дальнейшем будем обозначать H_N через H . Пусть решение на n -ой итерации представляется в виде вектора $y^n \in H$, где y_i^n – приближенное решение в i -ом узле сетки, $i = 1, 2, \dots, N$. Тогда y^0 – вектор начального значения, который определяется следующим образом $y_i^0 = u^0(\xi_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, где $u^0(\xi)$ – начальная финитная функция вида «домик» [13]. Численное решение уравнения (26) будем искать методом М1 по следующей схеме:

$$y_j^{n+1} = y_j^n - \tau \left(i \frac{(y_j^n - y_{j-1}^n)}{h} + iv \sum_{k=1}^j |y_k^n|^2 y_k^n h - c^n y_j^n \right), \quad (27)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где \bar{y}^0 – начальная функция, τ – итерационный параметр метода ($\tau = 10^{-5}$). Параметр точности ε задается изначально ($\varepsilon = 10^{-6}$). Фазовая скорость волны вычисляется по формуле

$$c^n = \frac{(L(\bar{y}^n), \bar{y}^n)}{(\bar{y}^n, \bar{y}^n)},$$

где L – разностная аппроксимация оператора правой части уравнения (26).

Критерий остановки итерационного процесса имеет вид:

$$|c^{n+1} - c^n| < \varepsilon |c^n|.$$

Приведем численные результаты получения односолитонного решения для НУШ с помощью итерационного метода М1. Рассмотрим задачу (16) на отрезке $[-100, 100]$ с числом точек разбиения $N = 2000$.

Численные эксперименты.

На рисунках 1, 2, 3 приведены графики, слева – численное (пунктирная линия) и аналитическое (сплошная линия) решения для $\nu = 1$, справа – абсолютная погрешность $\delta = |u^{an}(\xi_i) - y_i^{num}|$, после 20 000, 40 000 итераций метода и после выполнения критерия остановки метода соответственно.

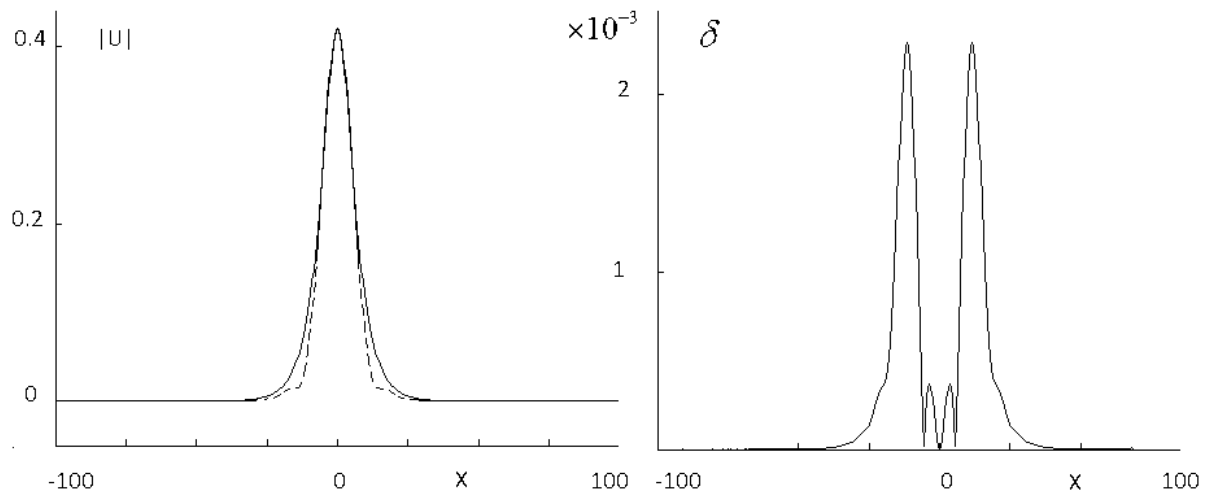


Рис. 1. Результат численного метода после 20 000 итераций.

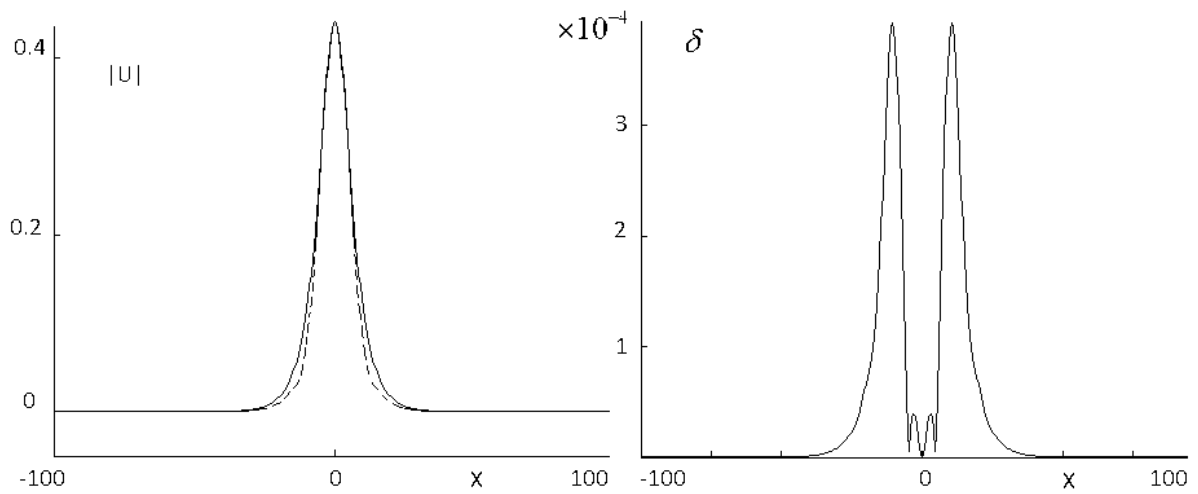


Рис. 2. Результат численного метода после 40 000 итераций.

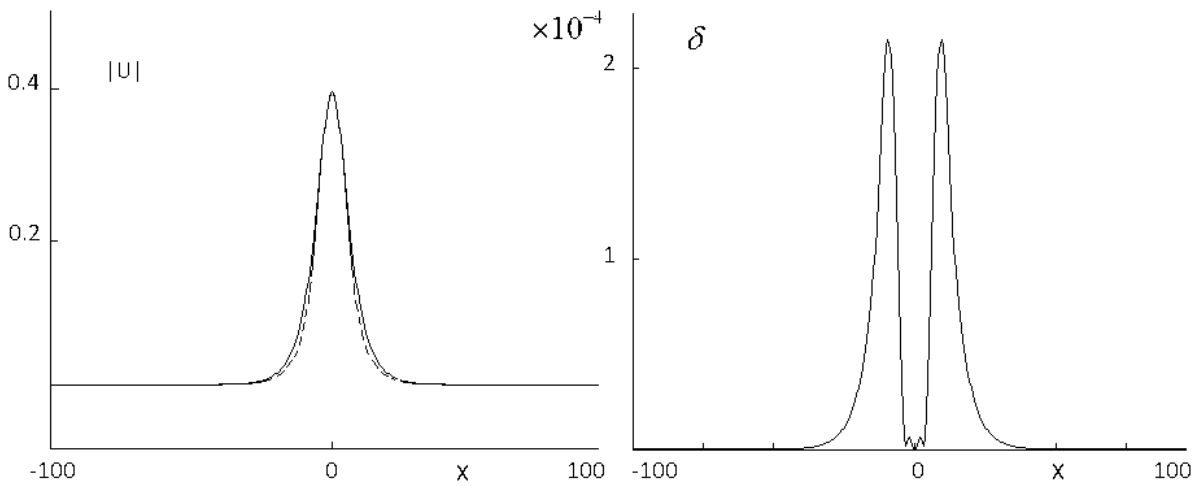


Рис. 3. Результат численного метода после выполнения критерия останова.

На рисунке 4 слева представлен график «темного» солитона, а справа абсолютная погрешность. Солитонные решения такого вида удается получить при $\nu = -1$.

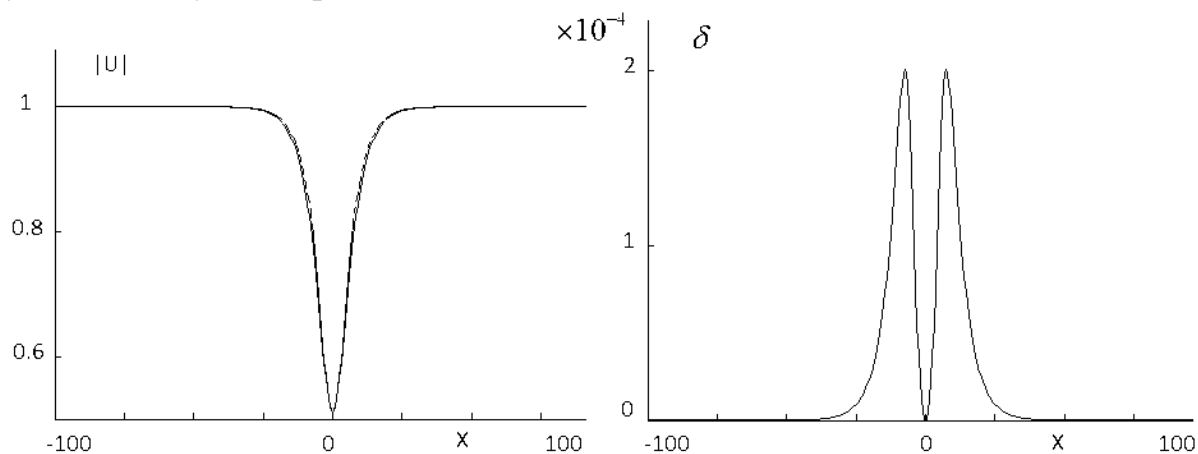


Рис. 4. Темный солитон.

Невязка полученного численного решения при $h = 0.1$ для светлого солитона оставляет $\psi = 3 \cdot 10^{-3}$, а для темного солитона $\psi = 5 \cdot 10^{-3}$. Программа завершила свою работу примерно за 12 минут. При уменьшении шага в 10 раз, невязки уменьшились до $\psi = 7 \cdot 10^{-4}$ и $\psi = 9 \cdot 10^{-4}$ соответственно, а время работы программы возросло до 2.5 часов.

Из полученных результатов видно, что итерационный метод поиска солитонных решений [10-13] прекрасно подходит для численного моделирования пространственных солитонов (как светлых, так и темных), которые описываются нелинейным уравнением Шредингера в среде с керровской нелинейностью. Сравнение полученных численных решений с аналитическим решением позволяет говорить о хорошей точности и достаточно быстрой сходимости метода.

Литература.

1. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005, 648с.
2. Hercher M. // Opt. Soc. Amer. 1964. V. 54. P. 563.
3. Kelley P.L. // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 1005.
4. Bjorkholm J.E., Ashkin A. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 129.
5. Barthelemy A., Maneuf S., Froehly C. // Opt. Commun. 1985. V. 55. P. 201.
6. Shalaby M., Barthelemy A. // Opt. Lett. 1991. V. 16. P. 1472.
7. Shalaby M., Reynaud F., Barthelemy A. // Opt. Lett. 1992. V. 17. P. 778.
8. Shih M., Chen Z., Segev M. et al. // Appl. Phys. Lett. 1996. V. 69. P. 4151.

9. Butcher P.N., Cotter D.N. The Elements of Nonlinear Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
10. Laponin V.S., Savenkova N.P., Il'utko V.P., Numerical method for soliton solutions // Computational Mathematics and Modeling, Consultants Bureau (United States), 2012, V. 23, № 3, P. 254-265.
11. Laponin V.S., Search for soliton solutions in the three-dimensional Gross-Pitaevskii equation // Computational Mathematics and Modeling, Consultants Bureau (United States), 2014, V. 25, № 3, P. 306-314.
12. Laponin V.S., Savenkova N.P., Search for 2-D solitons in Gross-Pitaevskii equation // Computational Mathematics and Modeling, Consultants Bureau (United States), 2014, V. 25, № 1, P. 1-8.
13. Savenkova N.P., Laponin V.S., A numerical method for finding soliton solutions in nonlinear differential equations // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics, 2013, V. 37, № 2, P. 49-54.
14. Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., Troshchiev Yu.V. Modeling of vortice objects created in gatchina discharge // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2012, V. 40(12), P. 3158–3161.
15. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Yu.V., Shuteev S.A., Skladchikov S.A., Vinke E.E., Gusein-zade N.G. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. II. The study of vortex formation process // Bulletin of the Lebedev Physics Institute, 2011, V. 38, P. 275-282.
16. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Shuteev S.A., Skladchikov C.A., Maslov A.K., Elensky V.G. Computer simulation of vortex self-maintenance and amplification // MOSCOW UNIVERSITY PHYSICS BULLETIN, 2013, V. 68, № 4, P. 317-319.