

*В.С. Лапонин, Н.П. Савенкова, В.П. Ильютко*

## **ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОИСКА СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ.**

Введение.

В настоящей работе под солитонным решением подразумевается уединенная волна, которая локализована в небольшой области, быстро стремится к нулю при удалении от области локализации, и профиль которой не изменяется с течением времени.

Как правило получить аналитическое решение солитонного вида не представляется возможным. Уравнение Кортевега-де Фриза (в дальнейшем это уравнение будем называть КдФ), описывающее распространение длинных волн на мелкой воде, имеет как  $N$ -солитонные решения, которые можно выписать в явном виде, так и несолитонные решения.

Практически для всех известных эволюционно-нелинейных уравнений для поиска солитонных решений приходится разрабатывать свои разностные схемы, учитывающие особенности уравнения.

В данной работе предлагается метод, который практически не зависит от вида нелинейного оператора, входящего в дифференциальное уравнение, и в этом смысле является универсальным методом.

Уравнение Кортевега-де Фриза занимает значимое место в теории нелинейных уравнений. Данное уравнение обладает рядом замечательных свойств, которые на данный момент изучены достаточно хорошо. Например, для КдФ существует бесконечное число законов сохранения. В работе [1] приводится строгое доказательство этого факта.

Исследуемый ниже итерационный метод М1 был разработан и применен для численного нахождения солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера, описывающего распространение фемтосекундных импульсов в нелинейной среде [2].

В данной работе метод М1 применяется для поиска солитонных решений уравнений Кортевега-де Фриза,  $\sin$ -Гордона и нелинейного уравнения Шредингера с кубической нелинейностью.

Уравнение Кортевега-де Фриза.

Рассматривается уравнение Кортевега-де Фриза вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 6u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u^3(x,t)}{\partial x^3} = 0, x \in R, t > 0, \quad (1)$$

с граничными условиями на бесконечности

$$u(+\infty, t) = 0, u'(+\infty) = 0, u''(+\infty, t) = 0, t > 0 \quad (2)$$

и при  $t = 0$  начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in R. \quad (3)$$

Согласно определению солитона [3] как симметричной конфигурации естественно считать, что выполняются следующие условия:

$$u(-\infty, t) = 0, u'(-\infty) = 0, u''(-\infty, t) = 0, t > 0.$$

Как говорилось ранее, характерной особенностью КдФ является то, что оно допускает  $N$ -солитонное решение ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ), которое ищется в виде бегущей волны [4]. Получить аналитический вид этого решения можно с помощью преобразования Хироты [1].

Отметим, что если  $u(x, t)$  решение уравнение КдФ, то функция

$$\tilde{u}(x, t) = C_1^2 u(C_1 x + 6C_1 C_2 t + C_3, C_1^3 t + C_4) + C_2$$

также является решением уравнения КдФ, где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные постоянные.

Покажем, как можно получить односолитонное решение (решение 1-ой моды). Введем переменную

$$\xi = x - ct,$$

где  $c$  – скорость солитона. Требуется не только найти солитонное решение, но и определить его скорость  $c$ , то есть фактически решить задачу с параметром. Учтем, что

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = u'(\xi)(-c),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = u'(\xi),$$

$$\frac{\partial u^3(x, t)}{\partial x^3} = u'''(\xi).$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\begin{aligned} -cu' + 6uu' + u''' &= 0, -\infty < \xi < +\infty, \\ u(+\infty) &= 0, u'(+\infty), u''(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (4), получим уравнение вида

$$\begin{aligned} -cu + 3u^2 + u'' &= C, -\infty < \xi < +\infty, \\ u(+\infty) &= 0, u'(+\infty), \end{aligned}$$

где  $C$  – произвольная константа. Учитывая стремление функции  $u(\xi)$  к нулю на бесконечности, приходим к выводу, что  $C = 0$ . Последнее

уравнение умножим на  $u'$  и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} -cu^2 + 2u^3 + (u')^2 &= C, -\infty < \xi < +\infty, \\ u(+\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, находим, что  $C = 0$ .

Решая последнее уравнение в явном виде, приходим к аналитическому виду солитонного решения 1-ой моды уравнения (1)

$$u(x,t) = \frac{c}{2} ch^{-2} \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct + \delta) \right), \quad (5)$$

здесь  $\delta$  – сдвиг фазы. Данное решение называется одиночным солитоном для уравнения КдФ.

Используя метод Хироты, можно получить N-солитонное решение данного уравнения (1). Выпишем двухсолитонное решение, определенное по методу Хироты,

$$u(x,t) = \frac{\partial^2 \ln(1 + B_1 e^{\theta_1} + B_2 e^{\theta_2} + AB_1 B_2 e^{\theta_1 + \theta_2})}{\partial x^2},$$

где  $A = \left( \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \right)^2$ ,  $\theta_i = c_i(x - c_i^2 t) + \delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , здесь  $c_1, c_2$  – скорости первой и второй волны соответственно,  $B_1, B_2$  – произвольные постоянные.

Как отмечалось выше, уравнение КдФ имеет решения несолитонного вида (не рассматриваются в данной статье). Например, простым дифференцированием можно проверить, что

$$u(x,t) = \frac{6x(x^3 - 24t)}{(x^3 + 12t)^2}$$

удовлетворяет уравнению КдФ, но не является решением солитонного вида.

### Предварительные преобразования.

В этом пункте преобразуем уравнение (1) к необходимому виду предлагаемого численного метода.

Дифференциальное уравнение КдФ будем решать разностным методом на конечном отрезке. Поэтому для перехода к разностной задаче (итерационному методу) учтем, что по определению солитонного решения как быстро убывающей функции, не ограничивая общность рассуждений, можно взять достаточно большой отрезок  $[-L, L]$  и заменить граничные условия  $u(-\infty) = u(+\infty) = 0$  задачи (1)-(3) на условия  $u(-L) = u(L) = 0$  для разностной задачи. Далее разобьем отрезок  $[-L, L]$  на  $N$  одинаковых частей

и введем шаг  $h$  по  $\xi$ , равный  $\frac{2L}{N}$ .

Введем пространство сеточных функций  $H_{N-1}$  размерности  $(N-1)$ , состоящее из векторов  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$  и снабженное скалярным произведением  $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ , где  $y, v \in H_{N-1}$ . В дальнейшем будем обозначать  $H_{N-1}$  через  $H$ . Аппроксимируем вторую производную оператором  $\Lambda$ , т. е.  $(\Lambda y)_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, i = 1, 2, 3, \dots, N-1, y_0 = y_N = 0$ .

Пусть решение на  $n$ -ой итерации представляется в виде вектора  $y^n \in H$ , где  $y_i^n$  – приближенное решение в  $i$ -ом узле,  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Тогда  $y^0$  – вектор начального значения, который определяется следующим образом:  $y_i^0 = u_0(\xi_i), i = 0, 1, \dots, N$ , где  $u_0(\xi)$  – начальная функция, которая берется в виде определенной финитной функции.

Введя переменную

$$\xi = x - ct,$$

перейдем к уравнению

$$\begin{aligned} -cu' + buu' + u''' &= 0, -\infty < \xi < +\infty, \\ u(+\infty) &= 0, u'(+\infty), u''(+\infty) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $c$  – скорость распространения волны.

Для применения итерационного метода в уравнении (6) сделаем следующие преобразования: внесем функцию  $u(\xi)$  под производную, и рассуждая так же, как в предыдущем пункте, получим

$$\begin{aligned} -cu + 3u^2 + u'' &= C, -L < \xi < L, \\ u(-L) &= u(L) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

**Применение метода М1 для поиска солитонных решений уравнения КдФ.**

Применим алгоритм итерационного метода М1 из [2] к уравнению (7). Поиск численного решения уравнения (7) проводится по следующей схеме :

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \tau(3(y_i^n)^2 + (\Lambda y^n)_i), i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c^{n+1} &= \frac{1}{\tau} \left( \frac{(y^{n+1}, y^n)}{(y^n, y^n)} - 1 \right), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $y_0$  – произвольная начальная финитная функция,  $\tau$  – итерационный параметр метода. Параметр точности  $\varepsilon$  задается изначально.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие :

$$\left| \frac{c^{n+1} - c^n}{c^n} \right| < \varepsilon.$$

В результате получаем вектор решения  $y^n$  и скорость  $c^n$  движения солитонного решения.

Приведем численные результаты получения солитонного решения для уравнения КдФ с помощью итерационного метода М1. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическим решением уравнения КдФ.

Рассмотрим задачу на отрезке  $[-100,100]$ , т. е.  $L=100$ , число точек разбиения  $N=400$ . В качестве начального значения возьмем одну из финитных функций  $u_0(\xi)$  на отрезке  $[-L,L]$ , изображенных на рисунке 1, где отрезок  $[-L_0, L_0]$  носитель финитной функции  $u_0(\xi)$ . Эксперименты показали, что в независимости от того, какую финитную функцию мы возьмем в качестве начального приближения, метод М1 будет сходиться к аналитическому виду солитонного решения.

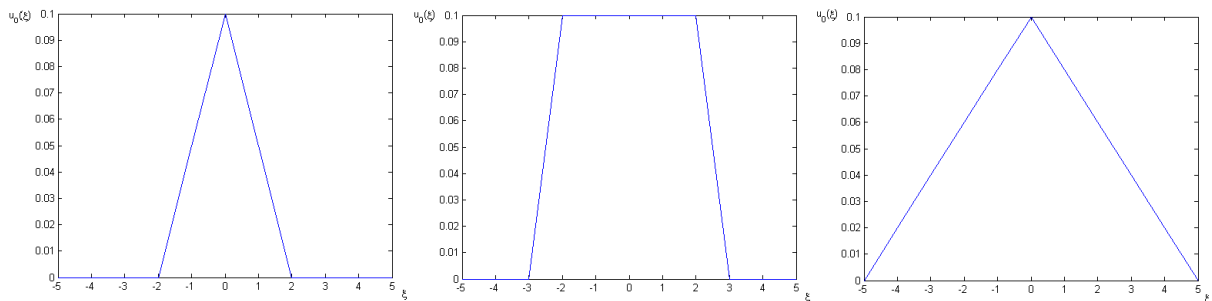


Рис. 1

Обратим внимание, что амплитуда  $A$  (максимум) решения в два раза меньше скорости  $c$  распространения волны. Действительно, максимум функции (5) достигается при  $x - ct + \delta = 0$  и равен  $\frac{c}{2}$ . С помощью итерационного метода М1 получаем численное решение в узлах сетки разбиения и скорость движения волны. По этим параметрам, максимум решения и скорости, можно построить аналитическое решение.

На рисунке 2 приведены графики численного (непрерывная линия) и

аналитического (пунктирная линия) решений уравнения КдФ, а на рисунке 3 изображена соответствующая погрешность численного решения  $\Delta = |u^{an}(\xi_i) - u_i^{num}|$ .

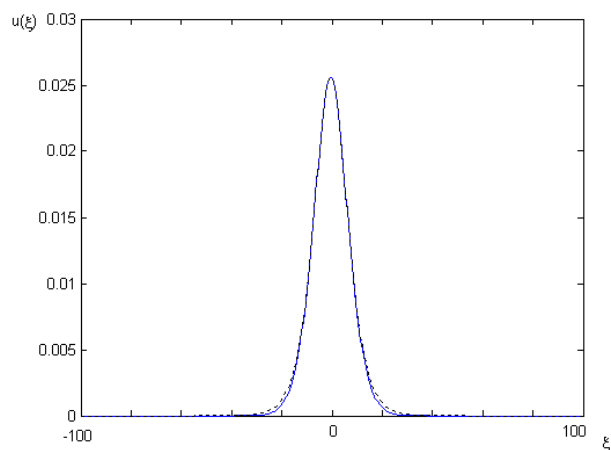


Рис. 2

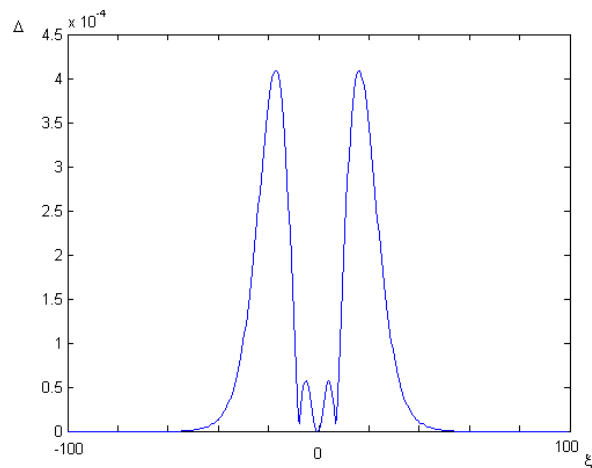


Рис. 3

На рисунке 4 изображен процесс формирования солитона, то есть результаты метода М1 после 1,2,3,4 миллионов итераций, пунктирной линией изображено аналитическое решение.

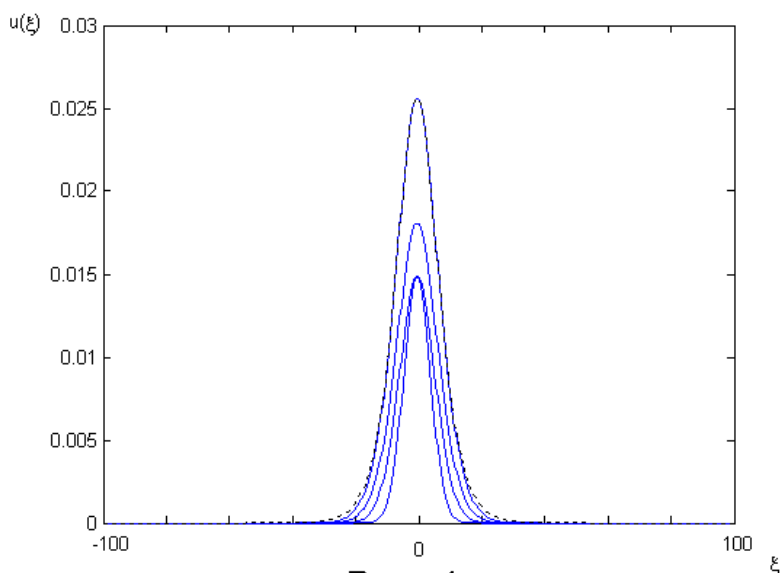


Рис. 4

На рисунке 5 приведены графики солитонного решения второй моды.

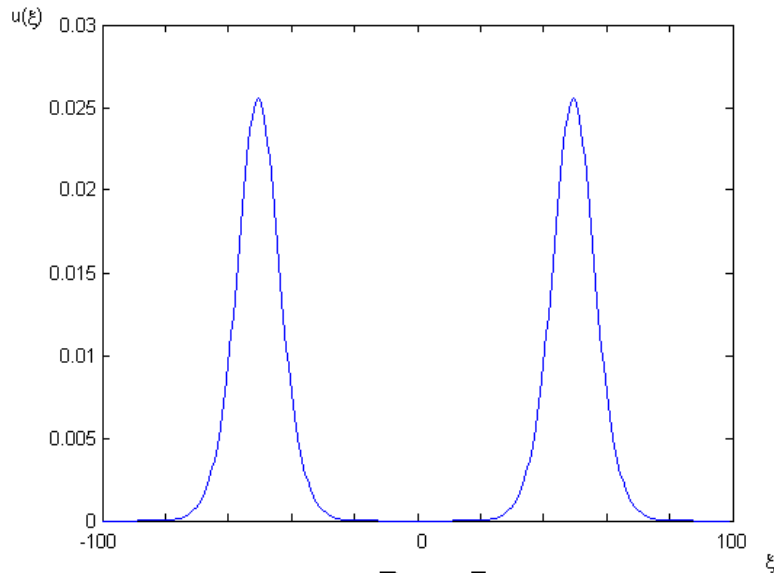


Рис. 5

При разбиении отрезка  $L = [-100, 100]$  на 400 частей метод сходился примерно за 4 000 000 итераций с погрешностью  $4 \cdot 10^{-4}$ , время работы метода примерно 2 минуты. При разбиении этого же отрезка на 800 частей метод сходился примерно за 15 000 000 итераций с погрешностью  $1 \cdot 10^{-4}$ , время работы метода примерно 17 минут. Таким образом, численные решения уравнения (7) методом М1 показали, что

1. Итерационный метод М1 сходится к солитонным решениям различных мод.
2. Сходимость метода М1 слабо зависит от вида начальной функции.
3. Для решения прикладных задач на мелкой сетке требуется большая вычислительная мощность.

### Уравнение sin-Гордона.

Рассмотрим уравнение sin-Гордона вида

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b \sin(cu(x, t)), \quad (9)$$

где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Данное уравнение допускает решение в виде бегущей волны. Выпишем аналитическое решение данного уравнения при значении параметров  $a = 1, b = 1, c = 1$  с граничными условиями на бесконечности

$$u'_x(\pm\infty, t) = 0, u'_t(\pm\infty, t) = 0.$$

Односолитонное аналитическое решение уравнения (9) имеет вид

$$u(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left( e^{\gamma(x-ct)+\delta} \right), \gamma^2 = \frac{1}{1-c^2},$$

здесь  $c$  – скорость движения волны,  $\delta$  – произвольная постоянная.

Решения такого вида называются кинками, так как они описывают "перескок" переменной  $u(x, t)$  из одного стационарного состояния  $u(x, t) = 0$  в другое  $u(x, t) = 2\pi$  при положительном  $\gamma$ . При отрицательном  $\gamma$  получается солитонное решение вида антикинк.

Дифференциальное уравнение sin-Гордона будем решать методом М1 на конечном отрезке. Далее аналогичным образом, как и в уравнении КдФ, применим М1 к уравнению (9). Заменяем граничные условия  $u(-\infty) = u(+\infty) = 0$  задачи (9) на условия  $u(-L) = u(L) = 0$  для разностной задачи. Разобьем отрезок  $[-L, L]$  на  $N$  одинаковых частей и введем шаг  $h$  по  $\xi$ , равный  $\frac{2L}{N}$ .

Сделаем замену переменных типа бегущей волны

$$\xi = x - ct,$$

учтем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = u'(\xi)(-c), \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= u''(\xi)(-c)(-c) = c^2 u''(\xi), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = u'(\xi), \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= u''(\xi). \end{aligned}$$

Получим следующее уравнение :

$$c^2 u'' = u'' + \sin u,$$

далее домножим правую и левую части на  $u$



$$(c^2 - 1)uu'' = u \sin u,$$

сделаем замену  $\omega = \frac{1}{c^2 - 1}$  и получим уравнение :

$$\begin{aligned} \omega u &= \frac{u}{\sin u} u'', \\ u(-L) &= u(L) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Итерационный метод М1 для уравнения sin-Гордона.

Численное решение уравнения(10) проводится по следующей схеме:

$$y_i^{n+1} = y_i^n + \tau \cdot \frac{y_i^n}{\sin y_i^n} \cdot \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2}, i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \omega^{n+1} &= \frac{1}{\tau} \left( \frac{(y^{n+1}, y^n)}{(y^n, y^n)} - 1 \right), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $y_0$  – начальная функция,  $\tau$  – итерационный параметр метода. Параметр точности  $\varepsilon$  задается изначально. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие :

$$\left| \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\omega^n} \right| < \varepsilon.$$

Приведем численные результаты получения солитонного решения для уравнения sin-Гордона с помощью итерационного метода М1. Проведено сравнение полученных результатов с аналитическим решением уравнения sin-Гордона.

Рассмотрим задачу на отрезке  $[-100, 100]$  с числом точек разбиения  $N = 400$ . В качестве начального значения возьмем финитную функцию  $u_0(\xi)$  на отрезке  $[-L, L]$  (см. рисунок 6), где отрезок  $[-L_0, L_0]$  – носитель финитной функции  $u_0(\xi)$ . На рисунке 7 изображено аналитическое односолитонное решение уравнения sin-Гордона вида кинк построенное по точкам.

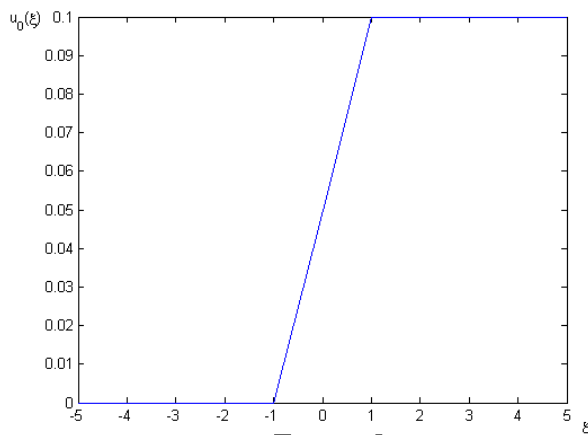


Рис. 6

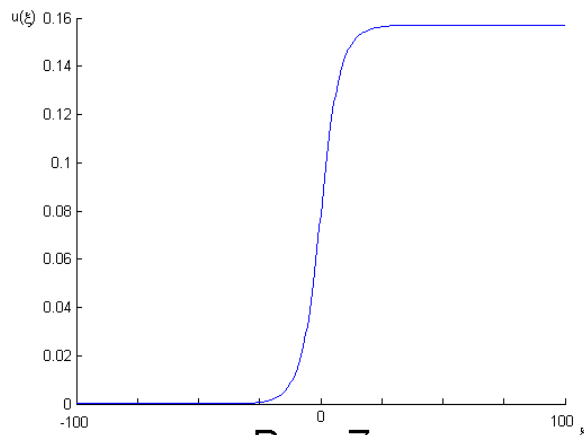


Рис. 7

На рисунке 8 приведены графики численного (пунктирная линия) и аналитического (непрерывная линия) решений уравнения  $\sin$ -Гордона, а на рисунке 9 изображена соответствующая погрешность численного решения  $\Delta = |u^{an}(\xi_i) - u_i^{num}|$ .

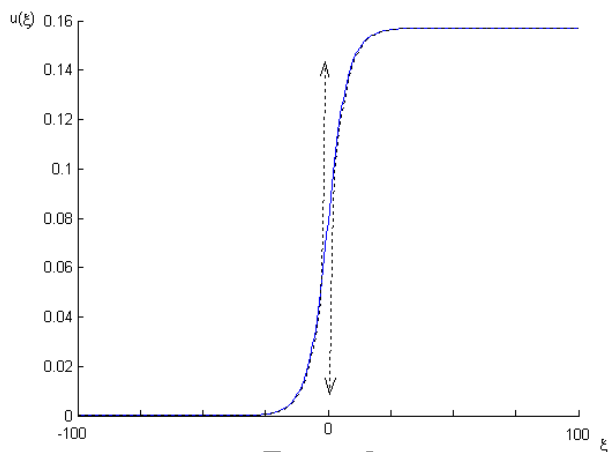


Рис. 8

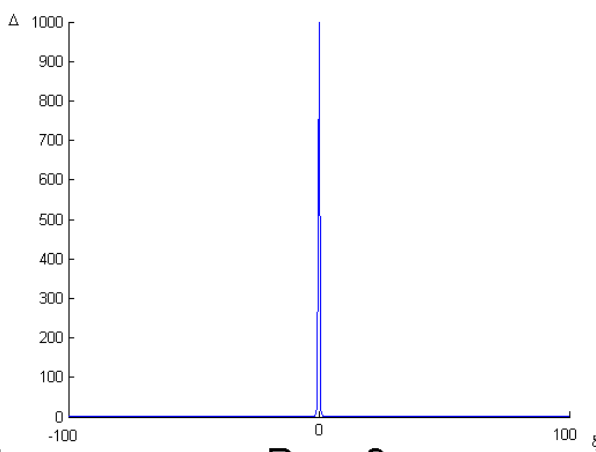


Рис. 9

Данный итерационный метод обрабатывал примерно 300 000 итераций, время работы метода примерно 20 секунд. Следует отметить, метод плохо подходит для поиска солитонных решений в уравнении  $\sin$ -Гордона, так как численное решение в окрестности 0 терпит разрыв второго рода, но это исключительная особенность применения метода M1 к уравнению (9). Если же доопределить численное решение в окрестности 0 такими значениями, чтобы решение было непрерывно, то метод сходится. Как видно из рисунка 8, численное и аналитическое решения достаточно сильно разнятся в окрестности 0, что подтверждает рисунок 9, на котором изображена погрешность.

Нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (далее НУШ) вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2} + \nu u^3(x,t) = 0, \quad (12)$$

где  $\nu > 0$ .

Действуя по аналогии с уравнениями КдФ и sin-Гордона, сделаем замену в виде бегущей волны  $\xi = x - ct$ . Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = u'(\xi)(-c), \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = u'(\xi), \\ \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2} &= u''(\xi), \end{aligned}$$

получим следующее уравнение:

$$-cu'(\xi) + u''(\xi) + \nu u^3(\xi) = 0.$$

Проинтегрируем по  $\xi$  и получим нужную запись уравнения:

$$cu = u' + \frac{\nu}{4} u^4. \quad (13)$$

Далее применим итерационный метод М1 к уравнению (13).

Применение итерационного метода М1 к нелинейному уравнению Шредингера.

Численное решение уравнения(13) проводится по следующей схеме:

$$\begin{aligned} y_i^{n+1} &= y_i^n + \frac{\tau}{h}(y_i^n - y_{i-1}^n) + \frac{\tau\nu}{4}(y_i^n)^4, i = 1, 2, \dots, N-1, \\ c^{n+1} &= \frac{1}{\tau} \left( \frac{(y^{n+1}, y^n)}{(y^n, y^n)} - 1 \right), \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $y_0$  – начальная функция,  $\tau$  – итерационный параметр метода. Параметр точности  $\varepsilon$  задается изначально. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\left| \frac{c^{n+1} - c^n}{c^n} \right| < \varepsilon.$$

Приведем численные результаты получения солитонного решения для НУШ с помощью итерационного метода М1. Рассмотрим задачу на отрезке  $[-100, 100]$ , число точек разбиения  $N = 400$ . В качестве начального значения возьмем финитную функцию  $u_0(\xi)$  на отрезке  $[-L, L]$  (см. рисунок 10), где отрезок  $[-L_0, L_0]$  – носитель финитной функции  $u_0(\xi)$ .

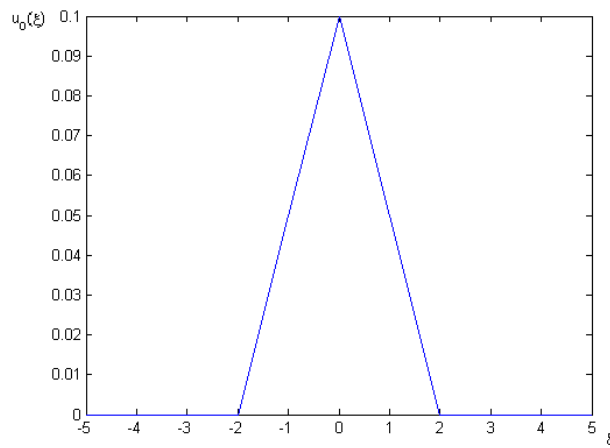


Рис. 10

Далее приведены результаты работы итерационного метода М1. На рисунках 11 и 12 представлены численные решения уравнения (12) для  $\nu = 4$  и для  $\nu = 8$  соответственно.

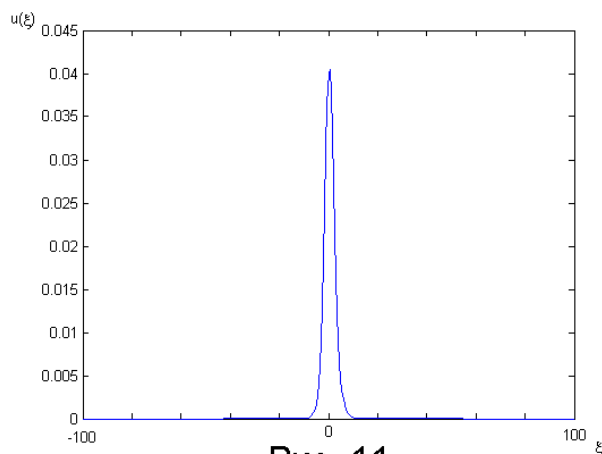


Рис. 11

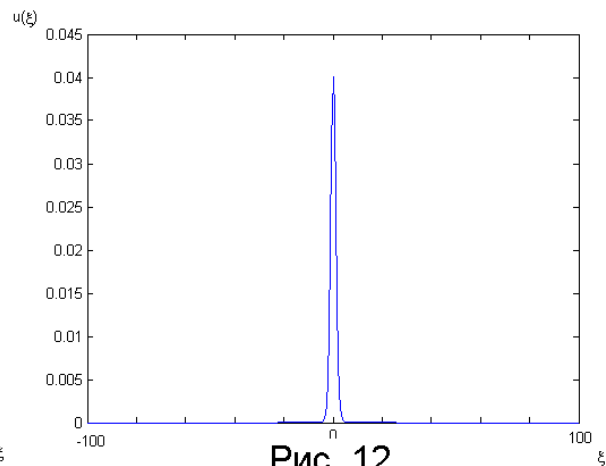


Рис. 12

Время работы метода заняло около 2 минут, количество итераций – 2,5 миллиона. Так как для уравнения (13) неизвестен аналитический вид

солитонного решения, то мы можем только вычислить невязку. В данном случае невязка полученного численного решения не превышает  $5 \cdot 10^{-3}$ . Отметим, что в ходе итерационного процесса на каждом шаге производится вычисление площади под графиком, начиная с некоторой итерации, площадь перестает возрастать и сохраняется далее до момента прекращения работы метода, что подтверждает выполнение первого закона сохранения для полученного численного решения.

### Заключение.

Итерационный метод М1 поиска солитонных решений нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений достаточно хорошо себя зарекомендовал в случае применения его к уравнениям КдФ, sin-Гордона и НУШ. Проведенные численные эксперименты показали, что метод М1 в случае сходимости позволяет получить исключительно решение солитонного вида одновременно с вычислением скорости движения солитона.

### Литература.

1. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. //J.Math.Phys. 1968. V.9.P.1204-1209.
2. Дорохова Т.В., Савенкова Н.П., Трофимов В.А. Численное моделирование солитонных решений в задаче распространения фемтосекундного импульса в среде с кубической нелинейностью// Прикладная математика и информатика, сборник факультета ВМК, 1999. №2, С. 63-68.
3. Шелковников Н.К. Солитоны в жидкости // Нелинейные процессы в динамических системах. 2009. №2, Т.3. С.17-26.
4. Мива Т., Джимбо М., Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. Москва, МЦНИО, 2005.