В.С. Лапонин, С.А. Складчиков, Н.П. Савенкова

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ

Введение.

Воды Мирового океана постоянно находятся в движении [1–4]. На берег то набегают, то откатываются волны. Главной причиной возникновения волн является ветер [4]. Обычно высота волн не превышает 4 м. Наивысшие волны более 20 м порождаются штормовыми ветрами. Крупнейшая из ветровых волн высотой 34 м (это высота 10-этажного дома) была замечена в центральной части Тихого океана в 1933 г. Когда ветер слабеет, высокие волны меняются рябью [2]. Чем сильнее и длительнее ветер и больше водное пространство, тем выше волны.

Волны выполняют разрушительную и созидательную работу. В одних местах они с силой бьют о берег, разрушая горные породы, которыми он составлен. На берегах Черного моря сила удара волны может достигать 25т на 1м^2. Не всякая постройка выдержит такой натиск. При этом вода поднимается вверх на высоту до 60м. При шторме волны способны перемещать камни весом в несколько тонн. Кроме того, волны перемешивают воду, способствуют обогащению ее кислородом и теплом. Это способствует жизнедеятельности организмов в Океане.

Иногда причиной образования волн становятся подводные землетрясения и извержения вулканов. Они вызывают огромные волны – цунами, которые распространяются во все стороны от места возникновения и охватывают всю толщу воды от дна до поверхности. Цунами катятся через весь океан со скоростью реактивного самолета – более 700км/ч. Эти волны такие мощные, что достигая берегов, отражаются от них и трогаются в обратном направлении. Высота цунами в открытом океане невелика – до 1м при длине волны 200км. Все меняется с ее приближением к берегу. Перед цунами море, обнажая дно, отходит от берегов на сотни метров, будто для разбега. А потом стремительно накатывается волна. Зажата берегами в узкой гавани, она вырастает до 20–30м. Вот почему дословно японское слово "цунами" переводится как "волна в гавани ". Стена воды цунами всей тяжестью обрушивается на побережье. Она переворачивает судна, разрушает здания, а отступая, несет в океан все, что попадается на ее пути. Предотвратить ее невозможно, можно только заранее предупредить о приближении цунами, поэтому целью настоящей работы является численное моделирование возникновения и динамики развития ветровых волн под действием непрерывного ветра [5–8]. Также исследуются условия образований того или иного количества волн на поверхности в зависимости от начальных условий.

В силу ограниченности мощности даже современных многопроцессорных компьютеров, математическое моделирование образования и динамики нелинейных волн будем проводить в замкнутом кольцевом канале.

Математическая модель.

Для численного исследования формирования и динамики ветровых волн будем использовать трехмерную двухфазную математическую модель [5–8]. Рассмотрим систему уравнений газо гидродинамики в декартовой системе координат.

В основе предлагаемой модели находится многофазный подход. Предполагается, что в каждом малом элементарном объёме ΔV присутствует и воздух, и вода, при этом их смесь совокупно занимает объём целиком, ΔV_1 – для воздуха и ΔV_2 – для воды. В каждой точке объёма, занятого смесью, можно ввести макроскопические скорости для компонент смеси $\overrightarrow{v_m}$, также для каждой среды (компоненты смеси) вводится параметр α_m – объёмная доля фазы (или объёмное содержание фазы): $\alpha_1 = \dfrac{\Delta V_1}{\Delta V}, \quad \alpha_2 = \dfrac{\Delta V_2}{\Delta V_2}$, при этом $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Здесь и далее переменные с индексом $m=1$ относятся к среде воздуха, с индексом 2 – к среде воды.

Основными неизвестными являются: скорости движения сред воздуха и воды $\overrightarrow{v_m} = (u_m, v_m, w_m), m = 1,2$; объёмные доли воздуха α_1 и воды α_2. Уравнение неразрывности с учетом вышесказанного будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \alpha_m \rho_m}{\partial t} + div(\alpha_m \rho_m \overrightarrow{v_m}) = 0,$$

где ρ_m – плотность m-ой фазы, которая является постоянной. Для описания изменения импульса в каждой точке рабочего пространства алюминиевого электролизёра используется уравнение Навье-Стокса, которое с учётом гипотезы модели выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \alpha_m \rho_m \overrightarrow{v_m}}{\partial t} + (\overrightarrow{v_m}, \vec{\nabla})(\alpha_m \rho_m \overrightarrow{v_m}) = -\alpha_m \nabla p + \mu_m \Delta \overrightarrow{v_m} + \alpha_m \rho_m \vec{g} + \overrightarrow{P_m},$$

где μ_m – вязкости среды, P_m – объёмная плотность силы трения (Стоксовой силы) между компонентами смеси за счёт вязких сил, которая определяется из соотношений:

$$\overrightarrow{P_1} = -\overrightarrow{P_2} = \alpha_1 \alpha_2 K \left(\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}\right), \text{ где } K = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 .$$

Для уравнения Навье-Стокса на границе области выполняется условие прилипания $\left.\overrightarrow{v_m}\right|_{\Gamma} = 0.$ Модель для поиска давления удобно получить путём сложения уравнений Навье-Стокса для двух фаз с учётом выполнения уравнения баланса:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\sum\limits_{m=1,2} \left(\dfrac{\alpha_m}{\rho_m} \right) \vec{\nabla} p \right) = \nabla \cdot \left(\vec{L} \right), \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} = \left(\vec{L} \right)_n \Big/ \sum\limits_{m=1,2} \left(\dfrac{\alpha_m}{\rho_m} \right), \end{cases}$$

где

$$\vec{L} = \sum_{m=1,2} \begin{pmatrix} (\overrightarrow{v_m}, \vec{\nabla})(\alpha_m \overrightarrow{v_m}) + \dfrac{\alpha_m \mu_m}{\rho_m} \Delta \overrightarrow{v_m} + \alpha_m \vec{g} \\ + \dfrac{1}{\rho_m} \sum\limits_{m \neq n} \alpha_m \alpha_n \left(\alpha_m \mu_m + \alpha_n \mu_n \right) \left(\overrightarrow{v_m} - \overrightarrow{v_n} \right) \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 изображено начальное распределение воды (среда снизу) и воздуха (среда сверху) в системе.

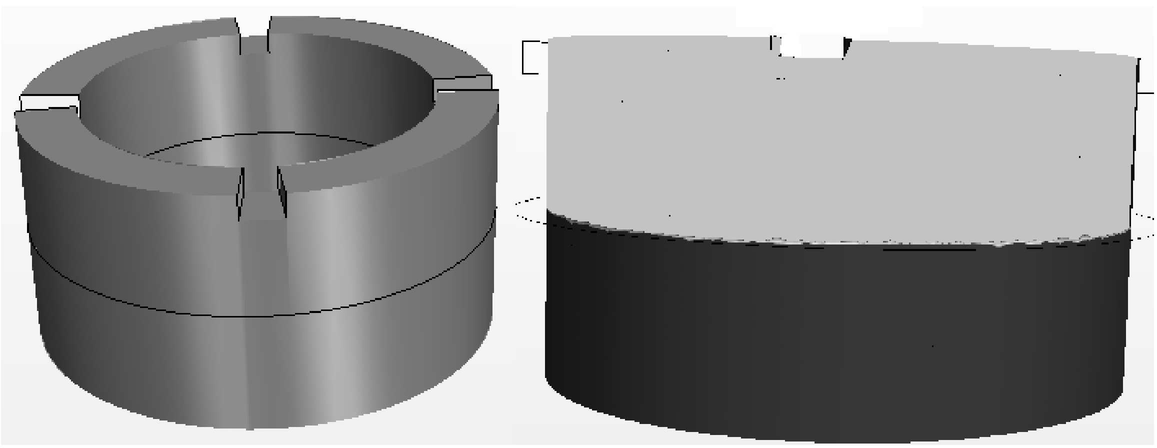

Рис. 1. Геометрия расчетной области и начальное распределение воды и воздуха.

На рисунке представлена геометрия расчетной области, на которой модельно представлены 4 источника ветра в качестве прямоугольных вырезов в расчетной области с с размерами 200мм на 200мм. Канал имеет радиус 1м, ширина канала 200мм, высота канала 600мм, изначально 300мм с водой и 300 мм с воздухом. В начальный момент времени скорости в воде и воздухе равны нулю, а граница раздела сред находится посередине канала. $U_{a,w}(t=0) = V_{a,w}(t=0) = W_{a,w}(t=0) = 0.$ Граничные условия $V_{inlet} = 5$ м/с (скорость ветра), $P_{outlet} = 0$ (давление на выходе). Изначально скорость ветра постоянна и поддерживается источниками, которые работают с одинаковой мощностью, но в дальнейших экспериментах мы будем менять мощность отдельных источников, вследствие чего скорость ветра будет изменяться.

Результаты численных экспериментов.

Задача решалась явным разностным методом Мак-Кормака второго порядка точности по пространству и времени [9]. Последовательная программа была перенесена на параллельные вычислительные комплексы с помощью библиотеки MPI [10]. Среднее время расчета на ПК с процессором Intel core i5, 4 Gb RAM составило порядка 2 недель, с учетом использования всех 4 ядер процессора. При использовании тестового кластера, включающего в себя 16 процессоров по 4 ядра в каждом, расчет производился за чуть более чем за сутки.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования образования и динамики нелинейных волн на поверхности жидкости при различных мощностях каждого из источников.

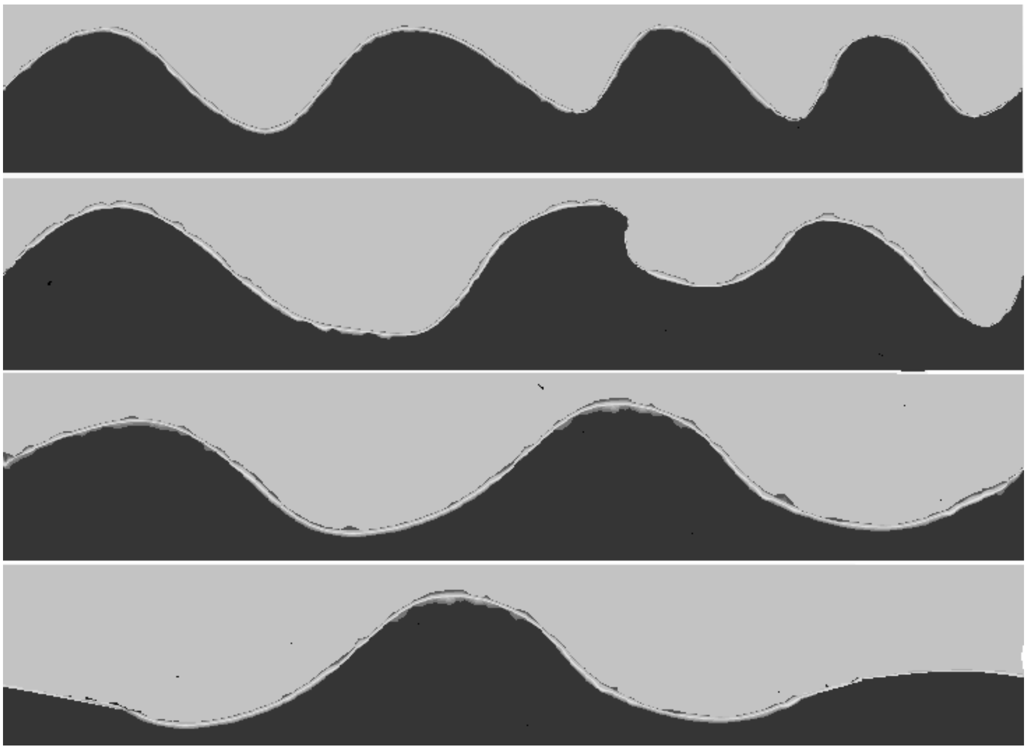

Рис.2. Формирование различного количества нелинейных волн в зависимости от вклада ветровых источников (кольцевой канал развернут в линию)

Из рисунка 2 видно, что в зависимости от мощности каждого из источников ветра образуется от одной до четырех устойчивых волн.

Представлены результаты численного моделирования образования и динамики нелинейных волн на поверхности жидкости при следующих условиях:

1. Все 4 источника ветра работают с одинаковой базовой мощностью. При таком начальном распределении мощностей источников ветра, образуются 4 нелинейных условно устойчивых конфигурации. Амплитуды и скорости этих волн примерно равны.
2. 1-ый источник ветра работает с базовой мощностью, 2-ой и 4-ый на 35% мощнее 1-го, а третий на 50% мощнее 1-го. При данном начальном распределении мощностей источников ветра, образуются 3 нелинейных условно устойчивых конфигурации, причем скорость и амплитуда у первой и второй волн больше чем у третьей примерно на 10%.
3. 1-ый и 3-ий источники ветра работают с базовой мощностью, 2-ой и 4-ый на 80% мощнее 1-го. В этом случае образуются 2 нелинейных условно устойчивых конфигурации. Аналогично со случаем образования трех волн, амплитуда и скорость второй волны отличается от первой приблизительно на 10%.
4. 1-ый источник ветра работает с базовой мощностью, 2-ой на 50% мощнее 1-го, третий на 100% мощнее 1-го и 4-ый на 75% мощнее 1-го. При таком начальном распределении мощностей источников ветра, образуется 1 нелинейная условно устойчивая конфигурация.

При детальном изучении численных результатов, полученных на промежуточных этапах формирования нелинейных волн, были обнаружены следующие факты. На поверхности воды образуются волновые движения, которые начинаются с очень малых капиллярных волн (волн ряби). Со временем амплитуда (высота h в несколько мм) и длина волны λ увеличиваются, причем амплитуда нарастает быстрее, чем λ. Когда эти волны достигают длины ~ 14 – 17 мм и крутизны h/λ ~ 0,12 – 0,15 ситуация меняется: увеличение длины волны λ идет быстрее, чем рост их амплитуды h, в результате чего их крутизна h/λ уменьшается. В таком состоянии волны ряби превращаются в гравитационные, обладающие совершенно другими свойствами, чем капиллярные: в формировании волнового движения существенную роль играет сила тяжести.

Движение частиц воды в гравитационной волне складывается из интенсивного орбитального и небольшого поступательного движения в направлении распространения волны (наподобие спирали), в результате происходит перенос воды в направлении распространения волны. При наличии ветрового воздействия на водную поверхность этот перенос усиливается, вследствие чего изменяется профиль волны: наветренный склон становится более пологим, а подветренный круче. На наветренном склоне такой волны под действием ветра снова возникают короткие волны, через посредство которых происходит передача энергии ветра этой волне, т.е. она усиливается: увеличиваются её амплитуда, а также длина.

В ходе численных расчетов формирования нескольких условно устойчивых нелинейных волн можно увидеть отрыв части волны от основной массы, что легко можно увидеть в природе, этот эффект изображен на рис. 3.

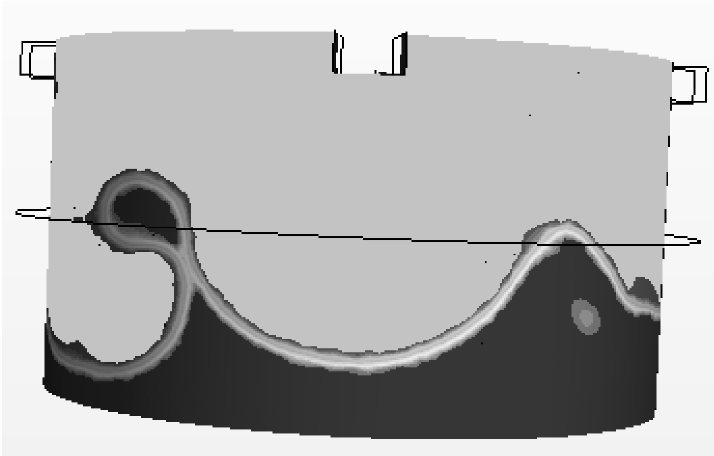

Рис. 3. Отрыв части волны от основной массы.

Также было установлено что, в подветренной части волн наблюдалось образование вихревых движений воздуха и воды, что наглядно изображено на рис. 4.

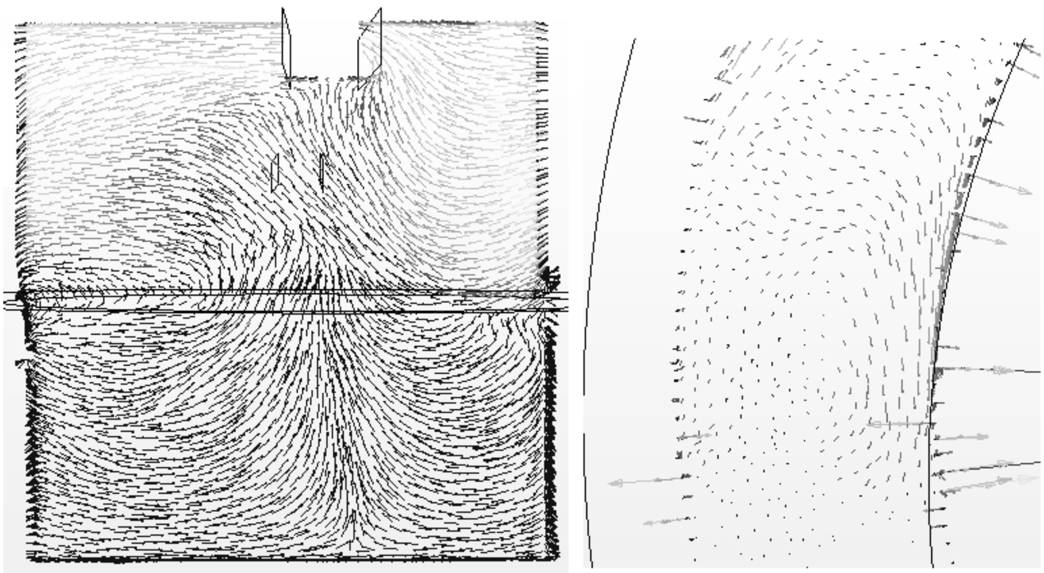

Рис. 4. Образование вихревых структур.

Таким образом, вышеприведенные качественные результаты моделирования адекватно описывают эволюцию ветровых волн, полученную из наблюдений в природе. Стоит отметить, что в ходе всех численных экспериментов было установлено, что физическое время жизни того или иного числа нелинейных условно устойчивых конфигураций всегда превышало время их формирования.

Заключение.

В настоящей работе проведено численное моделирование возникновения и динамики развития нелинейных волн в кольцевом канале с покоящейся жидкостью под действием непрерывного ветра. Ветер формируется несколькими распределенными по ширине канала источниками с разными мощностями. Были установлены условия формирования 1, 2, 3 и 4 условно устойчивых нелинейных волн в зависимости от мощностей каждого из источников, а также рассмотрен процесс их взаимодействия (слияния, отрыва капли, отталкивания). Полученные численные результаты соответствуют натурным наблюдениям, а также результатам, описанным в экспериментальных работах. Были получены поля скоростей для каждой из рассматриваемых фаз, исследуя которые, можно обратить внимание на вихревое происхождение нелинейных волновых образований, однако данный вопрос требует дальнейшего подробного исследования.

Литература.

1. Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987.
2. Степанянц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых потоках. Современные проблемы физики. М.: Физматлит, 1996.
3. Holthuijsen, L.H. (2007), «Waves in oceanic and coastal waters», Cambridge University Press, ISBN 0521860288.
4. Falkovich, Gregory (2011), «Fluid Mechanics (A short course for physicists)», Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-00575-4.
5. Математическое моделирование формирования уединенной волны на поверхности жидкости / Р. Кузьмин, В. Лапонин, Н. Савенкова, С. Складчиков // *Инженерная физика*. — 2014. — № 8. — С. 19–24.
6. *Savenkova N., Laponin V.* A numerical method for finding soliton solutions in nonlinear differential equations // *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. — 2013. — Vol. 37, no. 2. — P. 49–54.
7. Computer simulation of vortex self-maintenance and amplification / U. Yusupaliyev, N. Savenkova, S. Shuteyev et al. // *MOSCOW UNIVERSITY PHYSICS BULLETIN*. — 2013. — Vol. 68, no. 4. — P. 317–319.

8. Modeling of vorticle objects created in gatchina discharge / V. Bychkov, N. Savenkova, S. Anpilov, Y. V. Troshchiev // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2012. — Vol. 40, no. 12. — P. 3158–3161.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М. «Наука», 1989, 430с.
10. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. - Санкт-Петербург «БХВ-Петербург», 2002, 599с.