В.С. Левченков, Л.Г. Левченкова

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ИНДЕКСА СИЛЫ ИГРОКА В ВЕСОВЫХ СИСТЕМАХ ГОЛОСОВАНИЯ

Введение

Рассмотрим систему весового голосования (ВГ-схему), участники $V=\{a_1,...a_n\}$ которой наделены весами $v=\{v_1,v_2,...v_n\}$: целое положительное число v_i будем называть весом участника i [1]. Поддерживая некоторое предложение, участник i подает за него v_i голосов. Если сумма всех таких голосов будет не менее некоторого заданного целого числа Q (квоты ВГ-схемы), то это предложение будет принято. Квота Q удовлетворяет естественному условию, обеспечивающему однозначность в процессе принятия решений:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i < Q \le \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

Таким образом, задать ВГ-схему на V – значит определить пару $(v\,|\,Q)$, состоящую из n-мерного вектора весов v и квоты Q. Задание $(v\,|\,Q)$ позволяет построить множество mW минимальных выигрывающих коалиций (или сокращенно mW-*множество*)

$$mW=\{C\subset V:\ v(C)\ge Q\ \&\ \forall a\in C\quad v(C\setminus\{a\})<Q\}. \qquad (1)$$

В (1) введено специальное обозначение $v(C)$ для веса коалиции $C\subset V$ $v(C)=\sum_{a_i\in C} v_i$; в частности, индивидуальный вес участника i есть $v_i=v(\{a_i\})$.

Важным является также множество всех выигрывающих коалиций W,

$$W=\{C\subset V:\ v(C)\ge Q\}, \qquad (2)$$

а также множество ML максимальных проигрывающих коалиций,

$$ML = \{K \subset V : v(K) < Q \,\&\, \forall a \in V \setminus K \;\; v(K \cup \{a\}) \geq Q\}. \qquad (3)$$

Участник $a \in V$ называется *активным*, если существует коалиция $C \in mW$, содержащая a; в противном случае он называется *структурно пассивным*. Поскольку структурно пассивные участники не влияют на процесс голосования в ВГ-схемах, они исключаются из рассмотрения и им присваивается нулевое значение индекса силы. Два активных агента a и b называются *равноправными* $(a \sim b)$, если их перестановка не меняет множества mW.

Две ВГ-схемы с множествами активных участников V_1 и V_2 назовем *структурно-изоморфными*, если они имеют одинаковое число активных игроков, а их mW-множества совпадают после отождествления соответствующих активных участников.

Справедливо следующее утверждение [2].

Пусть в ВГ-схеме $(v|Q)$ участники $a, b \in V$ равноправны. Тогда существует ВГ-схема $(v'|Q)$ с тем же множеством активных участников и той же квотой, которая будет структурно изоморфна исходной ВГ-схеме, а участники a и b имеют в ней совпадающие веса: $v'(a)=v'(b)$.

Назовем ВГ-схему $(v|Q)$ *правильной*, если ее вектор весов v имеет одинаковые значения для любой пары равноправных участников.

Класс ВГ-схем $S(v|Q)$, структурно изоморфных $(v|Q)$, назовем *приведенным*, если любая $(v'|Q') \in S(v|Q)$ является правильной ВГ-схемой.

Для нахождения равноправных участников рассмотрим следующую функцию

$$\Psi_W : V \to N, \; \Psi_W(a) = \sum_{A \in W} \chi^A(a) \, .$$

Имеет место следующая теорема [2].

Активные участники a и b в ВГ-схеме $(v|Q)$ равноправны тогда и только тогда, когда

$$\Psi_W(a) = \Psi_W(b) \, .$$

Весовой индекс силы для активных участников находится следующим образом [2]. Пусть задана ВГ-схема $(v^0 \,|\, Q_0)$ с множеством активных участников V^0, mW-множеством mW^0 и ML-множеством ML^0. Ищется новая ВГ-схема $(v^* \,|\, Q_*)$ (которая называется *точкой* *конденсации* для ВГ-схемы $(v^0 \mid Q_0)$), структурно изоморфная исходной и наиболее близкая к традиционной системе голосования: "один человек – один голос". Показано [2], что такая система порождается решением следующей задачи последовательной минимизации

$$\inf_{v} \left(v_1 - \min_{C_0, K_0} \left[v(C_0) - v(K_0) \right] \right) \tag{4}$$

с ограничениями

$$\begin{aligned} &1.\ C_0 \in mW^0,\ K_0 \in ML^0, \\ &2.\ \forall C \in mW^0\ \ v(C) \geq v(C_0), \\ &3.\ \forall K \in ML^0\ \ v(K) \leq v(K_0), \\ &4.\ v_1 \geq v_2 \ldots \geq v_n \geq v(C_0) - v(K_0), \\ &5.\ \forall a, b \in V^0 \quad \Psi_W(a) = \Psi_W(b) \Rightarrow (v(a) = v(b)). \end{aligned} \tag{5}$$

Множество весовых векторов v, удовлетворяющих ограничениям (5) может быть описано следующим образом:

$$\forall a_i \in V^0 \quad v_i = \mu_i \Delta,$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ – вектор относительных весов, имеющий компоненты, выражаемые рациональными числами; Δ – положительное целое число, являющееся наименьшим общим знаменателем рациональных чисел $\{\mu_i\}$. При этом вектор μ удовлетворяет следующим ограничениям:

существует такое рациональное число $\lambda \in \left(1/2, 1\right)$, что

$$\begin{aligned} &1.\ \forall C \in mW^0\ \lambda\mu(V^0) + \frac{1}{2} \leq \mu(C), \\ &2.\ \forall K \in ML^0\ \ \lambda\mu(V^0) - \frac{1}{2} \geq \mu(K), \\ &3.\ \min_{C \in mW^0} \mu(C) - \max_{K \in ML^0} \mu(K) = 1, \\ &4.\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \mu_k \geq 1, \\ &5.\ \forall a_i, a_j \in V^0 \quad \Psi_W(a) = \Psi_W(b) \Rightarrow (\mu_i = \mu_j). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть вектор v^* является решением задачи (4) с ограничениями (5). Тогда вектор весовых индексов силы активных участников $h = (h_i)_{i=1}^n$ определяется из соотношений [2]

$$\forall a_i \in V^0 \quad h_i = \frac{v_i^*}{v^*(V^0)}. \tag{7}$$

Изучение конкретных ВГ-схем показало, что прямое использование соотношений (4), (5) или (6) для нахождения точек конденсации этих систем зачастую приводит к сложным вычислениям. В настоящей работе мы предлагаем другую интерпретацию задачи (4), (5). Ее эффективность мы иллюстрируем на примере двух реальных систем голосования.

1. Описание класса правильных ВГ-схем

Нахождение точек конденсации ВГ-схемы $(v^0 | Q_0)$ основывается на решении задачи оптимизации (4) с ограничениями (5), которые требуют знания всего состава ВГ-схем, входящих в приведенный класс $S(v^0 | Q_0)$. В этом разделе мы построим более удобное описание этого класса.

Заметим, что любая ВГ-схема $(v | Q) \in S(v^0 | Q_0)$ является правильной, т.е. равноправные игроки в ней имеют одинаковый вес. Это обстоятельство позволяет разбить множество активных игроков V на классы равноправных: $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, $\forall a,b \in V_i \quad a \sim b$. Припишем каждому игроку из класса V_i вес v_i и упорядочим классы по убыванию этого веса. В силу того, что все игроки в множестве V активные, а ВГ-схема – правильная, мы имеем $v_1 > v_2 > \ldots v_k \geq 1$. Пусть $|V_i| = n_i$ – число элементов в классе V_i. Тогда ВГ-схема $(v | Q) \in S(v^0 | Q_0)$ может быть задана указанием вектора $v = (v_i)_{i=1}^{k}$ весов игроков из классов $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ (*спектра весов*) и вектора $n = (n_i)_{i=1}^{k}$ числа элементов в соответствующих классах. Объединяя эти два вектора, представим веса участников в виде укрупненного вектора $(n_1 \circ v_1, n_2 \circ v_2, \ldots n_k \circ v_k)$, где комплекс $n_i \circ v_i$ заменяет n_i-мерный вектор с одинаковыми компонентами v_i; при этом выполнено

$$\forall i \;\; n_i > 0; \qquad v_1 > v_2 > \ldots v_k \geq 1. \tag{8}$$

В соответствии с (8), перепишем состав mW- и ML-множеств следующим образом. Пересечем множество C, принадлежащее mW или ML с разбиением $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ и укажем для каждого i количество игроков, входящих в $C_i = C \cap V_i$. Тогда множество C будет однозначным образом описано k-мерным целочисленным вектором $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, где $s_i = |C_i|$.

Совокупность всех векторов, отвечающих множеству mW, обозначим через S_+, а множеству ML – через S_-. Очевидно, совокупности S_+ и S_- строятся по исходной ВГ-схеме $(v^0 \mid Q_0)$ однозначным образом. В силу построения любой вектор $s = (s_1, ..., s_k)$, лежащий в S_+ или в S_-, подчиняется условиям $\forall i \; 0 \le s_i \le n_i$. Вектора, удовлетворяющие таким ограничениям, будем называть *допустимыми*. Из определений (1) и (3) mW- и ML-множеств вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Для любого $s \in S_-$ и любого j, для которого вектор $s' = (s'_i)_{i=1}^k$ $(s'_i = s_i + \delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера, $1 \le j \le k)$ является допустимым, найдется вектор $s'' = (s''_i)_{i=1}^k$, $s'' \in S_+$ такой, что $s''_i \le s'_i$. Аналогично, для любого $s \in S_+$, если $s' = (s'_i)_{i=1}^k$ $(s'_i = s_i - \delta_{ij})$ оказывается допустимым, найдется вектор $s'' = (s''_i)_{i=1}^k$, $s'' \in S_-$, для которого выполнено $s''_i \ge s'_i$.

Заметим теперь, что для ВГ-схемы, представимой спектром весов (8), справедливо

$$\min_{s \in S_+} \sum_{i=1}^k v_i s_i > \max_{s \in S_-} \sum_{i=1}^k v_i s_i ,$$

т.е. значения весов mW- и ML-множеств при заданном спектре $v = (v_i)_{i=1}^k$ отделены друг от друга положительным числом $\Delta(v)$, называемым *щелью* ВГ-схемы

$$\Delta(v) = \min_{s \in S_+} \sum_{i=1}^k v_i s_i - \max_{s \in S_-} \sum_{i=1}^k v_i s_i \tag{9}$$

Введем в рассмотрение набор векторов

$$U = \{ s - s' : \; s \in S_+ , \; s' \in S_- \} .$$

Тогда для приведенной ВГ-схемы $(n_1 \circ v_1, n_2 \circ v_2, ... n_k \circ v_k)$ с mW-множеством S_+ и ML-множеством S_- справедливо

$$\forall u \in U \quad \vec{v}\vec{u} = \sum_{i=1}^k v_i u_i > 0 , \tag{10}$$

$$\Delta(v) = \min_{u \in U} \vec{v}\,\vec{u} . \tag{11}$$

Снабдим теперь вектор весов $n \circ v \equiv (n_1 \circ v_1, n_2 \circ v_2, ... n_k \circ v_k)$ квотой

$$Q_+ = \min_{s \in S_+} \vec{v}\vec{u} . \tag{12}$$

Тогда, очевидно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Правильная ВГ-схема $(n \circ v \mid Q_+)$ структурно изоморфна схеме $(v^0 \mid Q_0)$.

Для доказательства достаточно заметить, что обе ВГ-схемы имеют по построению одинаковые количества активных игроков, а их mW- и ML-множества совпадают.

Пример 1. Пусть задана правильная ВГ-схема (2,1,1|3). Числа классов эквивалентности игроков образуют вектор $n=(1,2)$, mW- и ML-множества порождают совокупности $S_+=\{(1,1)\}$, $S_-=\{(1,0),(0,2)\}$, $U=\{(0,1),(1,-1)\}$. Правильная ВГ-схема, структурно изоморфная (2,1,1|3), задается вектором весов $n \circ v=(1\circ v_1, 2\circ v_2)$, в котором $v_1>v_2\geq 1$, а квота Q_+, согласно (12), принимает вид $Q_+=v_1+v_2$. Таким образом, любая ВГ-схема из класса $S(2,1,1|3)$ имеет вид $(v_1,v_2,v_2 \mid v_1+v_2)$, где $v_1>v_2\geq 1$.

Теорема 1. Пусть mW- и ML-множества приведенной ВГ-схемы $(n\circ v^0 \mid Q_0)=(n_1\circ v_1^0, n_2\circ v_2^0, \ldots n_k \circ v_k^0 \mid Q_0)$ характеризуются совокупностями S_+, S_-, U. Спектр весов $(v_1,\ldots,v_k)$, $v_1>v_2>\ldots v_k\geq 1$, порождает правильную ВГ-схему $(n\circ v \mid Q_+)=(n_1\circ v_1, n_2\circ v_2,\ldots,n_k\circ v_k \mid Q_+)$, структурно изоморфную исходной ВГ-схеме $(n\circ v^0 \mid Q_0)$ т. и т. т. когда выполнено условие (10): $\forall u\in U \quad \vec{v}\vec{u}>0$.

Доказательство:

Пусть $(n\circ v \mid Q_+)$ структурно изоморфна $(n\circ v^0 \mid Q_0)$, тогда, очевидно, условие (10) выполнено.

Предположим теперь, что для ВГ-схемы $(n\circ v \mid Q_+)$ справедливо условие (10). Поскольку количество активных участников у ВГ-схем $(n\circ v^0 \mid Q_0)$ и $(n\circ v \mid Q_+)$ одинаково, нам нужно доказать, что в этих схемах совпадают множества mW_0 и mW. Условие (10) означает, что согласно (11) в ВГ-схеме $(n\circ v \mid Q_+)$ $\Delta(v)>0$, т.е. любая коалиция C, характеризуемая вектором $s\in S_+$, отличается по весу от любой коалиции C', характеризуемой вектором $s'\in S_-$, не менее чем на $\Delta(v)$.

Пусть $C\in mW_0$, тогда по построению найдется вектор $s\in S_+$ такой, что $v^0(C)=\vec{v}^0\vec{s}\geq Q_0$. Если же из C удалить некоторого игрока и перейти к коалиции $C'\subset C$, то согласно лемме 1 найдется коалиция C'', принадлежащая ML_0 и содержащая C'. Пусть $s'\in S_-$ удовлетворяет условию $v^0(C'')=\vec{v}^0\vec{s}'$. Тогда справедливо $\vec{v}\vec{s}\geq Q_+$, $\vec{v}\vec{s}'<Q_+$, и значит, $v(C')\leq v(C'')=\vec{v}\vec{s}'<Q_+$, т.е. $C\in mW$.

Обратно, пусть $C \in mW$, однако $C \notin mW_0$. Следует рассмотреть две ситуации: $C \in W_0$ (т.е. $v_0(C) > Q_0$) и $C \in L_0$ (т.е. $v_0(C) < Q_0$), здесь W_0 и L_0 – множества выигрывающих и проигрывающих коалиций ВГ-схемы $(n \circ v^0 \mid Q_0)$. В первом случае найдется такая коалиция $C' \subset C, C' \neq C$, что $C' \in mW_0$, а значит, по доказанному выше, $C' \in mW$. Для этой коалиции $v(C') < Q_+$ (т.к. $C \in mW$), что противоречит условию $C' \in mW$. Если же $C \in L_0$, то найдется коалиция $C'' \supset C \,\&\, C'' \in ML_0$. Отвечающий C'' вектор s'' принадлежит S_-, и значит, $\vec{v}\vec{s}'' = v(C'') < Q_+$. С другой стороны, $v(C) < v(C'')$, т.е. выполнено $C \notin mW$,что противоречит условию. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и вида задачи минимизации (4), (5) следует

Теорема 2. Точка конденсации ВГ-схемы $(v^0 \mid Q_0)$, характеризуемой совокупностями S_+, S_-, U, является решением задачи минимизации

$$\inf_{v} \left(v_1 - \Delta(v)\right), \tag{13}$$

$$v_1 > v_2 > \dots v_k \geq 1, \quad \Delta(v) = \min_{u \in U} \vec{v}\vec{u} > 0.$$

Пример 2. Пусть задана ВГ-схема $(2 \circ 26{,}5 \circ 5 \mid 41)$. Найдем ее точку конденсации. Совокупности S_+, S_-, U имеют вид

$S_+ = \{(2,0),(1,3)\}$, $S_- = \{(0,5),(1,2)\}$, $U = \{(2,-5),(1,-2),(0,1)\}$.

Общий вид правильной ВГ-схемы, структурно изоморфной исходной, представляется в виде $\left(2 \circ v_1, 5 \circ v_2 \mid Q_+\right)$, где $v_1 > v_2 \geq 1$.

Совокупность $\vec{v}\vec{u}$ при $u \in U$ состоит из элементов $\{2v_1 - 5v_2, v_1 - 2v_2, v_2\}$.

Поскольку $\Delta(v)$ принимает наименьшее из трех значений элементов этого множества, возникает три ситуации.

1. $\Delta(v) = v_2$ при условиях $2v_1 - 5v_2 \geq v_2$, $v_1 - 2v_2 \geq v_2$, которые эквивалентны соотношению $v_1 \geq 3v_2$. Функционал в (13) принимает значение $v_1 - \Delta(v) = v_1 - v_2 \geq 2v_2$. Поскольку $v_2 \geq 1$, то наименьшее значение достигается при $v_1 = 3, v_2 = 1$.

2. $\Delta(v) = v_1 - 2v_2$ при условиях $v_2 \geq v_1 - 2v_2$, $2v_1 - 5v_2 \geq v_1 - 2v_2$, из которых следует $v_1 = 3v_2$. Поскольку $v_1 - \Delta(v) = 2v_2$, то минимум достигается опять при $v_1 = 3, v_2 = 1$.

3. $\Delta(v) = 2v_1 - 5v_2$ при условиях $v_2 \geq 2v_1 - 5v_2$, $v_1 - 2v_2 \geq 2v_1 - 5v_2$, которые порождают ограничение $v_1 \leq 3v_2$. Соотношения $v_1 - \Delta(v) = 5v_2 - v_1 \geq 2v_2$ приводят к минимуму в точке $v_1 = 3, v_2 = 1$.

Таким образом, точка конденсации ВГ-схемы $(2\circ 26,5\circ 5|41)$ имеет вид $(2\circ 3,5\circ 1|6)$. Индексы силы игроков (7) принимают следующие значения

$$h_1 = h_2 = \frac{3}{11};\ h_3 = \ldots = h_7 = \frac{1}{11}.$$

2. Применение индекса силы для построения и анализа систем голосования в комитетах

Весовые системы голосования используются для замены процесса прямого голосования больших групп населения решениями их полномочных представителей в соответствующих органах и комитетах. Например, комитет представителей 5 муниципалитетов графства Нассау (штат Нью-Йорк) включает 6 человек, представляющих более 1 миллиона жителей. Участники комитета имеют различные веса (назначаемые в соответствии с долей голосов жителей, которые их делегировали) в процессах принятия коллективных решений по вопросам организации и совместного ведения хозяйства. Однако, использование весового голосования законно, если влияние каждого представителя на процесс голосования адекватно относительному размеру части жителей, делегировавших этого представителя. Эта проблема и была поднята Дж. Банзафом в ходе его судебных исков, касающихся неверного (с его точки зрения) распределения весов в Нью-Йоркском комитете (см. подробнее [1]). Рассмотрим эту проблему, опираясь на весовые индексы силы (7).

Пусть N $(|N|=n)$ жителей разбиты на m групп $N_1,\ldots,N_m$ $(|N_i|=n_i)$, $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$, имеющих вообще говоря, различные интересы. Как построить ВГ-схему, голосование в которой "правильно" представляло бы результаты прямого голосования N участников (и тем самым заменяло его в реальной практике выработки управленческих решений)? Этот вопрос выдвигает по крайней мере три проблемы.

1. Из скольких представителей k следует образовывать соответствующий комитет.

2. Какими весами, $v=(v_i)_{i=1}^{k}$, должны обладать его представители.

3. Какова должна быть квота Q в процедурах весового голосования, если голосование среди всех N участников проводится с квотой Q_e.

Эти проблемы, очевидно, связаны друг с другом и должны решаться одновременно.

Для их изучения используем следующую модель. Пусть интересы каждой группы N_i представляют r_i участников комитета, наделенных одинаковыми весами (эти веса, конечно, могут меняться от группы к группе). В результате, участникам комитета будет сопоставлен некоторый вектор весов $v=(v_1,...,v_k)$, где $k=\sum_{i=1}^{m} r_i$. Квоту Q в этой системе голосования выберем так, чтобы условия принятия решения в ней соответствовали условиям исходной системы с N участниками. Для этого заметим, что при заданных v и Q решение в ВГ-схеме $(v|Q)$ может быть принято участниками, образующими минимальную выигрывающую коалицию $C \in mW$. Их число колеблется от $\alpha = \min_{C \in mW} |C|$ до $\beta = \max_{C \in mW} |C|$. Будем считать, что условия принятия решений в ВГ=схеме $(v|Q)$ соответствуют условиям в системе голосования N участников с квотой Q_e, если

$$\frac{\alpha}{k} \le \frac{Q_e}{n} \le \frac{\beta}{k}. \qquad (14)$$

Соотношения (14) означают, что относительные доли голосов участников, приводящих к принятию решения в прямой системе голосования и заменяющей ее ВГ-схеме оказываются приблизительно равны.

Другое естественное условие состоит в том, чтобы в процессе голосования в комитете относительная сила представителей группы N_i была такой же, как и сила n_i избирателей, голосующих в исходной системе. Для этого мы будем полагать, что суммарные весовые индексы силы их представителей должны относиться друг к другу как размеры соответствующих групп n_i, т.е.

$$\frac{h_i r_i}{h_j r_j} \simeq \frac{n_i}{n_j}. \qquad (15)$$

Проиллюстрируем непротиворечивость принципов (14) и (15) на следующем модельном примере.

Пример 3. Пусть мы имеем спортивный клуб, включающий n=100 членов, занимающихся двумя видами спорта, n_1=60 одним и n_2=40 – другим. Голосование членов этого клуба проводится по правилу квалифицированного большинства: нужно 2/3 голосов, чтобы решение прошло. Пусть участники хотят избрать правление клуба, делегировав в него по 3 представителя от каждого вида спорта, т.е. $r_1 = r_2 = 3$. Наделим их весами v=(20, 20, 20, 13, 13, 13), так что первые три участника с весами (20, 20, 20) представляют группу в 60 человек, а (13, 13, 13) – другую группу в 40 человек. Квоту голосования в правлении клуба выберем равной 66. Таким образом, мы будем иметь дело с ВГ-схемой (20, 20, 20, 13, 13, 13|66). Легко подсчитать, что mW-множество этой системы состоит из коалиций, содержащих четырех участников, т.е. $\alpha = \beta = 4$, и значит, соотношение (14) выполнено. Решая задачу (13), можно найти, что ВГ-схема (3,3,3,2,2,2|10) изоморфна исходной и является ее точкой конденсации. Действительно, для этой ВГ-схемы $S_+ = \{(3,1),(2,2)\}$, $S_- = \{(3,0),(1,3),(2,1)\}$, $U = \{(0,1),(2,-2),(1,0),(-1,2),(1,-1)\}$. Тогда

$\Delta(v) = \min\{2v_2 - v_1, v_1 - v_2\}$, $v_1 > v_2 \geq 1$.

Возникает две возможности:

1) $\Delta(v) = 2v_2 - v_1 > 0$; $v_1 - v_2 \geq 2v_2 - v_1$, т.е. $2v_1 \geq 3v_2$ и $v_1 < 2v_2$; Функционал $v_1 - \Delta(v) = 2v_1 - 2v_2 \geq v_2$. Минимум достигается при $v_1 = 3, v_2 = 2$.

2) $\Delta(v) = v_1 - v_2 > 0$, $2v_2 - v_1 \geq v_1 - v_2$, т.е. $3v_2 \geq 2v_1$, $v_1 > v_2$; Функционал $v_1 - \Delta(v) = v_2$. Минимум достигается при $v_1 = 3, v_2 = 2$.

Для класса ВГ-схем, структурно изоморфных $(3 \circ 20, 3 \circ 13 \mid 66)$ весовой индекс силы будет, согласно (7), равен

$$h = \left(3/15, 3/15, 3/15, 2/15, 2/15, 2/15\right).$$

Тогда суммарный индекс силы первых трех участников равен $3/5$, а последних трех – $2/5$; их отношение, $2/3$, совпадает с отношением численностей групп членов клуба, делегировавших этих участников, т.е. условие (15) также выполнено.

Пример 4. (Система голосования в парламенте США). Американский парламент имеет две палаты: Палата представителей (обозначим ее через H), и Сенат (S). Они включают: H – 435 членов, и S – 100 сенаторов. Для прохождения некоторого законопроекта требуется:

– 2/3 голосов в H и S

или

– более половины голосов в H, S и одобрение президента

или

– более половины голосов в H, не менее 50 голосов сенаторов и одобрения президентом и вице-президентом.

Таким образом, участники этого процесса образуют множество V, состоящее из президента (P), вице-президента (VP), 100 сенаторов (100s) и 435 членов палаты представителей (435h). Такую систему голосования можно представить как две связанных ВГ-схемы [3]:

1) $V_1 = \{P,\ 435h\}$, а совокупность всех выигрывающих коалиций, W_1, содержит множества, включающие коалиции из mW-множества, $mW_1 = \{(P,\ 218h),\ 290h\}$, где для сокращения записи выделено только по одной коалиции каждого типа, а остальные коалиции получаются всевозможным выбором указанного числа членов палаты представителей;

2) $V_2 = \{P,\ VP,\ 100s\}$ и $mW_2 = \{(P, VP,\ 50s),\ (P,\ 51s),\ 67s\}$.

Предложение считается принятым, если оно поддерживается в обеих ВГ-схемах.

Покажем теперь, что представленные системы голосования действительно являются ВГ-схемами, и найдем для них весовые индексы силы агентов. Для этого используем задачу минимизации (13) и отвечающие ей неравенства. В первой системе голосования симметрия множества mW_1 показывает, что в ней нет пассивных агентов, а все члены палаты представителей эквивалентны. Это означает, что спектр весов v содержит только две различные компоненты v_1 и v_2, описывающие вес президента v_1 и вес конгрессмена v_2. Множества $S_+^{(1)}$, $S_-^{(1)}$, $U^{(1)}$ для этой системы имеют следующий вид

$$S_+^{(1)} = \{(1,218),(0,290)\},\quad S_-^{(1)} = \{(1,217),(0,289)\},$$
$$U^{(1)} = \{(0,1),(1,-71),(-1,73)\}.$$

Согласно (13), $\Delta(v) = \min\{v_2, v_1 - 71v_2, -v_1 + 73v_2\} > 0$, $v_1 > v_2 \ge 1$.

Возможны три случая:

1) $\Delta(v) = v_2 \ge 1$, $v_1 - 71v_2 \ge v_2$, $-v_1 + 73v_2 \ge v_2$; значит, $v_1 = 72v_2$. Тогда $v_1 - \Delta(v) = 71v_2$, т.е. минимум достигается при $v_1 = 72$, $v_2 = 1$.

2) $\Delta(v) = v_1 - 71v_2 > 0$; $v_2 \ge v_1 - 72v_2$; $-v_1 + 73v_2 \ge v_1 - 71v_2$; значит, $71v_2 < v_1 \le 72v_2$; $v_1 - \Delta(v) = 71v_2 \ge 71$. Минимум достигается при $v_2 = 1$, $v_1 = 72$.

3) $\Delta(v) = -v_1 + 73v_2 > 0$, $v_2 \ge -v_1 + 73v_2$, $v_1 - 71v_2 \ge -v_1 + 73v_2$; таким образом, $72v_2 \le v_1 \le 73v_2$. Минимум $v_1 - \Delta(v) = 2v_1 - 73v_2 \ge 71v_2$ достигается при $v_1 = 72$, $v_2 = 1$.

Точка конденсации ВГ-схемы возникает при $v_2 = v_1 - 71v_2 = -v_1 + 73v_2 = 1$, характеризуется спектром весов (72,1) и дает значения весовых индексов силы игроков

$$h_1^{(1)} = \frac{72}{507} = 0.14201; \quad h_2^{(1)} = \frac{1}{507} = 0.00197. \qquad (16)$$

Для второй системы голосования структура множества mW_2 показывает, что спектр весов этой системы имеет три различных компоненты $v_1 > v_2 > v_3 \geq 1$, которые описывают веса президента, сенатора и вице-президента, соответственно. Множества $S_+^{(2)}$, $S_-^{(2)}$, $U^{(2)}$ имеют вид

$$S_+^{(2)} = \{(1,50,1),(1,51,0),(0,67,0)\}, \quad S_-^{(2)} = \{(0,66,1),(1,50,0),(1,49,1)\},$$

$$U^{(1)} = \{(1,-16,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,-15,-1),(0,2,-1),(0,1,-1),(-1,17,0),(-1,18,-1)\}$$

Задача минимизации (13) решается при ограничениях: $v_1 > v_2 > v_3 \geq 1$; $\Delta(v) > 0$, где с учетом ограничений $\Delta(v) = \min\{v_3, v_1 - 16v_2, v_2 - v_3, -v_1 + 17v_2\}$.

Возникает четыре случая:

1) $\Delta(v) = v_3$; $v_1 - 16v_2 \geq v_3$, $v_1 - v_3 \geq v_3$; $-v_1 + 17v_2 \geq v_3$. Эти неравенства дают $v_2 \geq 2v_3$, $v_3 + 16v_2 \leq v_1 \leq v_3 + 17v_2$. Функционал $v_1 - \Delta(v) = v_1 - v_3 \geq 16v_2$;, он достигает минимума при $v_1 = 33$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$.

2) $\Delta(v) = v_1 - 16v_2 > 0$ при ограничениях $v_3 \geq v_1 - 16v_2$, $v_2 - v_3 \geq v_1 - 16v_2$, $v_1 + 17v_2 \geq v_1 - 16v_2$; из ограничений следует, что $16v_2 < v_1 \leq v_3 + 16v_2$, $v_1 \leq 17v_2 - v_3$, $2v_1 \leq 33v_2$. Функционал $v_1 - \Delta(v) = 16v_2$ достигает минимума при $v_3 = 1, v_2 = 2, v_1 = 33$.

3) $\Delta(v) = v_2 - v_3$; $v_3 \geq v_2 - v_3$, $v_1 - 16v_2 \geq v_2 - v_3$, $-v_1 + 17v_2 \geq v_2 - v_3$; эти неравенства приводят к ограничениям $v_2 \leq 2v_3$, $17v_2 - v_3 \leq v_1 \leq 16v_2 + v_3$. Минимум функционала $v_1 - \Delta(v) = v_1 - v_2 + v_3 \geq 16v_2$ достигается при $v_3 = 33$, $v_2 = 2$, $v_1 = 1$.

4) $\Delta(v) = -v_1 + 17v_2 > 0$, $v_3 \geq v_1 + 17v_2$, $v_1 - 16v_2 \geq -v_1 + 17v_2$, $v_2 - v_3 \geq -v_1 + 17v_2$; из этих неравенств следует, что $v_1 < 17v_2$, $v_1 \geq 17v_2 - v_3$, $v_1 \geq 16v_2 + v_3$, $2v_1 \leq 33v_2$.

Функционал $v_1 - \Delta(v) = 2v_1 - 17v_2 \geq 16v_2$ достигает минимума при $v_1 = 33$, $v_2 = 2$, $v_3 = 1$.

Таким образом, спектр весов (33,2,1) дает точку конденсации этой ВГ-схемы. Заметим, что в точке конденсации оказывается, что

$$v_3 = v_1 - 16v_2 = v_2 - v_3 = -v_1 + 17v_2 = 1.$$

Весовые индексы силы участников принимают значения

$$h_1^{(2)} = 0.14103; \quad h_2^{(2)} = 0.00855; \quad h_3^{(2)} = 0.00427 \qquad (17)$$

Сопоставляя значения индексов (16), (17), мы видим, что с большой степенью точности сила президента в обеих палатах одинакова. Поскольку весовой индекс дает относительное значение силы участника, это позволяет сравнить силу сенаторов и членов палаты представителей друг с другом. Оказывается, что каждый сенатор при голосовании законопроектов в 4.34 раза сильнее члена палаты представителей. Это приводит к тому, что суммарный индекс силы всех членов палаты представителей почти точно совпадает с индексом силы всех сенаторов. Поражает дальновидность основателей законодательной системы США, предусмотревших такое построение Конгресса, в котором роль обеих палат в значительной степени сбалансирована.

Литература

1. Brams S. For All Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics, ch. 12. Weighted Voting Systems. W. M. Freeman and Company, N.Y., 1994.
2. Л.Г. Левченкова, В.С. Левченков. Индекс силы участников в системах голосования с весами. Сборник статей “Нелинейная динамика и управление” под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина, вып. 1, стр. 375-392. М.: Физматлит, 2001.
3. Taylor A., and Zwicker W. (1993). Weighted Voting, Multicameral Representation, and Power. Games and Economic Behavior, 5, 170-181.