В.С. Левченков, Л.Г. Левченкова

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ИГР С ПЕРЕГОВОРАМИ

Введение

К играм с переговорами относят совокупность бескоалиционных игр, в которых взаимодействие игроков носит многошаговый характер и состоит в формировании последовательности предложений – контрпредложений, в результате которых либо достигается согласование поведения игроков, либо игра прерывается ввиду невозможности примирения интересов участников. Такие игры возникли в результате пионерской работы Нэша [1], в которой решение кооперативной игры находилось на основе некооперативного подхода (см. также [2]). Аналогичный подход использовали Харсаньи и Зелтен в [3], где решение кооперативной игры строилось на основе выбора единственного равновесия в бескоалиционной игре с переговорами (см. также обзор по некооперативной теории сделок в [4]).

Игры с переговорами формализуют реальные переговорные процессы, существующие в политической и экономической жизни стран и отдельных групп людей. В них ясно просматривается структура поэтапной выработки требуемого решения на основе поочередных предложений (и контрпредложений) участников без заранее оговоренного ограничения на число шагов переговоров и спектр возможных вариантов, выставляемых на рассмотрение. Эти обстоятельства делают игры с переговорами близкими по духу с бескоалиционными динамическими играми. В настоящей работе мы применим ранее разработанную технику нахождения решения в супериграх [5], [6] для рассмотрения таких игр. Для иллюстрации нашего подхода мы рассматриваем сначала простейшую игру с переговорами, а именно, простейший вариант так называемой игры согласия [3], ограничиваясь случаем двух игроков и конечным множеством стратегий участников. В этом же разделе иллюстрируется роль аксиоматической теории сделок при построении нашего решения и строится пример, показывающий, как два игрока – один из которых считает справедливым решение Нэша, а второй является сторонником эгалитаризма – в результате переговорного процесса выбирают в качестве согласованной точки решение Калая-Смородинского.

Во втором разделе мы рассматриваем традиционную для теории сделок задачу раздела фискированной суммы денег между двумя участниками в случае конечной делимости денег и показываем, что решение зависит от величины минимальной единицы порции денег, используемой при составлении разыгрываемой суммы.

В третьей части решение игры "раздела" переносится на случай трех и более игроков.

1 Динамическое рассмотрение игры согласие

Пусть S – непустое конечное множество точек положительного ортанта R^2_+ двумерного евклидова пространства R^2, d – выделенная точка из R^2_+ (в частности, d может быть точкой с координатами $(0,0)$), причем все точки из S доминируют точку d, т.е.

$$\forall x \in S \quad x_i \geq d_i \quad (i = 1, 2). \tag{1}$$

Точки множества S будем интерпретировать как возможные исходы согласованного поведения игроков, соответствующие выбору величин цен и объема товаров при торговле, оплаты труда при заключении трудовых соглашений и т.д. Таким образом, компоненты вектора $x \in S$ дают численные значения доходов (или потерь) благ, получаемых сторонами при согласии с соответствующим исходом. Важным обстоятельством является то, что величины x_i должны быть измерены в некоторых объективно наблюдаемых величинах: денежных суммах, объемах товаров и т.д., а не в полезностях индивидуумов.

Сравнительная ценность исходов из S определяется игроками на основе их бинарных отношений R_1 и R_2 на S. Предположим, что эти отношения представимы величинами соответствующих координат точек из S, т.е. выполнено

$$\forall a, b \in S \quad aR_ib \Leftrightarrow a_i \geq b_i \quad (i = 1, 2), \tag{2}$$

где $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ – координатное представление точек из S.

В соответствии с видом множества S каждый из игроков имеет следующие множества своих стратегий

$$\begin{aligned} S_1 = Pr_1 S = \{x \in R^1 : \quad \exists y \in R^1 \quad (x, y) \in S\}, \\ S_2 = Pr_2 S = \{y \in R^1 : \quad \exists x \in R^1 \quad (x, y) \in S\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Исходы этой игры описываются биматрицей выигрышей $B = (v_1(s), v_2(s))_{s \in S_1 \times S_2}$, элементы которой имеют следующий вид

$$v_1(x,y) = \begin{cases} x, & \text{если } (x,y) \in S \\ d_1, & \text{если } (x,y) \notin S \end{cases}$$
$$v_2(x,y) = \begin{cases} y, & \text{если } (x,y) \in S \\ d_2, & \text{если } (x,y) \notin S \end{cases} \tag{4}$$

В соответствии с (4), если игроки, действуя независимо, выбирают свои стратегии s_1 и s_2 так, что получаемая ситуация $s = (s_1, s_2)$ лежит в S, то их выигрыши совпадают с выбираемыми стратегиями. Если же s не принадлежит S, то значения их выигрышей совпадают с компонентами точки разлада $d = (d_1, d_2)$, что констатирует факт отсутствия согласия в их поведении.

Процедура переговоров, согласно Нэшу, состоит в формировании потока $\omega = \{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{\infty}$ предложений $x_i \in S_1$ и контрпредложений $y_i \in S_2$ участников игры без определенного ограничения числа возможных ходов. Решением при этом считается ситуация согласованного поведения участников, приводящая к некоторому фиксированному исходу (или их определенной совокупности).

При такой интерпретации решения возникает естественное динамическое описание процесса разыгрывания, в результате которого игре сопоставляется траектория

$$\omega = (\omega_i)_{i=0}^{\infty}, \quad \forall i \quad \omega_i \in S, \tag{5}$$

содержащая элементы из S в случае согласованного поведения участников или элемент d в случае их несогласия.

Стационарные решения в такой игре рассматривались в работе [5] и описываются следующим образом. Рассматривается выпуклая оболочка D точек множества $S \cup \{d\}$. Пусть $PF(D)$ – ее граница Парето. Стационарное поведение игроков описывается так: игроки выделяют некоторую конечную последовательность ситуаций Δ, принадлежащих множеству $PF(D) \cap S$ (заметим, что некоторые ситуации в Δ могут повторяться). В процессе игры участники ориентируются на историю игры глубины m, анализируя m ситуаций, возникающих на m предыдущих шагах игры. При этом они без специального соглашения выбирают очередной элемент из Δ, если на предыдущем шаге выбирался некоторый элемент из Δ. Если же на предыдущем шаге возникает элемент d, то игроки на протяжении последующих m шагов играют несогласованно, после чего опять возвращаются к начальному элементу из Δ. Такой план игры приводит к циклическому повторению в траектории игры элементов из Δ и обеспечивает игрокам средние (на один шаг игры) выигрыши

$$\bar{v}_i = \frac{1}{|\Delta|} \sum_{(s_1,s_2)\in\Delta} s_i, \tag{6}$$

$|\Delta|$ – число элементов в совокупности Δ.

Выбор совокупности Δ проводится следующим образом. Согласно принципу выбора решения, в динамической игре [5], каждый из игроков i характеризуется помимо множеств S_1 и S_2 (и бинарных отношений R_1 и R_2) дополнительным параметром – *критическим уровнем* игрока c_i. Этот параметр показывает, ниже какого уровня не должно опускаться среднее значение выигрыша $\bar{v}_i$ игрока на решении игры. Если оказывается, что $\bar{v}_i < c_i$, то этот игрок не будет поддерживать согласованное поведение, соответствующее выбранному решению. Только если $\bar{v}_i \geq c_i$ игрок i готов следовать возникающему плану игры. Критическому уровню c_i соответствует на границе Парето множества D точка $w^{(i)}$ – критическая точка игрока i, такая что $w_i^{(i)} = c_i$. Точки $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ должны удовлетворять следующему необходимому условию существования согласованного поведения

$$w_1^{(1)} \leq w_1^{(2)}; \qquad w_2^{(2)} \leq w_2^{(1)}. \tag{7}$$

Пусть точки $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ лежат на отрезке $[a, b]$ границы Парето $PF(D)$. Точки a и b, ближайшие к $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, соответственно, принадлежат множеству S (рис. 1).

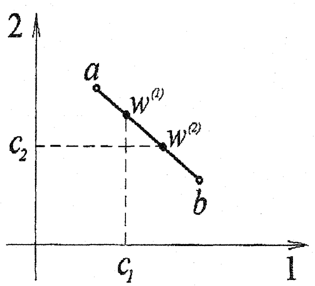

Рис. 1

Представим $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ их барицентрическими координатами относительно отрезка $[a,b]$, причем будем считать, что эти координаты суть рациональные числа

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= \tfrac{s}{m}a + \tfrac{m-s}{m}b \\ w^{(2)} &= \tfrac{r}{m}a + \tfrac{m-r}{m}b. \end{aligned} \tag{8}$$

r, s, m – натуральные числа, $r, s < m$.

Согласно условию (7), выполнено $s > r$.

При условии, что в результате динамического процесса разыгрывания участникам становится известным положение критической точки противника, решение игры имеет вид [5]

$$w^* = \frac{r}{r+m-s}a + \frac{m-s}{r+m-s}b. \tag{9}$$

Таким образом, участники игры выделяют совокупность $\Delta = \{\underbrace{a, a, \ldots, a}_{r \text{ раз}}, \underbrace{b, b, \ldots}_{m-s \text{ раз}}\}$ в качестве "области согласия"; их кооперативное поведение состоит в поочередном выборе только двух ситуаций из $PF(D)$: r раз ситуации a, $(m-s)$ раз ситуации b и последующего повторения указанных выборов. Заметим, что точка (9) находится на отрезке $[a,b]$ между точками $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, что обеспечивает выполнение уловий

$$w_i^* > c_i, \qquad i = 1, 2.$$

Наиболее важным моментом в формировании решения (9) является осознанный выбор игроками своих критичеких уровней (и точек). Каковы те основания, которые предоставляют возможность игроку назвать некоторое число той границей среднего выигрыша, ниже которого он в условиях согласованного поведения не опустится. Вот в этом моменте важнейшую роль может сыграть аксиоматическая теория сделок (см., например, обзор [7]). Именно в этой задаче теория сделок рассматривается с общих позиций, включающих как устройство игры (область S, точка разлада d), так и определенные рациональные, этические, моральные, а зачастую и некоторые математические соображения, формализуемые в виде системы аксиом, накладываемых с целью ограничения выбора вида решения. Многообразие предложенных решений (см. [7]) создает широкую базу для их использования как некоторых эталонов в оценке поведения индивидуума, когда он сталкивается с подходящей проблемой. Соответствующая его точке зрения аксиоматика и единственность решения позволяют сформулировать основу для рационального поведения, в котором предлагаемое решение определяет критическую точку игрока. Однако, разнообразие привлекательных систем аксиом, дающих несовпадающие решения, может привести к тому, что участники игры без предварительного договора будут использовать различные аксиоматические решения, и тем самым руководствоваться различными критическими точками. Каждый из них будет стараться защитить свой подход к понятию "справедливый исход" игры, что неизбежно вызовет процесс динамического поиска решения в игре. В случае, когда выбранные на основе аксиоматической теории критические точки будут удовлетворять условиям (7), динамическое взаимодействие игроков приведет к решению вида (9).

Пример 1. Пусть множество S содержит две точки $S = \{(2,0), (\frac{1}{2}, 3)\}$, точка $d = (0,0)$ (см. рис. 2)

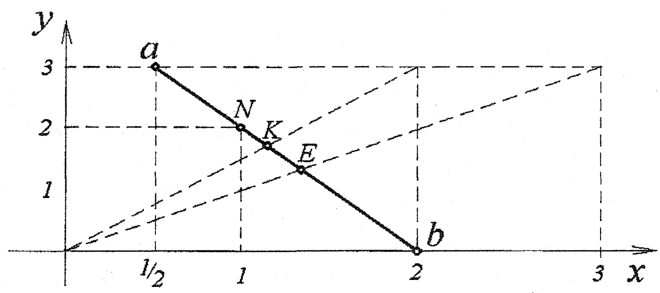

Рис. 2

Область D для этой задачи – это треугольник dab, $PF(D)$ – отрезок $[a,b]$. Наиболее известными решениями аксиоматической теории (с точки зрения работы [7]) являются следующие решения: Нэша (N), Калая-Смородинского (K) и эгалитарное решение (E). Нетрудно найти эти решения в данном случае. Поскольку отрезок $[a,b]$ лежит на прямой $y = 4 - 2x$, то согласно построению решения Нэша точка N должна доставлять максимум так называемому произведению Нэша $x(4-2x)$. Легко подсчитать, что N имеет координаты $(1,2)$. Решение Калая-Смородинского лежит на пересечении $[a,b]$ и прямой $y = \frac{3}{2}x$, т.е. $K = (\frac{8}{7}, \frac{12}{7})$.

Пусть игрок 1 придерживается аксиом, предложенных Нэшем для выработки справедливого раздела в этой задаче. Это означает, с нашей точки зрения, что он считает справедливым для себя получение среднего выигрыша не ниже, чем 1, т.е. $c_1 > 1$, и значит, $w^{(1)} = N$. Напротив, игрок 2 – сторонник эгалитаризма и хотел бы получить не менее $4/3$, т.е. $w^{(2)} = E$. Поскольку условия (7) для такого выбора критических уровней, очевидно, выполнены, то игроки в случае обнаружения соответствующих позиций сторон придут к решению (9). Для его вычисления заметим, что

$$w^{(1)} = N = \frac{6}{9}a + \frac{3}{9}b, \qquad w^{(2)} = E = \frac{4}{9}a + \frac{5}{9}b.$$

Тогда согласно (9),

$$w^*_{NE} = \frac{4}{7}a + \frac{3}{7}b.$$

В этой точке средний выигрыш игрока 1 равен $\bar{v}_1 = \frac{8}{7}$, а игрока 2 – $\bar{v}_2 = \frac{12}{7}$, т.е. точка w^*_{NE} совпадает с решением Калая-Смородинского $w^*_{NE} = K$.

Таким образом, динамическое решение сформулированной задачи, основанное на критических точках N и E приводит к точке Калая-Смородинского K. Однако, достаточно поменять представления игроков о справедливом разделе, т.е. положить $w^{(2)} = N$, а $w^{(1)} = E$, как мы увидим, что при неизменном виде множества S и положении точки разлада, динамическим решением в этой ситуации будет точка $(0,0)$. Если же в качестве критических точек использовать пары N и K, или K и E, то возникнут другие динамические решения.

В результате, аксиоматическая теория сделок, описывая возможные "рациональные" или "справедливые" разделы в заданных условиях, ориентирует игроков на выбор тех или иных критических уровней и тем самым либо приводит к согласованному динамическому поведению игроков на решении вида (9), либо ставит их перед необходимостью пересмотра своего понимания "справедливого" раздела в случае, если условия (7) нарушены.

Пример 2. Игра "раздел доллара" (случай двух игроков).

Рассмотрим специальный случай игры, в котором множество S представляет собой набор пар чисел (x, y), удовлетворяющих условию

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow x + y = M, \tag{10}$$

где M – некоторое фиксированное число, например, равное 100 долларам.

Для того, чтобы множество S было конечным, сделаем естественное предположение о том, что деньги не бесконечно делимы, а существуют купюры минимального достоинства δ(например, $\delta = 10$ долларам), из которых и составляется сумма M. В этом случае, множество точек из S будет конечным,и в него будут входить точки $(10k, 10l)$, где $k + l = 10$, $k \geq 0$, $l \geq 0$.

Множество S в случае, когда $\delta = 20$ изображено на рис. 3.

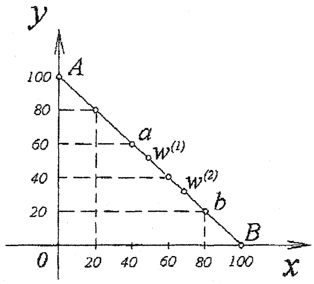

Рис. 3

Его выпуклая оболочка D представляет собой равносторонний треугольник OAB, а $PF(D) = AB$. Пусть критические точки игроков $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ лежат так, как указано на рис. 3, т.е. $w^{(1)} = (50, 50)$, $w^{(2)} = (70, 30)$. Роль части границы Парето, содержащей отрезок $[w^{(1)}, w^{(2)}]$ в этом частном случае будет играть отрезок $[a, b]$, где $a = (40, 60)$, $b = (80, 20)$. Для нахождения решения вида (9) в этом случае достаточно вычислить барицентрические координаты точек $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ относительно отрезка $[a, b]$. Легко подсчитать, что

$$w^{(1)} = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b, \qquad w^{(2)} = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b.$$

Решение (9) принимает вид

$$w^{*} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Для него

$$\bar{v}_1 = 60, \quad \bar{v}_2 = 40. \tag{11}$$

Пусть теперь участники делят между собой одну стодолларовую купюру при том же расположении их критических точек. Тогда барицентрические координаты точек $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ следует вычислять относительно отрезка $[A, B]$ (см. рис. 4).

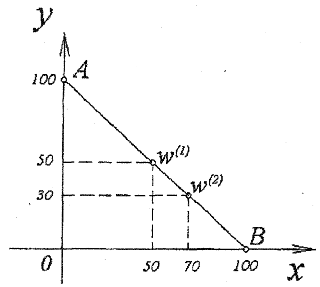

Рис. 4

Они имеют представление вида

$$w^{(1)} = \frac{5}{10}A + \frac{5}{10}B, \qquad w^{(2)} = \frac{3}{10}A + \frac{7}{10}B.$$

Решение (9) для этого случая принимает вид

$$w^* = \frac{3}{8}A + \frac{5}{8}B,$$

т.е.

$$\bar{v}_1 = 62\frac{1}{2}, \quad \bar{v}_2 = 37\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Сравнивая (12) с (11), видим, что увеличение номинала единицы деления оказывается выгодным игроку 1, его средний выигрыш возрастает.

Рассмотрим в заключение один любопытный эффект, возникающий в случае, когда критическая точка одного из игроков совпадает с элементом из S. Пусть $\delta = 50$. Тогда множество S содержит 3 точки $A = (100, 0)$, $C = (50, 50)$ и $B = (0, 100)$. Точка $w^{(1)}$ совпадает с точкой $C = (50, 50)$, а точка $w^{(2)}$ выражается через C и B соотношением $w^{(2)} = \frac{3}{5}C + \frac{2}{5}B$. Согласно (9), решение игры в таких условиях будет иметь вид $w^* = w^{(1)} = C$. Однако, если игрок 1 учтет эту особенность соотношения (9) и понизит свой критический уровень, опустив его ниже 50, то его доля увеличится. Положим, например, новое значение $\tilde{w}^{(1)}$

равным $(40, 60)$. Тогда

$$\tilde{w}^{(1)} = \frac{6}{10}A + \frac{4}{10}B, \qquad \tilde{w}^{(2)} = \frac{3}{10}A + \frac{7}{10}B,$$

и новое решение будет равно

$$\tilde{w}^* = \frac{3}{7}A + \frac{4}{7}B,$$

а средние значения $\bar{v}_1 = 57\frac{1}{7}, \quad \bar{v}_2 = 42\frac{6}{7}$.

Для игрока 1 такое решение оказывается более выгодным, чем для случая $w^{(1)} = (50, 50)$.

Конечно, если первый игрок увеличит свой критический уровень, выбрав, например, свою критическую точку равной $\hat{w}^{(1)} = (60, 40)$, то решение для него окажется еще более выгодным. Действительно,

$$\hat{w}^{(1)} = \frac{4}{5}C + \frac{1}{5}B, \qquad \hat{w}^{(2)} = \frac{3}{5}C + \frac{2}{5}B,$$

$$\hat{w}^* = \frac{3}{4}C + \frac{1}{4}B, \qquad \bar{v}_1 = 62\frac{1}{2}, \quad \bar{v}_2 = 37\frac{1}{2}.$$

Однако, при таком увеличении критического уровня можно нарушить условия (7) и вместо согласованного поведения получить точку разлада.

Замечание. Влияние величины δ на выбор критических уровней показывает, что задачи раздела при различных δ носят самостоятельный характер и могут иметь свои специфические особенности.

Пример 3. Игра "раздел доллара" (случай трех и более игроков).

Рассмотрим теперь раздел между тремя игроками суммы в 100 долларов, существующей в виде одной купюры. В этом случае множество S содержит три состояния $S = \{(100, 0, 0), (0, 100, 0), (0, 0, 100)\}$, область D является выпуклой оболочкой S, и точки $O = (0, 0, 0)$, и представляет собой тетраэдр $OLPQ$ (см. рис. 5). Ее Парето-граница – равносторонний треугольник LPQ. Пусть критические уровни игроков c_1, c_2, c_3 удовлетворяют условиям: каждое c_i – целое число, $\sum c_i \le 100$, т.е. точка $C = (c_1, c_2, c_3)$ лежит внутри тетраэдра $OLPQ$.

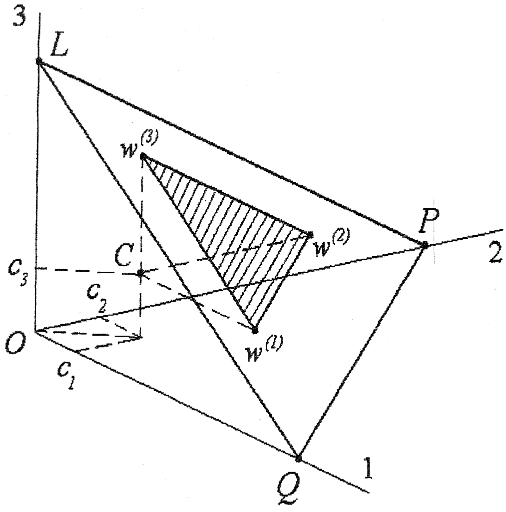

Рис. 5

Тогда прямые, проходящие через точку C и параллельные осям координат 1, 2 и 3 пересекают плоскость $\triangle LPQ$ в точках $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ и $w^{(3)}$, соответственно; $\Delta w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}$ – равносторонний, его стороны удалены от сторон $\triangle LPQ$ на расстояния $h_i = \frac{\sqrt{6}}{2}c_i$, $i = 1,2,3$ (см. рис. 6). Барицентрические координаты точек $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ и $w^{(3)}$ относительно симплекса LPQ легко находятся и равны:

$$w^{(1)} = \left(1 - \frac{c_2 + c_3}{100}\right) Q + \frac{c_2}{100}P + \frac{c_3}{100}L;$$

$$w^{(2)} = \frac{c_1}{100}Q + \left(1 - \frac{c_1 + c_3}{100}\right) P + \frac{c_3}{100}L;$$

$$w^{(3)} = \frac{c_1}{100}Q + \frac{c_2}{100}P + \left(1 - \frac{c_1 + c_2}{100}\right) L.$$

Согласно [6], решение этой задачи выглядит следующим образом: пусть

$$\sum_{i=1}^{3} c_i = c,$$

тогда

$$w^* = \frac{c_1}{c}Q + \frac{c_2}{c}P + \frac{c_3}{c}L. \tag{13}$$

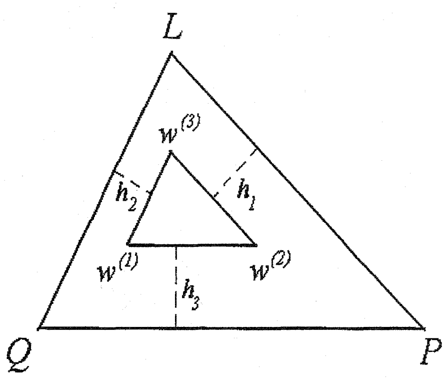

Рис. 6

Выясним, где в $\triangle LPQ$ расположена точка w^*. Непустота $\triangle w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}$ обеспечивается условием $c < 100$. Отсюда вытекает, что расстояния l_i от w^* до сторон $\triangle LPQ$ удовлетворяют неравенствам

$$l_i = \frac{c_i}{c} \cdot h = 100\frac{h_i}{c} \geq h_i$$

(здесь h – высота $\triangle LPQ$), т.е. w^* лежит в $\triangle w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}$. Таким образом, для решения (13) выполнены условия $w_i^* \geq c_i$, обеспечивающие согласованность в поведении участников.

Как и для случая двух игроков, использование для раздела суммы денег, представленной другим набором купюр, может изменить вид решения. Действительно, пусть 100 долларов представлены в виде 5 купюр по 20 долларов. Тогда множество S содержит уже не 3, а 9 точек

$$S = \{(100,0,0),(0,100,0),(0,0,100),(60,20,20),(20,60,20),\\ (20,20,60),(40,40,20),(20,40,40),(40,20,40)\}.$$

Парето-граница области D представляет собой треугольник $\triangle LPQ$ с вершинами $L = (0,0,100)$, $P = (0,100,0)$, $Q = (100,0,0)$, содержащий внутри себя треугольник $\triangle ABC$ с вершинами $A = (20,20,60)$, $B = (20,60,20)$, $C = (60,20,20)$. Предположим, что критические уровни игроков таковы, что критические точки $w^{(1)}$ $w^{(2)}$ и $w^{(3)}$ образуют треугольник $\triangle w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}$, лежащий внутри $\triangle ABC$ (см. рис. 7).

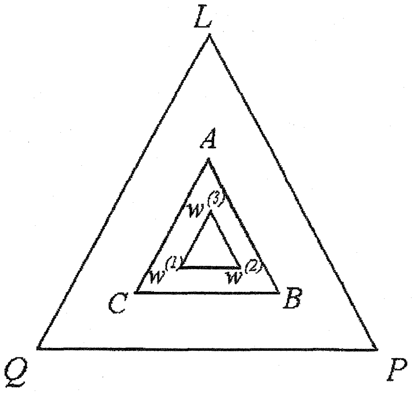

Рис. 7

Поскольку ближайшими ситуациями к критическим точкам $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ и $w^{(3)}$ являются точки C, B и A, соответственно, то при построении согласованного поведения игроки будут ориентироваться именно на эти точки. Используя численные значения координат точек A, B и C, после небольших вычислений можно найти барицентрические координаты точек $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ и $w^{(3)}$ относительно $\triangle ABC$. Именно,

$$w^{(1)} = \frac{c_3-20}{40}A + \frac{c_2-20}{40}B + \left(2 - \frac{c_2+c_3}{40}\right)C;$$
$$w^{(2)} = \frac{c_3-20}{40}A + \left(2 - \frac{c_1+c_3}{40}\right)B + \frac{c_1-20}{40}C;$$
$$w^{(3)} = \left(2 - \frac{c_1+c_2}{40}\right)A + \frac{c_2-20}{40}B + \frac{c_1-20}{40}C.$$

Заметим, что условие того, что $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ и $w^{(3)}$ лежат внутри $\triangle ABC$ записываются в виде $\forall i \;\; c_i > 20$.

Решение этой игры принимает вид

$$w^* = \frac{c_3-20}{c-60}A + \frac{c_2-20}{c-60}B + \frac{c_1-20}{c-60}C. \tag{14}$$

Средние выигрыши игроков для него равны

$$\bar{v}_1^* = \frac{20(3c_1+c_2+c_3-100)}{c-60}; \qquad \bar{v}_2^* = \frac{20(3c_2+c_1+c_3-100)}{c-60};$$
$$\bar{v}_3^* = \frac{20(3c_3+c_1+c_2-100)}{c-60}. \tag{15}$$

Как и ранее, легко показать, что w^* лежит внутри треугольника $\triangle w^{(1)} w^{(2)} w^{(3)}$.

Оценим, как повлиял переход к более широкому множеству возможных разбиений разыгрываемой суммы на средний выигрыш игроков. В силу симметричной (по c_1, c_2 и c_3) структуры выигрышей достаточно провести рассмотрение только для одного игрока.

Заметим, что

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_1^* = \frac{(100-c)(20c - 60c_1)}{c(c-60)}. \tag{16}$$

В силу того что по условию $60 < c < 100$, знак выражения (16) зависит от знака сомножителя $(20c - 60c_1)$. Таким образом, если $c_1 > \frac{c}{3}$, то $\bar{v}_1^* > \bar{v}_1$. В случае же когда $20 < c_1 < \frac{c}{3}$, $\bar{v}_1 > \bar{v}_1^*$.

Литература

1. Nash, J,F. Two-person cooperative games. Econopmetrica, 1953, v. 21, pp. 128-140.

2. Льюис Р.В., Х. Райфа. Игры и решения. М: ИЛ, 1961.

3. Харшаньи Дж., Р. Зельтен. Общая теория выбора равновесия в играх. Санкт-Петербург: "Экономическая школа", 2001.

4. Binmore, K., M.J. Osborne, F. Rubinstein. Noncooperative Models of Burgaining. In Handbook of Game Theory, v. 1, Edited by R.J. Aumann and S. Hart. Elsevier Science Peblishers B.V., 1992, pp. 179-225.

5. Левченков В.С. Стационарные стратегии в суперииграх. ДАН, 2004, т. 397, N 2, стр. 181-185.

6. Левченков В.С. Выбор решения в биматричных суперииграх. ДАН, 2005, т. 403, N 1.

7. Thompson W. Cooperative Models of Bargaining. In Handbook of Game Theory, v. 2, Edited by R.J. Aumann and S. Hart. Elsevier Science Peblishers B.V., 1994, pp. 1238-1284.