

Численный анализ игр на разорение

1. Введение

Пусть игрок обладает начальным капиталом (начальным банком) в m единиц и стремится увеличить его до значения в M единиц. Процесс игры состоит из одноступенчатых дискретных процедур (шагов), в каждой из которых с вероятностью p_k ($k \in \mathbb{Z}$, $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$, $k_{\min} < 0 < k_{\max}$) игрок получает k единиц. Игрок разоряется, если он не может сделать ставку, то есть его банк опускается ниже ($-k_{\min}$). Игрок заканчивает игру, когда достигает банка M (который мы будем называть *горизонтом* игры), причем под достижением горизонта мы будем понимать ситуацию, когда банк игрока *равен или превышает* M .

В данной статье мы рассмотрим случай $k_{\min} = -1$, а на k_{\max} сверху не будет никаких ограничений.

Обозначим через W_m^M вероятность разорения игрока при начальном банке m и горизонте M . Тогда можно записать следующие соотношения (см. [1.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984]):

$$W_m^M = \begin{cases} 1, & m < 1 \\ \sum_k p_k W_{k+m}^M, & 1 \leq m < M \\ 0, & m \geq M \end{cases} \quad (1)$$

Таким образом, мы имеем систему линейных уравнений для нахождения вероятностей разорения.

Другой величиной, характеризующей игру на разорение, является средняя длина игры L_m^M , для вычисления которой имеем аналогичные уравнения:

$$L_m^M = \begin{cases} 0, & m < 1 \\ 1 + \sum_k p_k L_{k+m}^M, & 1 \leq m < M \\ 0, & m \geq M \end{cases}$$

Для расчета среднего выигрыша игрока необходимо знать, как выплачивается выигрыш игроку. *Выплатой* назовем количество денег, которые выплачиваются игроку после игры. Рассматриваются две модели выплат:

1. При достижении горизонта M игрок получает $M-m$ единиц (случай полной неликвидности).
2. При достижении горизонта M игрок получает M единиц (случай полной ликвидности).

Первая соответствует тому, что у игрока забирают поставленные фишки, а при выигрыше возвращают M единиц (при проигрыше, естественно, ничего). Во втором случае при выигрыше у игрока фишки не забирают.

Следует четко понимать разницу между этими двумя случаями. Приведем пример, показывающий их различия.

Пример. Пусть игрок ставит 10 монет (отдает их дилеру). Далее проводится игра в орел-решку, при этом при выигрыше дилер добавляет монету

к монетам игрока, а в противном случае забирает одну монету. Пусть монет стало 30 штук и игрок решает прекратить игру. Тогда если игра ведется по правилам первого случая, ему выплатят $30-10=20$ монет, а во втором случае ровно 30 монет.

В различных играх используют как одну, так и другую модель выплат.

Среднюю выплату в первом случае будем обозначать U_m^M , а во втором — E_m^M . Тогда средний выигрыш равен разности средней выплаты и начального капитала:

$$\bar{U}_m^M = U_m^M - m, \quad \bar{E}_m^M = E_m^M - m.$$

Как показано в [1.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984], для случая $\{k\}=\{-1, 1\}$, $p_1=p$, $p_{-1}=q$ (модель игры орел-решка) решение может быть найдено аналитически. Там же выписаны все формулы, кроме формулы для средней выплаты U_m^M . Однако можно написать $U_m^M = (M-m)(1-W_m^M)$, так как с вероятностью $(1-W_m^M)$ игрок получает $(M-m)$ денежных единиц.

Итак, при $p=q=S$ вероятность разорения равна

$$W_m^M = 1 - m/M, \quad L_m^M = (M-m)m, \quad U_m^M = \frac{(M-m)m}{M}, \quad E_m^M = m.$$

При $p \neq q$ имеют место следующие выражения:

$$W_m^M = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^M - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{\left(\frac{q}{p}\right)^M - 1}, \quad L_m^M = \frac{m}{q-p} - \frac{M}{q-p} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^m}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^M},$$

$$U_m^M = (M-m) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^M - 1}, \quad E_m^M = M \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^m - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^M - 1}.$$

Однако для более сложных случаев аналитическое решение получить нелегко. Метод производящих функций, описанный в [1.Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984], приводит к уравнению порядка n , где n — мощность множества $\{k\}$.

Поэтому получение решения в общем случае возможно лишь с помощью вычислительных методов.

2. Игры на разорение с несколькими выигрышами

Рассмотрение общего случая сложно не только потому, что размерность систем уравнений резко возрастает при увеличении M . Вычислительной мощности современных компьютеров достаточно для их разрешения за приемлемое время. Более того, как мы покажем ниже, системы уравнений, описывающие вероятности разорения, обладают специальной структурой и могут быть решены весьма просто. Основная проблема возникает при вычислении U и E .

При расчете средних выплат следует иметь в виду, что *достижение горизонта M означает, что текущий банк больше или равен M , то есть необходимо учитывать возможность такого «перескока»*. Если не учитывать этого обстоятельства, то легко получить приближенные формулы: $U_m^M = (M-m)(1-W_m^M)$, $E_m^M = M(1-W_m^M)$. Однако их применение оправдано только при малых k_{\max} . Между тем в азартных играх специально вводятся крупные (хотя и маловероятные) выигрыши, которые часто и приводят к победе.

Например, в слот-машине (которая будет подробно рассмотрена позже) $U_{100}^{1000} = 27.09$, тогда как приближенная формула дает 23.47. Однако отметим, что эти формулы способны лишь *занижать* результаты, поэтому могут служить удобной для вычисления и достаточно точной оценкой *снизу* для средних выплат.

Для нахождения точного решения проведем следующие рассуждения. Обозначим через S_i ($i = 0, \dots, k_{\max}-1$) *вероятности поглощения* в точках $M+i$ при игре с начальным капиталом m , то есть вероятности того, что банк игрока станет ровно $M+i$ (не путайте с вероятностью достижения!). Понятно, что $\sum_{i=0}^{k_{\max}-1} S_i = 1 - W_m^M$, так как поглощение в точках $M+i$ ($i = 0, \dots, k_{\max}-1$) означает выигрыш игрока.

Оказывается, что вероятности поглощения можно вычислить по вероятностям разорения W .

Теорема 1. Значения S_i могут быть найдены решением следующей системы уравнений:

$$S_i W_{M+i}^{M+i+1} + \sum_{j=0}^{i-1} S_j (W_{M+j}^{M+i+1} - W_{M+j}^{M+i}) = W_m^{M+i+1} - W_m^{M+i}, \text{ где } i = 0, \dots, k_{\max}-1. \quad (2)$$

Доказательство. Доказательство будет проведено по следующей схеме. Мы рассмотрим игру с начальным капиталом m и горизонтом $M+i$; рассмотрим вероятность поглощения в точке $M+i$, а далее вычтем из нее вероятность поглощения в этой точке из начальных позиций $M+1, \dots, M+i-1$. Таким образом мы получим вероятность поглощения в точке $M+i$ для игры с начальным капиталом m и горизонтом M .

Вероятность поглощения в точке $M+i$ равна вероятности достижения точки $M+i$ минус вероятность достижения точки $M+i+1$. Вероятность достижения точки $M+i$ равна вероятности неразорения из точки m до точки $M+i$ (то есть $1 - W_m^{M+i}$) минус вероятности достижения точки $M+i$ из точек $M, \dots, M+i-1$, которые, в свою очередь, равны $S_j (1 - W_{M+j}^{M+i})$, $j=0, \dots, i-1$. Аналогичное выражение получим для вероятности достижения точки $M+i+1$. Итак,

$$S_i = (1 - W_m^{M+i}) - \sum_{j=0}^{i-1} S_j (1 - W_{M+j}^{M+i}) - (1 - W_m^{M+i+1}) + \sum_{j=0}^i S_j (1 - W_{M+j}^{M+i+1}).$$

Приводя подобные слагаемые, получаем систему (2).

QED.

Отметим, что выражения $S_j (W_{M+j}^{M+i+1} - W_{M+j}^{M+i})$ малы по свойствам вероятности поглощения S_j и свойствам вероятностей разорения. Поэтому можно получить приближенные формулы для вычисления вероятностей поглощения:

$$S_i = \frac{W_m^{M+i+1} - W_m^{M+i}}{W_{M+i}^{M+i+1}}, \quad i = 0, \dots, k_{\max}-1.$$

Заметим, что эта оценка является оценкой *сверху*.

Теперь выразим средние выплаты через вероятности поглощения:

$$U_m^M = -mW_m^M + \sum_{i=0}^{k_{\max}-1} S_i (M+i-m), \quad E_m^M = -mW_m^M + \sum_{i=0}^{k_{\max}-1} S_i (M+i).$$

Итак, для нахождения средних выплат получены точные формулы, а также весьма удобные оценки сверху и снизу.

Далее, так как $k_{\min} = -1$, то система уравнений (1) для нахождения вероятностей разорения выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} p_0 - 1 & p_1 & p_2 & \dots & p_{M-2} \\ p_{-1} & p_0 - 1 & p_1 & \dots & p_{M-3} \\ 0 & p_{-1} & p_0 - 1 & \dots & p_{M-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & p_{-1} & p_0 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^M \\ W_2^M \\ W_3^M \\ \dots \\ W_{M-1}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{-1} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в результате решения системы мы получаем вероятности разорения при различных начальных банках, но одинаковом горизонте. На практике, однако, необходимо изучать также зависимость вероятности разорения от изменения горизонта при одинаковом начальном банке. Формально для этого надо решать $M-1$ систем уравнений размерности $M-1$. Однако этого можно избежать. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. В случае игры с $k_{\min} = -1$ верно следующее:

$$W_m^M = \frac{W_{N-M+m}^N}{W_{N-M}^N}, \text{ где } N > M \text{ и } 0 < m < M.$$

Доказательство. Запишем систему для нахождения вероятностей разорения при горизонте M в следующем виде

$$p_{-1}W_{i-1}^M + (p_0 - 1)W_i^M + \dots + p_{M-i-1}W_{M-1}^M = 0, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (3)$$

Аналогично напомним систему для нахождения вероятностей разорения при горизонте N :

$$p_{-1}W_{k-1}^N + (p_0 - 1)W_k^N + \dots + p_{N-k-1}W_{N-1}^N = 0, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (4)$$

Рассмотрим уравнения этой системы с номерами $N-M+1, \dots, N-1$:

$$p_{-1}W_{N-M+l-1}^N + (p_0 - 1)W_{N-M+l}^N + \dots + p_{M-l-1}W_{N-1}^N = 0, \quad l = 1, \dots, M-1. \quad (5)$$

Теперь поделим уравнения системы (5) на W_{N-M}^N :

$$p_{-1} \frac{W_{N-M+l-1}^N}{W_{N-M}^N} + (p_0 - 1) \frac{W_{N-M+l}^N}{W_{N-M}^N} + \dots + p_{M-l-1} \frac{W_{N-1}^N}{W_{N-M}^N} = 0, \quad l = 1, \dots, M-1. \quad (6)$$

Заметим, что линейная система уравнений (3) относительно переменных W_m^M ($m = 1, \dots, M-1$), совпадает с системой уравнений (6), рассмотренной

относительно переменных $\frac{W_{N-M+m}^N}{W_{N-M}^N}$ ($m = 1, \dots, M-1$). Из единственности решения

системы (3) вытекает совпадение значений соответствующих переменных, то есть справедливо $W_m^M = \frac{W_{N-M+m}^N}{W_{N-M}^N}$.

QED.

Поэтому для нахождения W_m^M , где $0 < m < M < N$, достаточно вычислить только все W_k^N ($0 < k < N$).

Однако аналогичные выражения для длины партии не могут быть получены в силу неоднородности уравнений для них. Тем не менее, расчет длины партии даже при больших горизонтах не занимает много времени.

Выражения для средних выплат U и E через S_i остаются теми же. Однако теперь S_i могут быть вычислены, используя результат предыдущей теоремы, что существенно облегчает процесс расчета.

Приведенные выше выкладки делают метод весьма удобным для его реализации на компьютере.

3. Численный анализ игры на слот-машине

Пусть для игры используется одноуровневая слот-машина (см. [2.Epstein R. The Theory of Gambling and Statistical Logic. Academic Press Inc., 1977.]), которая с некоторыми вероятностями p_{-1}, p_0, \dots выдает числа $-1, 0, \dots$, обозначающие изменение банка игрока на данном шаге. Начальный банк игрока — m единиц, горизонт игры — M единиц.

Для слот-машины значения вероятностей имеют следующие значения:

	p_k	k	p_k	k	p_k
-1	0.83584655	9	0.00269257	99	0.00000338
0	0.00000000	14	0.00406693	199	0.00048028
1	0.08811937	19	0.00071804	399	0.00011780
4	0.03731921	39	0.00088856	999	0.00001122
7	0.02926872	79	0.00046737		

Математическое ожидание приращения банка игрока $\sum_k k p_k = -0.073059$.

Построим графики вероятности разорения, средней длины партии и средних выплат. Приводятся графики зависимости этих величин от M при фиксированном $m=100$ и зависимости от m при фиксированном $M=1000$.

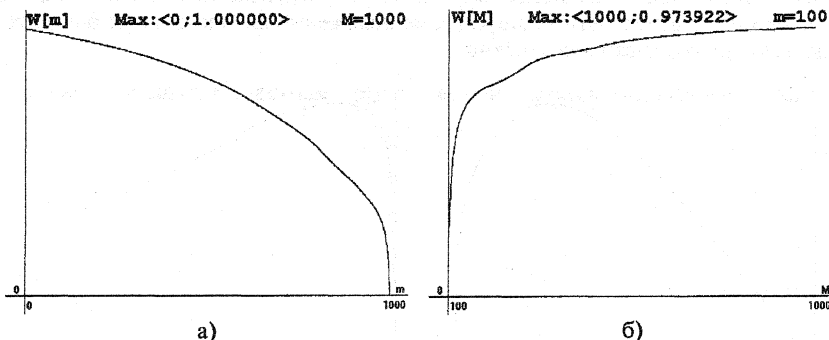


Рис. 1

Вероятность разорения $W^M(m)$ плавно уменьшается с ростом m , а при приближении m к M резко падает. В свою очередь, вероятность разорения $W_m(M)$ стремится к единице при увеличении горизонта игры M . Отметим, что на этом графике наблюдаются некоторые флуктуации, вызванные специфическим распределением вероятностей p_k . На графиках для игры орел-решка никаких флуктуаций не наблюдается. Поэтому уже на графиках вероятностей разорения видно существенное различие моделей с одним выигрышем и с несколькими выигрышами.

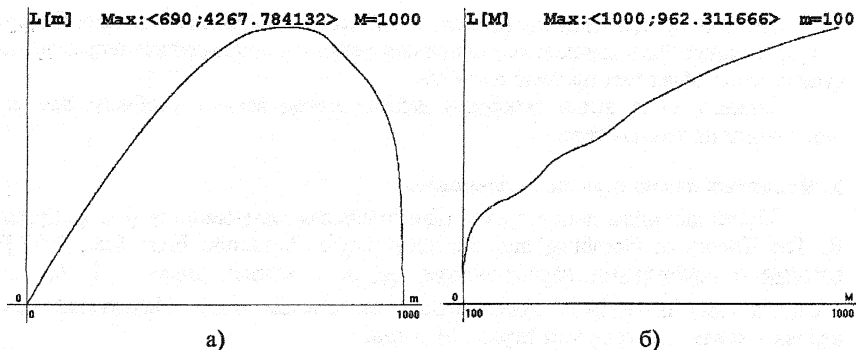


Рис. 2

Длина партии $L^M(m)$ сначала линейно возрастает с ростом m , а потом, достигнув максимума в точке $m=690$, начинает убывать. Поведение кривой легко объясняется. При маленьких m игрок почти всегда проигрывает, поэтому длина партии – это длина пути к проигрышу, которая возрастает линейно с ростом m . При дальнейшем увеличении m игрок начинает более часто выигрывать, и игра заканчивается раньше, поэтому при переходе через максимум длина партии быстро стремится к нулю. Положение максимума – это точка, начиная из которой, игрок «топчется на месте», не достигая ни левой, ни правой границы. Вероятность разорения в точке максимума составляет $2/3$.

Длина партии $L_m(M)$ растет (опять же с флуктуациями!) с ростом M и имеет асимптоту ≈ 1368 (это видно, если просчитать с более большим горизонтом (около 5000); однако на таком графике плохо различимо начало). Это значение соответствует длине пути проигрыша из положения m , так как при больших M выиграть практически невозможно.

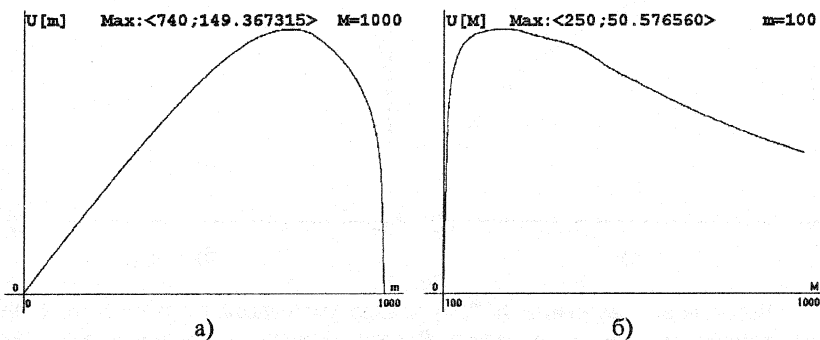


Рис. 3

Из графика для средней выплаты $U^M(m)$ видно, что не стоит играть до слишком большого горизонта, а если и играть, то начиная с маленьких(!) m ($U^M(m)/m$ достигает максимума 27% при $m=1$).

В случае, если m фиксировано, то существует максимум $U_m(M)$. Например, в нашем случае при $m=100$ соответствующее значение горизонта будет $M=250$. Это значение является оптимальным, и играя с начальным банком

$t=100$ до горизонта $M=250$, мы достигнем максимального среднего выигрыша. Таким образом, для этого случая мы имеем вполне определенную оптимальную стратегию.

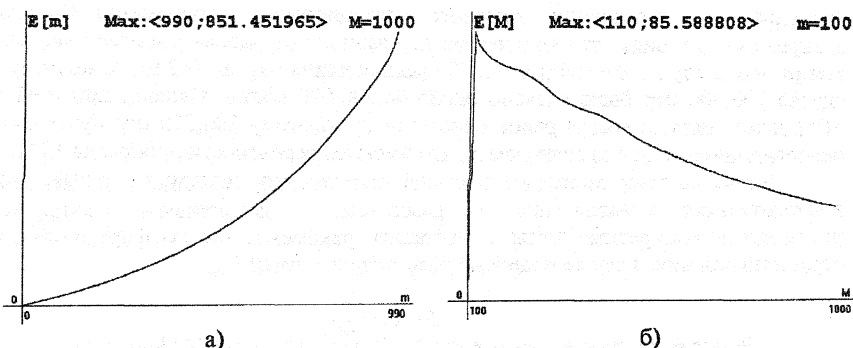


Рис. 4

Для E , однако, ситуация иная. Оба графика показывают, что имеет смысл играть при $M = t + 1$. Таким образом, в этом случае стратегия такая: *выиграл одну единицу, кончай игру, забирай выигранную единицу в «карман» и далее ставь опять t ; в случае проигрыша одной единицы играй дальше.*

Но какое t брать? Детальное изучение результатов работы программы показывает, что оптимальное $t=11$ (соответственно $M=12$). При этом средний выигрыш достигает 93.554%.

Итак, мы имеем вполне определенные стратегии в каждом из двух случаев. Однако напрямую реализация их на практике может быть невозможна, так как в играх чаще всего имеются ограничения на возможные значения t и M . Тем не менее в этом случае мы также сможем выбрать из допустимых значений оптимальный.

Для проверки теоретических результатов был поставлен имитационный эксперимент. Была разработана программа, имитирующая процесс игры с подсчетом результатов, в которой распределение вероятностей выигрышей формировалось стандартным образом с помощью генератора случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $[0;1]$.

Приведем для сравнения результаты теории и эксперимента:

Вычисляемые значения для $t=100, M=1000$	Теоретический расчет	Имитационный эксперимент		
		10000 игр	100000 игр	1 млн. игр
W	0.973922	0.972900	0.974000	0.973981
L	962.311666	976.903100	964.829050	958.652536
U	27.086686	28.249800	27.108970	27.057433
E	29.694472	30.959800	29.708970	29.659333

Видно, что результаты имитационного эксперимента несильно отличаются от теоретического расчета. Однако теоретический результат был получен за 1

секунду, тогда как для проведения имитационного эксперимента из миллиона игр потребовались бы десятки минут.

Приведенная таблица также позволяет ответить, какого количества игр достаточно для проведения надежного имитационного эксперимента. Однако, следует иметь в виду, что количество игр зависит от рассматриваемой модели. Например, в случае $m=100$ и $M=1000$ средняя длина партии 962 шага, поэтому в случае 100,000 игр было сделано около 96,200,000 шагов. Однако, при $m=1$ и $M=2$ длина партии всегда равна одному шагу, поэтому 100,000 игр будет явно недостаточно (особенно если учесть, что имеются вероятности p_k порядка 10^{-6}).

Итак, на этих примерах показана возможность успешного применения компьютерного анализа игр на разорение. В дальнейшем планируется рассмотреть конкретные игры и составить рекомендации по формированию стратегий для них, а также подробно рассмотреть случай $k_{\min} < -1$.

Литература

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
2. Epstein R. The Theory of Gambling and Statistical Logic. Academic Press Inc., 1977.