В.С. Левченков, Л.Г. Левченкова

УПОРЯДОЧЕНИЕ ИГРОКОВ ПО "СИЛЕ" В ВЕСОВЫХ СИСТЕМАХ ГОЛОСОВАНИЯ: МЕТОД МУЛЬТИОТНОШЕНИЙ

Введение

Проблема определения понятия и вычисления конкретных значений влиятельности ("силы") участников в системах с коллективным принятием решений, изначально трактующих этих участников ("игроков") как неравноправных, привлекла значительное внимание специалистов по теории игр, особенно после выхода в свет статьи Банзафа [1]. С течением времени было предложено значительное число подходов к решению этой задачи, среди которых отметим работы Шепли и Шубика [2], Колемана [3], Дигана и Паккеля [4], Джонстона [5] и Рея [6]. Для определения понятия "силы игрока" эти работы, в основном, использовали идеи кооперативной теории игр, в частности, ставили во главу угла понятие выигрывающей коалиции. Это и неудивительно, поскольку система голосования с весами (для краткости будем называть ее далее ВГ-схемой) предполагает только два возможных действия со стороны участника: он может проголосовать "за" или "против" рассматриваемого данным органом предложения. Это приводит к естественному разбиению игроков на две непересекающиеся совокупности ("коалиции"), участники которых все голосуют либо "за", либо "против" предложения. По регламенту не более чем одна коалиция может оказаться победителем, если ее участники набирают общее число голосов, превышающее заранее определенный порог – "квоту" ВГ-схемы.

Формально, пусть $v = (v_1, \ldots, v_n)$ – вектор весов участников ВГ-схемы: каждая компонента v_i принадлежит множеству неотрицательных целых чисел Z_+, а индекс i пробегает конечное множество $\{1, \ldots, n\}$ номеров участников $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ВГ-схемы. Вес коалиции $C \subset V$ определяется согласно соотношению

$$v(C) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \sum_{a_i \in C} v_i. \qquad (1)$$

Величина Q удовлетворяет естественным ограничениям

$$\frac{1}{2}v(V) < Q \leq v(V). \tag{2}$$

Коалиция C называется выигрывающей, если ее вес оказывается не меньше, чем квота Q ВГ-схемы

$$v(C) \geq Q.$$

ВГ-схему с вектором весов $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и квотой Q мы будем для компактности обозначать как $(v_1, v_2, \ldots, v_n|Q)$ (или кратко $(v|Q)$).

Естественной характеристикой, описывающей свойство коалиции быть выигрывающей, является множество mW – совокупность минимальных выигрывающих коалиций (*мвк*-множество)

$$mW = \{C \subset V : \; v(C) \geq Q \& \forall a \in C \quad v(C \setminus \{a\}) < Q\}. \tag{3}$$

Очевидно, любая коалиция, включающая в себя одну из минимальных выигрывающих коалиций, будет выигрывающей.

В работах [1-6] для определения индекса силы игрока использовалась, по-существу, только структура множества выигрывающих коалиций, которая, как было быстро понято, допускает широкие вариации весов игроков.

Пример 1. Пусть $V = \{a_1, a_2, a_3\}$, а $mW = \{\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}\}$. Легко убедиться, что mW будет *мвк*-множеством для следующих различных ВГ-схем:

$(2, 1, 1|3), (11, 7, 7|18), (13, 6, 6|19), (100, 1, 1|101)$.

Таким образом, распределение весов в ВГ-схеме неоднозначно связано со структурой множества выигрывающих коалиций, и на первый взгляд, численные значения этих весов не могут служить основой для построения эффективного индекса силы игроков.

В работах [7-8] был сформулирован другой подход к решению этой задачи и был предложен оптимизационный метод нахождения индекса силы, основанного на весах игроков, которые они принимают в специальной ВГ-схеме, эквивалентной исходной.

В данной работе мы кратко изложим оптимизационный подход и дополним его новой возможностью: построим индекс силы, опираясь на бинарную информацию, оценивающую силу игрока по его вхождениям в элементы множества выигрывающих коалиций. Для такой оценки мы применим метод мультиотношений, разработанный ранее в теории выбора [9].

1. Оптимизационный подход к проблеме построения индекса силы в ВГ-схеме

Пусть E – конечное множество участников голосования ($|E| = n$), а основой для принятия решения служит мажоритарное правило: решение, набравшее более половины голосов, принимается. В терминах ВГ-схемы эта система голосования описывается вектором весов $v^e = (1, \ldots, 1)$ и квотой $Q_e = [\frac{n}{2}] + 1$ (здесь $[\alpha]$ – целая часть действительного числа α).

Множество минимальных выигрывающих коалиций (*мвк*-множество) mW^e в силу принципа равноправия и мажоритарного правила включает все подмножества из E мощностью Q_e: $mW^e = \{C \subset E : |C| = Q_e\}$.

Предположим, что участники из множества E разбились на k непересекающихся групп E_i $(i = 1, \ldots, k)$, согласованно голосующих внутри каждой группы.

- $E = \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i; \qquad i \neq j \Rightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$
- каждая группа E_i подает $v_i = v^e(E_i) = |E_i|$ голосов "за" или "против" предложения, поставленного на голосование.

В результате, исходная однородная система голосования $(1, ..., 1|Q_e)$ превращается в ВГ-схему $(v|Q_e)$ с новым множеством участников $V = \{a_1, \ldots, a_k\}$, где каждое a_i служит для обозначения группы избирателей E_i. В соответствии с определением *мвк*-множество mW этой системы голосования имеет вид

$$mW = \{C \subset V : v(C) \geq Q_e \& \forall a \in C \quad v(C \setminus \{a\}) < Q_e\}. \qquad (5)$$

Введем в рассмотрение интервал $[Q_+^{min}, Q_+^{max}]$, в котором находятся веса коалиций, принадлежащих mW. Здесь

$$Q_+^{max} = \max_{C \in mW} v(C), \qquad Q_+^{min} = \min_{C \in mW} v(C). \qquad (6)$$

Для случая mW^e этот интервал сводится к единственному значению Q_e.

Аналогично *мвк*-множеству, определим совокупность ML – множество *максимальных проигрывающих коалиций* (*мпк*-множество)

$$ML = \{C \subset V : \ v(C) < Q_e \& \forall a \in V \setminus C \ \ v(C \cup \{a\}) \geq Q_e\}. \qquad (7)$$

Множества из ML также могут быть охарактеризованы интервалом разброса их весов $[Q_-^{min}, Q_-^{max}]$, где

$$Q_-^{max} = \max_{C \in ML} v(C), \qquad Q_-^{min} = \min_{C \in ML} v(C). \qquad (8)$$

Для однородной системы голосования этот интервал опять сводится к одной точке $(Q_e - 1)$.

Веса множеств из mW и ML оказываются разделены некоторым положительным числом Δ, которое будем называть щелью ВГ-схемы:

$$\Delta = Q_+^{min} - Q_-^{max} \geq 1. \tag{9}$$

Для однородной системы голосования $\Delta = 1$. Если $\Delta > 1$, то квота Q такой ВГ-схемы не одозначна в следующем смысле: выбирая в качестве Q любое целое число, принадлежащее отрезку $(Q_-^{max}, Q_+^{min}]$, мы сохраним структуру *мвк*- и *мпк*-множеств неизменной. Величина квоты в ВГ-схеме допускает вариации в пределах $(\Delta - 1)$, простираясь от $(Q_-^{max} + 1)$ до Q_+^{min}. Для определенности мы зачастую будем называть квотой ВГ-схемы число Q_+^{min}.

Пусть $(v|Q)$ – некоторая ВГ-схема с множеством участников $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Будем считать, что элементы множества V занумерованы согласно убыванию их весов, т.е. выполнено $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_n \geq 1$.

Лемма 1. Справедливо следующее неравенство:

$$\max\{(Q_-^{max} - Q_-^{min}), (Q_+^{max} - Q_+^{min})\} \leq v_1 - \Delta. \tag{10}$$

Далеко не все участники ВГ-схемы, имея ненулевой вес , могут оказывать влияние на исход голосования в ней.

Определение 1. Назовем участника $a \in V$ (голосующего согласно ВГ-схеме $(v|Q)$ с *мвк*-множеством mW) *структурно пассивным*, если он не входит ни в одну коалицию из mW, т.е. для него выполнено $\forall C \in mW \quad C \setminus \{a\} = C$.

Игрока, не являющегося структурно пассивным, назовем активным, а множество всех активных игроков будем обозначать $\hat{V}$.

Пример 2. Пусть ВГ-схема имеет вид $(3, 2, 1|5)$, ее множество участников $V = \{a_1, a_2, a_3\}$, $mW = \{a_1 a_2\}$. Согласно определению, игрок a_3 структурно пассивен.

В однородной системе голосования все участники активны, будучи равноправными и имея одинаковый вес.

Теорема 1. Если в ВГ-схеме $(v|Q)$ все игроки активны и максимальный вес v_1 совпадает со щелью $(v_1 = \Delta)$, то все участники этой ВГ-схемы имеют одинаковые веса, т.е. являются равноправными.

Для любой ВГ-схемы размер ее щели не превосходит веса любого активного игрока, т.е. справедливо

$$\Delta \le \min_{a \in \hat{V}} v(a). \tag{11}$$

Определение 2. Две ВГ-схемы с множествами активных участников $\hat{V}_1$ и $\hat{V}_2$ назовем *структурно-изоморфными*, если они имеют одинаковое число активных игроков, а их *мвк*-множества совпадают (после отождествления $\pi: \hat{V}_1 \to \hat{V}_2$ соответствующих активных участников).

Структурный изоморфизм ВГ-схем $(v^1|Q_1)$ и $(v^2|Q_2)$ будем обозначать как $(v^1|Q_1) \stackrel{\pi}{\sim} (v^2|Q_2)$.

Лемма 2. Отношение структурной изоморфности $\stackrel{\pi}{\sim}$ является отношением эквивалентности на множестве всех ВГ-схем.

Любой ВГ-схеме $(v^0|Q_0)$ сопоставляется целый класс $S(v^0|Q_0)$ структурно изоморфных ей ВГ-схем.

Будем помещать в класс $S(v^0|Q_0)$ только те структурно изоморфные $(v^0|Q_0)$ ВГ-схемы $(v|Q)$, у которых Q связаны с распределением весов согласно правилу

$$Q \stackrel{def}{=} Q(v) = \min_{C \in mW} v(C). \tag{13}$$

Фиксируем некоторую ВГ-схему $(v|Q)$: пусть $\hat{V}$ – множество активных игроков, а mW – ее *мвк*-множество. Рассмотрим перестановку σ_{ab} элементов $\hat{V}$ такую, что $\sigma_{ab}(a) = b; \quad \sigma_{ab}(b) = a; \quad \forall c \in \hat{V} \setminus \{a, b\} \quad \sigma_{ab}(c) = c.$

Определение 3. Будем говорить, что активные участники a и b *равноправны по отношению к мвк-множеству* mW (или сокращенно, *равноправны*), если σ_{ab} порождает взаимнооднозначное отображение (биекцию) mW на себя: для любого подмножества $C \subset \hat{V}$

$$(C \in mW) \Leftrightarrow (\sigma_{ab}(C) \in mW), \tag{14}$$

где, как обычно, $\sigma_{ab}(C) = \{\sigma_{ab}(d)\}_{d \in C}$.

Лемма 3. Пусть в ВГ-схеме $(v|Q)$ участники $a, b \in \hat{V}$ равноправны. Тогда существует ВГ-схема $(v'|Q)$ с тем же множеством активных участников и той же квотой, которая будет структурно изоморфна исходной ВГ-схеме, а участники a и b имеют в ней совпадающие веса: $v'(a) = v'(b)$.

Определение 4. Назовем ВГ-схему $(v|Q)$ *правильной*, если ее вектор весов v имеет одинаковые значения для любой пары равноправных участников.

Определение 5. Класс ВГ-схем $\hat{S}(v|Q)$, структурно изоморфных $(v|Q)$, назовем *приведенным*, если любая $(v'|Q') \in \hat{S}(v|Q)$ является правильной ВГ-схемой.

Лемма 4. Для любой ВГ-схемы $(v|Q)$ класс $\hat{S}(v|Q)$ не пуст.

Пример 3. Пусть $V = \{a_1, a_2, a_3\}$ и ВГ-схема имеет вид $(v|Q) = (49, 48, 3|51)$. Ее *мвк*-множество легко находится: $mW = \{a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3\}$. Таким образом все участники этой ВГ-схемы равноправны, а $\hat{S}(v|Q) = \{(1,1,1|2)\}$, т.е. сводится, по-существу, к единственному элементу.

Пусть $\hat{V}$ – множество всех активных игроков, введем в рассмотрение функцию $\Psi_W(x)$, значения которой показывают число вхождений активного игрока $x \in \hat{V}$ в выигрывающие коалиции

$$\Psi_W : \hat{V} \to Z_+, \quad \Psi_W(a) = \sum_{A \in W} \chi^A(a), \tag{15}$$

где $W = \{A \subset \hat{V} : \quad v(A) \geq Q\}$; χ^A – характеристическая функция множества A, т.е.

$$\chi^A(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A \\ 0, & a \in \bar{A}. \end{cases}$$

Лемма 5. Пусть в ВГ-схеме $(v|Q)$ активные участники a и b равноправны. Тогда $\Psi_W(a) = \Psi_W(b)$.

Определение 6. Будем говорить, что участник $a \in \hat{V}$ *структурно не слабее* участника b (обозначение aR_Wb), если число выигрывающих коалиций, которые он может образовывать с другими участниками, не меньше соответствующего числа для b.

Отношение R_W связано с функцией Ψ_W стандартным образом

$$aR_Wb \Leftrightarrow \Psi_W(a) \geq \Psi_W(b). \tag{16}$$

Другое естественное отношение слабого порядка R_v на V порождается вектором весов v участников

$$aR_vb \Leftrightarrow v(a) \geq v(b). \tag{17}$$

Теорема 2. Отношения R_W и R_v совпадают тогда и только тогда, когда ВГ-схема $(v|Q)$ правильная.

Из теоремы 2 также вытекает, что только для правильных ВГ-схем вес участника качественно соответствует его силе, связанной с числом вхождений в выигрывающие коалиции. Поэтому поиск индекса силы, определяемого весом участника, следует искать в множестве $\hat{S}(v|Q)$ правильных ВГ-схем, структурно эквивалентных исходной ВГ-схеме $(v|Q)$. Проверка правильности ВГ-схемы сводится при этом к вычислению значений ее функции Ψ_W : если все элементы, на которых она постоянна, имеют одинаковый вес, то ВГ-схема правильная.

Если в одной из $(v'|Q') \in \hat{S}(v|Q)$ для элементов a и b выполнено соотношение $v'(a) > v'(b)$, то и в любой другой ВГ-схеме $(v''|Q'') \in \hat{S}(v|Q)$ будет также выполнено $v''(a) > v''(b)$. Это свойство приведенного класса структурно изоморфных ВГ-схем назовем *строгой монотонностью.*

Определение 7. ВГ-схема v^* называется *точкой конденсации* правильного класса ВГ-схем $\hat{S}(v^0|Q^0)$, если она лежит в этом классе и ее вектор весов v^* является решением следующей задачи минимизации

$$\begin{gathered} (v_1 - \Delta) \to \inf \\ v \in \hat{S}(v^0|Q^0). \end{gathered} \tag{18}$$

Поскольку точка конденсации v^* среди ВГ-схем из $\hat{S}(v^0|Q^0)$ наиболее близка к однородной системе голосования, используем веса $v^*(a)$ игроков из множества V активных участников ВГ-схемы $(v^0|Q^0)$ для построения весового индекса силы $h(a)$ и квотного индекса $g(a)$

$$\forall a \in V \quad h(a) = v^*(a)/v^*(V), \tag{19}$$

$$g(a) = v^*(a)/Q^*, \tag{20}$$

$$Q^* = Q(v^*). \tag{21}$$

Пример 4. Рассмотрим ВГ-схему $(v^0|Q^0) = (50, 49, 1|51)$ с множеством игроков $V = \{a_1, a_2, a_3\}$, каждый из которых активен.

Множества mW, W и ML для этой системы голосования имеют следующий вид: $mW = \{a_1a_2,\ a_1a_3\}$, $W = mW \cup V$, $ML = \{a_1, a_2a_3\}$. Функция Ψ_W принимает следующие значения: $\Psi_W(a_1) = 3$, $\Psi_W(a_2) = \Psi_W(a_3) = 2$.

Точка конденсации $v^* = (2,1,1)$, ВГ-схема имеет вид $(v^*|Q^*) = (2,1,1|3)$. Весовой индекс силы участников $h = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, а квотный индекс равен $g = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Индексы Банзафа (B) и Шепли-Шубика (SS) (см., например, [10]) для ВГ-схемы $(50,49,1|51)$ принимают следующие значения:

$$B = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), \quad SS = \left(\frac{4}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right).$$

Легко подсчитать, что индекс B совпадает с весовым индексом для ВГ-схемы $(3,1,1|4)$, а SS – с аналогичным индексом для $(4,1,1|5)$. Соответствующие ВГ-схемы лежат в $\hat{S}(v^0|Q^0)$, но менее близки к однородным системам голосования, чем ВГ-схема $(2,1,1|3)$.

Пример 5. Исследуем ВГ-схему $(v^0|Q^0) = (2,1,1,1|3)$ с множеством участников $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и *мвк*-множеством $mW = \{a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3a_4\}$. Функционал $(v_1 - \Delta)$ для исходной ВГ-схемы равен 1, то есть совпадает с минимально возможным значением, и значит $(2,1,1,1|3)$ – точка конденсации соответствующего класса ВГ-схем. Индекс Банзафа для $(2,1,1,1|3)$ совпадает с индексом Шепли-Шубика и равен $\left(\frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. После умножения на 6 он приводит к весовому вектору $(3,1,1,1)$. Однако, ни при какой квоте ВГ-схема $(3,1,1,1|Q)$ не лежит в $\hat{S}(2,1,1,1|3)$.

2. Упорядочение игроков по "силе" в ВГ-схемах

Пусть $(v|Q)$ – весовая система голосования, $v = (v(a_i))_{i=1}^n$ – вектор весов множества $V = \{a_1, \ldots, a_n\}$ активных игроков, Q – квота, W – множество всех выигрывающих коалиций ВГ-схемы, $\Psi_W(a)$ – количество вхождений (15) игрока $a \in V$ в различные выигрывающие коалиции. При оценке силы игроков в ВГ-схеме $(v|Q)$ ранее мы ввели два бинарных отношения R_W и R_v (см. (16) и (17)), оценивающих "относительную силу" пары игроков из V. Заметим, что такого же типа оценку позволяет осуществить каждая коалиция $C \in W$. Для обнаружения этого рассмотрим следующее бинарное отношение R_C на V: неформально положим, что $aR_Cb \Leftrightarrow$ "коалиция C признает, что участие игрока a в голосовании вносит в победу этой коалиции не меньший вклад, чем участие в голосовании игрока b". Характеристическую функцию отношения R_C выберем в виде

$$R_C(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \notin C \& b \in C, \\ 1, \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{22}$$

Собирая такие отношения в единую совокупность, мы получаем возможность построения другой оценки парного соотношения сил участников на основе информации $\{R_C\}_{C \in W}$, которая в теории коллективного выбора называется профилем бинарных отношений. Согласно методу мультиотношений [9] эта информация позволяет построить отношение слабого порядка на множестве активных игроков V. Для этого от профиля $\{R_C\}_{C \in W}$ необходимо перейти к профилю мультиотношений $\{m_C\}_{C \in W}$, где каждое мультиотношение $m_C(a,b)$, $a, b \in V$, $a \neq b$, связано с $R_C(a,b)$ соотношением

$$m_C(a,b) = \frac{2R_C(a,b)}{R_C(a,b) + R_C(b,a)}, \tag{23}$$

т.е.

$$m_C(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \notin C \& b \in C \\ 1, \text{ если } a, b \in C \vee a, b \notin C \\ 2, \text{ если } a \in C \& b \notin C. \end{cases} \tag{24}$$

Отношения (24) сворачиваются в единое мультиотношение

$$m(a,b) = \sum_{C \in W} m_C(a,b) \tag{25}$$

и на его основе строится специальная матрица $T = (t_{ab})_{a,b \in V}$, элементы которой имеют вид

$$t_{ab} = \begin{cases} m(b,a), & \text{если} \quad a \neq b \\ \sum\limits_{z \in V \setminus \{a\}} m(a,z), & \text{если} \quad b = a. \end{cases} \tag{26}$$

Для неразложимой матрицы упорядочение элементов множества V по методу мультиотношений [9] определяется скалярным критерием $\sigma = (\sigma(x))_{x \in V}$, значения которого находятся из следующей системы уравнений

$$\sum_{x \in V} \sigma(x) = 1; \quad \sigma T = \lambda_0 \sigma, \tag{27}$$

где λ_0 – максимальное собственное значение неотрицательной матрицы T.

Лемма 6. Матрица T, элементы которой связаны с мультиотношением (25) соотношениями (26), неразложима и имеет постоянную строчную сумму.

Доказательство. Заметим, что элемент профиля мультиотношений $m_C(a,b)$ связан с характеристической функцией $\chi^C(x)$ множества игроков $C \in W$ соотношением

$$m_C(a,b) = 1 + \chi^C(a) - \chi^C(b). \tag{28}$$

Действительно, значения $m_C(a,b)$, вычисляемые согласно (28), совпадают с соответствующими значениями в (24).

Подставляя (28) в (25), для $m(a,b)$ находим

$$m(a,b) = w + \Psi_W(a) - \Psi_W(b), \tag{29}$$

где $w = |W|$ – число выигрывающих коалиций в ВГ-схеме $(v|Q)$.

Замечая теперь, что $\forall a \in V \ \Psi_W(a) \leq w \& \Psi_W(a) > 0$, получим, что все элементы матрицы T положительны, т.е. она неразложима.

Строчная сумма матрицы T, отвечающая строке с номером x имеет вид

$$\sum_{y \in V} t_{xy} = t_{xx} + \sum_{y \in V \setminus \{x\}} t(x,y) = \sum_{z \in V \setminus \{x\}} m(x,z) + \sum_{y \in V \setminus \{x\}} m(y,x) =$$

$$= \sum_{z \in V \setminus \{x\}} (m(x,z) + m(z,x)) = \sum_{z \in V \setminus \{x\}} \sum_{C \in W} (m_C(x,y) + m_C(z,x)) =$$

$$= 2w(|V| - 1),$$

где $|V|$ – число элементов в множестве V. *Q.E.D.*

Таким образом, из этой леммы следует, что скалярный критерий $\sigma(x)$, упорядочивающий элементы множества V, действительно следует искать на основе системы уравнений (27). Оказывается, что устанавливаемое им упорядочение можно находить более простым способом.

Теорема 3. Скалярный критерий $\sigma(x)$, удовлетворяющий (27), является строгим монотонным преобразованием функции $\Psi_W(x)$:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in V \qquad & \Psi_W(x) \geq \Psi_W(y) \Leftrightarrow \sigma(x) \geq \sigma(y) \\ & \Psi_W(x) = \Psi_W(x) \Leftrightarrow \sigma(x) = \sigma(y). \end{aligned} \tag{30}$$

Доказательство. Из леммы 6 следует, что матрица T имеет постоянную строчную сумму, равную $2w(n-1)$, $n = |V|$. Согласно теореме Фробениуса-Перрона [11], в этом случае максимальное собственное значение матрицы T равно $\lambda_0 = 2w(n-1)$, т.е. критерий $\sigma(x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{z\in V} \sigma(z)t_{zx} = 2w(n-1)\sigma(x). \tag{31}$$

Из этой системы, зафиксировав неравные друг другу элементы x и y, выделим два уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{z\neq x,y} t_{zx}\sigma(z) + t_{yx}\sigma(y) &= \sum_{z\neq x} t_{xz}\sigma(x) \\ \sum_{z\neq x,y} t_{zy}\sigma(z) + t_{xy}\sigma(x) &= \sum_{z\neq y} t_{yz}\sigma(y). \end{aligned} \tag{32}$$

Заметим, что если для выбранных x и y выполнены условия

(a) $t_{yx} \geq t_{xy}$,

(b) $\forall z \in V \setminus \{x, y\} \quad t_{zx} \geq t_{zy}$,

то из (32) вытекает соотношение $\sigma(x) \geq \sigma(y)$.

Действительно, используя положительность $\sigma(z)$ и условие (b), после вычитания в (32) из первого уравнения второго, получим следующее неравенство

$$\sigma(x)\left(\sum_{z\neq x} t_{xz} + t_{xy}\right) \geq \sigma(y)\left(\sum_{z\neq y} t_{yz} + t_{yx}\right).$$

Согласно предположениям (a) и (b)

$$\sum_{z\neq x} t_{xz} = \sum_{z\neq x} (2w - t_{zx}) =$$

$$= -t_{yx} + \sum_{z\neq x,y} (2w - t_{zx}) \leq -t_{xy} + \sum_{z\neq x,y} (2w - t_{zy}) = \sum_{z\neq y} t_{yz},$$

и значит

$$\sigma(x) \geq \sigma(y).$$

Заметим теперь, что если $\Psi_W(x) \geq \Psi_W(y)$, то согласно (26), (29) условия (a) и (b) будут выполнены, т.е.

$$\Psi_W(x) \geq \Psi_W(y) \Rightarrow \sigma(x) \geq \sigma(y).$$

Пусть теперь $x \neq y$, но $\Psi_W(x) = \Psi_W(y)$. Тогда $t_{xy} = t_{yx} = w$, $\forall z \in V \setminus \{x, y\} \quad t_{zx} = t_{zy} = w + \Psi_W(x) - \Psi_W(z)$. Заметим также, что $\forall x \in V \quad 1 \leq \Psi_W(x) \leq w$ и значит $\forall z \in V \setminus \{x, y\} \ \ 2w \geq t_{zx} \geq 1$. Используя эти соотношения, проведем в (32) вычитание второго уравнения из первого:

$$w\left(\sigma(y) - \sigma(x)\right) = \sum_{t \neq x,y} \left(\sigma(x) - \sigma(y)\right) + w\left(\sigma(x) - \sigma(y)\right),$$

т.е.

$$\left[2w + \sum_{z \neq x,y} (2w - t_{zx})\right] (\sigma(y) - \sigma(x)) = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Наконец, если $x \neq y$ и $\sigma(x) = \sigma(y)$, то вычитание в (32) дает

$$\sum_{z \neq x,y} (t_{zx} - t_{zy})\sigma(z) + \sigma(x)(t_{yx} - t_{xy}) = \\ = \sum_{z \neq x,y} (t_{xz} - t_{yz})\sigma(x) + \sigma(x)(t_{xy} - t_{yx}).$$

Подставляя в это равенство значения матричных элементов T, выраженные через функцию $\Psi_W(x)$, преобразуем его к следующему виду

$$\sum_{z \neq x,y} \sigma(z)(\Psi_W(x) - \Psi_W(y)) + 4\sigma(x)(\Psi_W(x) - \Psi_W(y)) + \\ + (w-2) \cdot \sigma(x)(\Psi_W(x) - \Psi_W(y)) = 0.$$

Используя условие нормировки для $\sigma(z)$, получим окончательно

$$(1 + w\sigma(x))(\Psi_W(x) - \Psi_W(y)) = 0.$$

Поскольку $\sigma(x) > 0$, то справедливо $\Psi_W(x) = \Psi_W(y)$.

Объединяя вместе полученные соотношения для связи значений Ψ_W и σ, получим (30). *Q.E.D.*

Следствие. Распределение весов активных игроков $\hat{V}$ любой ВГ-схемы $(\sigma'|Q')$, лежащей в приведенном классе $\hat{S}(v|Q)$, может быть получено строгим монотонным преобразованием компонент вектора $\sigma = (\sigma(a))_{a \in \hat{V}}$, который назовем распределением "силы" активных игроков в классе $\hat{S}(v|Q)$. Компоненты вектора σ удовлетворяют соотношениям

(27) и находятся единственным образом по множеству W выигрывающих коалиций приведенного класса $\hat{S}(v|Q)$.

Доказательство следствия основывается на лемме 5 и теоремах 2 и 3.

Определение 8. *Самосогласованным индексом* силы игрока a в ВГ-схеме $(v|Q)$ назовем неотрицательное число $f(a)$, значение которого равно

$$f(a) = \begin{cases} \sigma(a), & a \in \hat{V} \\ 0, & a \in V \setminus \hat{V}, \end{cases} \tag{33}$$

где $\hat{V} \subset V$ – активные игроки среди участников V ВГ-схемы $(v|Q)$; $\sigma = (\sigma(a))_{a\in\hat{V}}$ – распределение "силы" активных игроков в классе $\hat{S}(v|Q)$.

Рассмотрим подробнее, что выражают собой значения компонент вектора $(\sigma(x))_{x\in\hat{V}}$. Для этого обратимся к первому уравнению в системе (32) и к виду элементов матрицы T (см. (25) и (26)). Согласно (32)

$$\sigma(x) = \left(\sum_{z\neq x} m(z,x)\right)^{-1} \sum_{z\neq x} \sigma(z) m(z,x). \tag{34}$$

Согласно (25) число $m(z,x)$ равно сумме двух слагаемых, одно из которых показывает число выигрывающих коалиций, одновременно содержащих (либо не содержащих) игроков x и z, а другое – равно удвоенному числу выигрывающих коалиций, содержащих игрока x и не содержащих z. Если трактовать формулу (24) на языке, принятом в системах оценки результатов спортивных турниров, то $m_C(a,b) = 0$ означает, что игрок a "проиграл" этап сравнения по коалиции C игроку b (и получил за это 0 очков), $m_C(a,b) = 1$ означает, что a и b оказались в одинаковом положении (сыграли вничью) по отношению к коалиции C (при этом каждый из них получил по одному очку), и, наконец, $m_C(a,b) = 2$ означает, что a "выиграл" сопоставление с b по коалиции C (тем самым получив за это 2 очка). Очки, набранные при сопоставлении a и b по всем коалициям $C \in W$, суммируются и порождают число $m(a,b)$. При обычном упорядочении, свойственном для спортивных турниров, для построения упорядочения участников, каждому из них, например a, сопоставляется общая сумма набранных игроком a очков, которая равна $\rho(a) = \sum_{b\in V\setminus\{a\}} m(a,b)$. Однако в нашем методе эта сумма находится иным способом. Как это видно из (34), при суммировании очков, полученных игроком x при сопоставлении его по всем коалициям с игроком z, число $m(x,z)$ дополнительно умножается на "силу" игрока z, т.е. на $\sigma(z)$, формируя "эффективные очки", набираемые x при сравнении с z. В результате эффективные очки не только констатируют факт "победы", "поражения" или "ничьей", но и учитывают, "силу" соперника: "победа" над более сильным соперником приносит большую сумму очков, чем победа над слабым. Таким образом, значение $\sigma(a)$ определяется величиной эффективных очков, набираемых участником a при парной оценке его роли в формировании выигрывающих коалиций. При этом способность участника образовывать коалицию, оставляя ряд сильных игроков вне этой коалиции, привносит в его индекс силы больший вклад, чем "выигрыш" у более слабых участников. Это и не удивительно: выигрывающая коалиция, не содержащая сильных участников, более устойчива к выходу ряда участников из своего состава, поскольку они легко могут быть заменены более сильными (и значит, имеющими больший вес) участниками. В то же время выход сильного участника труднее скомпенсировать из-за его "большого веса". Это приводит к тому, что реальный вес, $v(C)$, выигрывающей коалиции C и ее эффективный вес, пропорциональный $\sum_{a \in C} \sigma(a)$, могут сильно отличаться своей зависимостью по отношению к выходу и присоединению ряда участников ВГ-схемы. Последнее обстоятельство, в свою очередь, оказывает существенное влияние на величину эффективной силы участников таких коалиций, поскольку, к примеру, если $x \in C$, то вклад в формирование величины $\sigma(x)$ со стороны участника $y \notin C$ будет равен $2\sigma(y)$. Чем больше $\sigma(y)$, тем больше этот вклад.

Пример. 8 Рассмотрим ВГ-схему $(2, 1, 1, 1|3)$ с множеством игроков $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, квотой $Q = 3$ и множеством выигрывающих коалиций

$$W = \{a_1a_2,\ a_1a_3,\ a_1a_4,\ a_2a_3a_4,\ a_1a_2a_3,\ a_1a_2a_4,\ a_1a_3a_4,\ a_1a_2a_3a_4\}.$$

Для этой ВГ-схемы функция $\Psi_W(x)$ принимает следующие значения

$$\Psi_W(a_1) = 7; \quad \Psi_W(a_i) = 5 \quad (i = 2, 3, 4); \quad w = 8.$$

Очевидно, все игроки этой схемы активные. Матрица T имеет вид

$$\begin{pmatrix} 30 & 6 & 6 & 6 \\ 10 & 22 & 8 & 8 \\ 10 & 8 & 22 & 8 \\ 10 & 8 & 8 & 22 \end{pmatrix}$$

Левый собственный вектор T,отвечающий $\lambda_0 = 48$, равен $\sigma = \left(\frac{5}{14}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}, \frac{3}{14}\right)$.

Самосогласованный индекс силы участников $f(x) = \sigma(x)$. Он может быть реализован в виде системы весов участников ВГ-схемы $(5, 3, 3, 3|8)$, принадлежащей тому же приведенному классу ВГ-схем, что и $(2, 1, 1, 1|3)$.

Согласно теореме 3 упорядочение игроков ВГ-схемы по самосогласованному индексу можно найти, зная только функцию $\Psi_W(x)$ и не решая систему уравнений (27). Оказывается, что в силу специальной структуры элементов матрицы T значения $\sigma(x)$ можно найти в явном виде.

Теорема 4. Вектор $\sigma(x)$, удовлетворяющий (27) может быть найден также из следующих соотношений:

$$\forall x \in V \qquad \sigma(x) = \frac{w + \Psi_W(x) - \bar{d}}{w|V| - |V|\Psi_W(x) + d}, \tag{35}$$

где $w = |W|$ – число выигрывающих коалиций рассматриваемой ВГ-схемы, $|V|$ – число активных игроков, $d = \sum\limits_{x\in V} \Psi_W(x)$, $\bar{d} = \sum\limits_{x\in V} \sigma(x)\Psi_W(x)$.

Параметр $\bar{d}$ может быть найден из (35) в силу условия нормировки $\sum\limits_{x\in V} \sigma(x) = 1$.

Доказательство. Согласно (32) критерий $\sigma(x)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\sigma(x) \sum_{z\neq x} t_{xz} = \sum_{z\neq x} t_{zx}\sigma(z).$$

Поскольку при $z \neq x$ согласно (26)

$$t_{xz} = w + \Psi_W(z) - \Psi_W(x)$$

$$t_{zx} = w + \Psi_W(x) - \Psi_W(z),$$

преобразуем правую часть исходного уравнения к виду

$$\sum_{z\neq x} \sigma(z)(w + \Psi_W(x) - \Psi_W(z)) = w + \Psi_W(x) - \Psi_W(z) - \sum_{x\in V} \sigma(z)\Psi_W(z).$$

Аналогично для левой части имеем

$$\sigma(x) \sum_{z\neq x} (w + \Psi_W(z) - \Psi_W(x)) =$$

$$= w(|V| - 1)\sigma(x) + \sigma(x) \sum_{z} \Psi_W(z) - |V|\Psi_W(x)\sigma(x).$$

После подстановки параметров d и $\bar{d}$ получим соотношение (35). Суммируя в (35) по всем x, пробегающим множество активных игроков, получим

$$1 = \sum_{x \in V} (w + \Psi_W(x))(w|V| - |V|\Psi_W(x) + d)^{-1} -$$

$$-\bar{d} \sum_{x \in V} (w|V| - |V|\Psi_W(x) + d)^{-1},$$

что позволяет найти значение параметра $\bar{d}$. *Q.E.D.*

Пример 9. Рассмотрим ВГ-схему $(2, 1, 1|3)$ с тремя участниками $V = \{a, b, c\}$ и множеством выигрывающих коалиций $W = \{ab, ac, abc\}$ с $w = 3$.

Легко подсчитать, что $\Psi_W(a) = 3$, $\Psi_W(b) = \Psi_W(c) = 2$, $d = 7$. Тогда согласно (35)

$$\sigma(a) = \frac{6 - \bar{d}}{7}; \quad \sigma(b) = \sigma(c) = \frac{5 - \bar{d}}{10}.$$

Из условия нормировки $\frac{6 - \bar{d}}{7} + \frac{5 - \bar{d}}{5} = 1$, значит $\bar{d} = \frac{5}{2}$, $\sigma(a) = \frac{1}{2}$, $\sigma(b) = \sigma(c) = \frac{1}{4}$.

Таким образом, для этой ВГ-схемы

$$f(a) = h(a) = \frac{1}{2}; \qquad f(b) = f(c) = h(b) = h(c) = \frac{1}{4}.$$

Пример 10. ВГ-схема $(3, 3, 1, 1|5)$ с участниками $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ имеет множество выигрывающих коалиций

$$W = \{a_1a_2,\ a_1a_3a_4,\ a_2a_3a_4,\ a_1a_2a_3,\ a_1a_2a_4,\ a_1a_2a_3a_4\};$$

$$w = 6,\ |V| = 4,\ \Psi_W(a_1) = \Psi_W(a_2) = 5,\ \Psi_W(a_3) = \Psi_W(a_4) = 4,\ d = 18.$$

$$\sigma(a_1) = \sigma(a_2) = \frac{11 - \bar{d}}{22}; \quad \sigma(a_3) = \sigma(a_4) = \frac{10 - \bar{d}}{26}.$$

Условие нормировки $\frac{11 - \bar{d}}{11} + \frac{10 - \bar{d}}{13} = 1$ дает $\bar{d} = \frac{55}{12}$. Значит

$$\sigma(a_1) = \frac{7}{24}; \quad \sigma(a_3) = \frac{5}{24}.$$

Самосогласованный индекс силы участников $f = \left(\frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{5}{24}, \frac{5}{24}\right)$. Он показывает, что сила коалиции $C_1 = \{a_1, a_2\}$ уступает силе коалиции $C_2 = \{a_1, a_3, a_4\}$ поскольку

$$\sigma(a_1) + \sigma(a_2) = \frac{14}{24} < \frac{17}{24} = \sigma(a_1) + \sigma(a_3) + \sigma(a_4),$$

хотя вес C_1, $v(C_1) = 6$, больше, чем вес $v(C_2) = 5$ коалициии C_2. Это не удивительно, т.к. коалиция C_1 может стать проигрывающей при выходе одного из игроков, например, a_1, и образовании им коалиции C_2 с остальными игроками (аналогичный шаг может предпринять и игрок a_2). В то же время коалиция C_2 при выходе одного из игроков a_3 или a_4 не становится проигрывающей, поскольку $\{a_2, a_3\}$ или $\{a_2, a_4\}$ выигрывающей коалиции не образуют: им для этого требуется еще один игрок.

Литература

1. Banzhaf, J.F. III . Weighted Voting doesn't Work: a Mathematical Analysis. Rutgers Law Review, 1965, 19, 317-343.

2. Shapley, L.S., and Shubik, M. A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. American Political Science Review, 1954, 48, 87-792.

3. Coleman, J.S. Control of Collectivity and the Power of a Collectivity to Act. In Social Choice, B.Lieberman (ed.), N.4: Gordon and Breach, 1971, 269-300.

4. Deegan, J., and Packel, E.N. A new Index of Power for Simple n-Person Games. Intern. Journal of Game Theory, 1978, 7, 113-123.

5. Johnston, R.J. On the Measurement of Power: Some Reaction to Laver. Environment and Planning, 1978, A10, 907-914.

6. Rae, D. Decision rules and Individual values in Constitutional Choice. American Political Science Review, 1969, 63, 40-56.

7. Левченков В.С. Оптимизационный подход к проблеме построения индекса силы участника в системах голосования с весами. I. Общие результаты. В.кн.: Проблемы выбора: теория и практика. ИСА РАН, 1998.

8. Levchenkov V.S. Condensed Voting Power. Discussion Paper, THEMA N9413, Universite de Cergy-Pontoise, Paris, 1994.

9. Левченков В.С. Новые методы теории выбора. М.: МАКС Пресс, 2007, 95стр.

10. Brams, S.J. Game Theory and Politics. New York: The Free Press, 1975, ch.5.

11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.