Левченков В.С., Левченкова Л.Г.

ОЦЕНКА УРОВНЯ КОМПРОМИССА В РЕАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ВЫБОРА

1 Введение

Правило двухтурового большинства (сокращенно *PR* – Plurality Runoff) широко применяется на практике для проведения выборов национального масштаба: по этому правилу, например, проводятся выборы президента России. Организационно это правило предполагает проведение двух туров, в каждом из которых для отбора победителей используется правило относительного большинства. Два кандидата, набравшие наибольшее число голосов в первом туре, выясняют окончательно свои отношения во втором туре, где побеждает кандидат, набравший при повторном голосовании более половины голосов избирателей.

Какую функцию выбора реализует данная система голосования? Для ответа на этот вопрос опишем ее действие, используя традиционные понятия [1].

Пусть V, $(|V| = m)$, – множество зарегистрированных кандидатов, S, $(|S| = n)$, – множество избирателей. При голосовании в первом туре избиратели представляют свои оценки в виде *дихотомического профиля* бинарных отношений $r = (r_i^1)_{i=1}^n$, в котором каждое r_i задается на всем V и представляется в следующем виде:

$$r_i^{(1)}(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ если } a \in V \setminus \{a^i\} \text{ и } b = a^i \\ 1 \text{ во всех остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

где a^i – тот единственный элемент из V, которому отдает свой голос избиратель $i \in S$. В случае же, когда избиратель i голосует против всех кандидатов или нарушает правила заполнения бюллетеня, будем полагать его функцию $r_i^{(1)}(a,b)$ тождественно равной нулю.

По информации (1) находится суммарное количество голосов $\rho^V(a)$, набираемое каждым кандидатом $a \in V$

$$\rho^V(a) = \sum_{i=1}^{n} \chi^{a_i}(a). \tag{2}$$

Два кандидата (обозначим их a^* и b^*), набравших наибольшее число голосов избирателей, участвовавших в голосовании, признаются победителями первого тура и продолжают борьбу во втором туре. На языке бинарных отношений это означает, что в результате такой процедуры отбираются два верхних элемента a^* и b^* в упорядочении множества V, производимом групповым отношением $R^{(1)}$:

$$R^{(1)}(a,b) = 1 \Leftrightarrow \rho^V(a) \geq \rho^V(b). \tag{3}$$

При этом $R^{(1)}(a^*,a) = R^{(1)}(b^*,a) = 1$ для всех $a \in V \setminus \{a^*,b^*\}$. (С точки зрения последующего изложения нам не важно, как следует "подправить" это правило, если три или более кандидатов наберут одинаковое число голосов.)

Однако отношение $R^{(1)}$ не предназначено для построения выбора из множества V. Согласно правилу *PR*, во втором туре множество предъявления меняется: оно сводится теперь к паре элементов $\{a^*,b^*\}$, и что более существенно с теоретической точки зрения, должен быть изменен профиль $r^{(1)}$ на этом множестве вариантов. Это следует хотя бы из того, что далеко не для всех участников элементы a^* и b^* принадлежат множеству индивидуально "лучших" кандидатов $\{a^i\}_{i=1}^n$. Те избиратели, чьи a^i не совпадают с a^* или b^*, при новом голосовании могут, вообще говоря, изменить значения $r_i^{(1)}$ на паре $\{a^*,b^*\}$ до значений $r_i^{(2)}$, отдающих предпочтение одному из двух кандидатов (подчеркнем, что для таких i согласно (1) $r_i^1(a^*,b^*) = r_i^1(b^*,a^*) = 1$). При теоретическом анализе правила большинства этот эффект учитывается следующим образом: считают, что у избирателей есть "истинный" профиль r^0 отношений r_i^0, $(i = 1,\dots,n)$, на основе которого они и проводят оценку вариантов как в первом, так и во втором туре. Естественно, элементы a^i являются при этом наибольшими элементами отношений r_i^0. Сужение r_i^0 на множество $\{a^*,b^*\}$ приводит к новому скалярному критерию $\rho^{\{a^*,b^*\}}$ и другому бинарному отношению $R^{(2)}$. Используя их в (2) и (3), мы получим выбор из множества V в виде единственного элемента a^* или b^*. Легко показать, что такое правило порождает Борда-рациональную функцию выбора, так как бинарное отношение, порождаемое *PR* на множестве $A \subset V$, будет зависеть от вида A. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть простой пример. Пусть "истинный" профиль участников голосования $r^0 = (r_i^0)_{i=1}^{17}$ содержит линейные порядки, определенные на множестве $V = \{a,b,c\}$. Соответствующие отношения представлены в таблице 1.

$r_1^0 \div r_6^0$	$r_7^0 \div r_{11}^0$	$r_{12}^0 \div r_{15}^0$	$r_{16}^0 \div r_{17}^0$
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Таблица 1

При голосовании в первом туре, как это следует из вида профиля r^0, 6 участников отдадут предпочтение кандидату a, 5 – кандидату c, и 6 – кандидату c. В результате, во второй тур пройдут участники a и b. При голосовании во втором туре согласно "истинным" ранжированиям, которые обычно считаются неизменными в течении обоих туров, участник a наберет 11 голосов, а участник b только 6. В результате будет выбран участник a. Бинарное отношение R_V, приводящее к такому выбору, должно принимать значения $R_V(a, b) = 1$, $R_V(a, c) = 1$.

Рассмотрим теперь вместо множества V его подмножество $A = \{a, c\}$. Осуществляя выбор из A по правилу *PR* (в данном случае достаточен только один тур), мы получим, что согласно виду $\{r_i^0\}_{i=1}^{17}$ элемент c наберет 9 голосов, и элемент a – 8 голосов. Значит, отношение R_A, описывающее этот выбор, должно принимать значения $R_A(a, c) = 0$, $R_A(c, a) = 1$. Сопоставляя его с отношением R_V на паре (a, c), имеем $R_A \neq R_V|_{\{a,c\}}$, т.е. функция выбора, порождаемая правилом двухтурового большинства, Борда-рациональна. Это обстоятельство выводит правило *PR* из сферы действия теоремы Эрроу (см. [1]). К сожалению, правило двухтурового большинства обладает существенным пороком: оно не обеспечивает выполнение условия монотонности. Для иллюстрации этого факта рассмотрим пример, использованный в книге Мулена [6, стр. 325]. Пусть "истинный" профиль участников описывается таблицей 2. Он отличается от представленного в табл. 1 только последней колонкой, в которой элемент a переходит на первое место, оттеснив на второе элемент b.

$r_1^0 \div r_6^0$	$r_7^0 \div r_{11}^0$	$r_{12}^0 \div r_{15}^0$	$r_{16}^0 \div r_{17}^0$
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

Таблица 2

Такое изменение профиля означает, что в отношениях r_{16}^0 и r_{17}^0 позиция элемента a усилилась в сравнении с элементом b, а остальные отношения не изменились. К чему же приводит такое "усиление" элемента a с точки зрения правила *PR*? Легко убедиться, что при таком профиле в первом туре победителями будут уже элементы a и c (а не a и b, как раньше), и во втором туре победит c, поскольку согласно таблице 2 он превосходит элемент a с преимуществом 9 к 8. В результате, правило *PR* нарушает свойство монотонности: усиление позиции a в системе оценок избирателей ослабляет его способность быть выбранным, что кажется странным с точки зрения здравого смысла.

Причину возникновения немонотонности правила *PR* легко понять на рассмотренном примере. Действительно, в первом туре при построении выбора применяется не вся информация из таблицы 1, а используется только факт нахождения (или ненахождения) элемента a на первом месте в ранжировании (сравните с видом профиля в (1)). Усиление элемента a (и одновременное ослабление элемента b) приводит к новому множеству выбора $\{a, c\}$, что отвечает монотонности правила, задаваемого соотношениями (2) и (3). Сужение же множества предъявления, производимое во втором туре, сопровождается естественным уменьшением использованной для выбора информации. При этом оказывается, что новая информация уже не содержит в себе следов усиления элемента a (поскольку положение этого элемента относительно c не изменяется), и с этой точки зрения о нарушении монотонности говорить не приходится. Однако, если обратиться к полной информации, то из-за изменения профиля (как видно из таблицы 2) между элементами a и c в последней колонке появляется элемент b, что показывает увеличение "степени превосходства" элемента a над c. Чтобы почувствовать это увеличение численно, используем, например, для анализа этих профилей баллы Борда. Тогда в первом профиле у элемента a будет 19 баллов, у b – 18, а у c – 14. Во втором профиле соответствующие числа таковы: у a – 21, у b – 16 и у c – 14. Однако, из-за уменьшения объема используемой информации метод *PR* не чувствует возрастания превосходства a над b, и выбирая c, как бы нарушает свойство монотонности.

Другой особенностью *PR*, ставящей под сомнение его применимость в качестве инструмента для принятия важных решений (а что может быть важнее для жителей демократической страны, чем выбор ее президента) является качество выбираемых элементов. Легко продемонстрировать, что принцип потурового отбора зачастую приводит к признанию победителем "контрастного" кандидата, т.е. такого кандидата, которого и поддерживают и резко противостоят ему большие группы населения. Для иллюстрации этого эффекта рассмотрим профиль $r^0 = (r_i^0)_{i=1}^{11}$ "истинных" ранжирований кандидатов $\{a, b, c, d\}$, представленный в таблице 3.

$r_1^0 \div r_4^0$	$r_5^0 \div r_9^0$	$r_{10}^0 \div r_{11}^0$
a	b	c
c	c	d
d	d	a
b	a	b

Таблица 3

Согласно правилу *PR*, в первом туре победят кандидаты a и b, набравшие соответственно, 4 и 5 голосов избирателей. Элемент c с двумя голосами будет оставлен за чертой голосования во втором туре. Однако из распределения элементов в ранжированиях очевидно, что a и b отнюдь не являются "общеприемлемыми" кандидатами: кандидата a на последнее место ставят 5 избирателей (почти половина участников голосования), а элемент b и того больше – 6 участников ставят его на последнее место в своих ранжированиях. Во втором туре один из таких кандидатов будет избран. Это обстоятельство было бы не столь огорчительным, если бы среди кандидатов не присутствовал элемент c, который с точки зрения всех (!) участников весьма хорош: 9 из них ставят его на второе место и 2 на первое. Чтобы количественно подтвердить то, что c – "компромиссный" кандидат, используем баллы Борда. Легко подсчитать по таблице 3, что a наберет 14 баллов, b – 15, а c – 24.

В связи с этим иллюстративным примером возникает проблема формального определения понятия "компромиссный кандидат" и построения правил выбора, выдвигающих таких кандидатов в качестве "лучших" вариантов.

2 Оценка "компромиссности" кандидата на основе метода ПСВ

Современные процедуры голосования, применяемые для выбора должностных лиц на национальном уровне (президенты, члены парламента, мэры крупных городов и т.д.) зачастую выбирают таких кандидатов, за и против которых выступает значительное количество избирателей (назовем таких кандидатов, для определенности, "контрастными"). Факт избрания "контрастного" кандидата обычно ведет к излишней поляризации и напряженности в отношениях между людьми, которая усугубляется еще и тем, что кандидат после избрания начинает в той или иной степени "выполнять свои предвыборные обещания", т.е. действовать в русле политики, которая выражает чаяния его электората, и оказывается непопулярной среди его противников. Если же речь идет о членах парламента, то выбор "контрастных" кандидатов, пользующихся поддержкой групп населения с несовпадающими интересами, приводит к резкой неоднородности состава и непреодолимым противоречиям между его членами, что фактически парализует работу этого органа. К тому же бесконечные споры и конфликты между парламентариями раздражают население, настраивая его против демократии, как метода решения спорных проблем. Политические и экономические последствия от действий такого рода могут со временем привести к увеличению разрыва между слоями общества, их взаимной вражде, эксцессам, экономическому разладу, обострению социальных отношений и, возможно, к революции. Поэтому на этапе выборов очень важно применять такую систему голосования, которая, отвергая "контрастных" кандидатов, обеспечивает выбор "компромиссных" фигур, пользующихся поддержкой (или хотя бы не вызывающей протест, антипатию или безразличие) в наибольшей по численности части общества.

Принцип Борда-рациональности с нашей точки зрения играет важную роль при отборе соотвествующих систем голосования. Действительно, как мы уже указывали ранее [2], принципиальное различие Кондорсе- и Борда-рациональных функций выбора возникает при построении оценки качеств элементов, претендующих на включение в выбираемое множество.

Именно, в подходе Кондорсе используется принцип попарного сравнения вариантов, в процессе которого вообще не привлекаются третьи элементы для оценок сравнительных качеств двух рассматриваемых элементов. В результате, лучшим в множестве V признается тот элемент, который при индивидуальном сравнении превосходит все другие элементы этого множества. Поскольку такие варианты в реальной жизни встречаются довольно редко (как говорят теоретики, в множестве предъявления с числом вариантов более двух обычно отсутствует победитель по Кондорсе), то на практике возникает необходимость сужения (тем или иным способом) исходного множества альтернатив до двух элементов, к которым далее уже применяется правило простого большинства. А этот прием, как мы видели на примере процедуры PR, приводит к избранию "контрастных" кандидатов (см., например, профили, представленные в табл. 1 и 3).

Борда использует существенно иной подход. Его прежде всего интересует не сама способность варианта выиграть парное сравнение с некоторым другим элементом, а его "относительная сила", выражаемая суммой баллов, которые он получает в индивидуальных ранжированиях. Эти баллы возникают при сравнении заданного элемента со всеми остальными элементами, т.е. включают в себя все многообразие парных оценок. В результате, победителем оказывается наиболее поддерживаемый всеми избирателями "компромиссный" вариант, который уже совсем не обязательно стоит на самом верху ряда (и тем более, не находится "в хвосте" ранжирования) в большом числе индивидуальных упорядочений. Вообще говоря, этот вариант может не совпадать с победителем по Кондорсе (даже если он есть), т.е. может проигрывать некоторым элементам сравнения по большинству голосов. Понятно, что при таком подходе упорядочение кандидатов должно с неизбежностью зависеть от множества предъявления, поскольку групповое решение на паре элементов определяется не только сужением профиля на эту пару (прямое сравнение элементов), но и от его значений на остальных элементах (косвенное сравнение элементов). В результате, Борда-рациональные функции выбора выделяют элементы, обладающие иными качествами, чем те, которые выбирают Кондорсе-рациональные функции. Действительно, учет роли косвенных сравнений приводит к тому, что элемент, даже проигрывая прямое сравнение с некоторыми другими элементами, может быть включен в выбор, если его в достаточной степени "поддерживает" довольно большая совокупность остальных вариантов. Примеры построения таких правил выбора легко найти, обратившись к анализу турнирных отношений (см. [3]). Возникает естественый вопрос, как численно оценить "степень компромиссности" того или иного кандидата, а также уровень компромисса, достигаемого правилом выбора в целом.

Ясно, что степень компромисса при выборе того или иного элемента должна быть связана с уровнем баланса его оценок, используемых при построении функции выбора. При этом компромисс тем выше, чем большее число избирателей поддерживает получающийся выбор. Для формализации этой величины введем в рассмотрение *степень одобрения* каждого кандидата и будем описывать ее с помощью некоторой скалярной величины σ.

Пусть на множестве V задан профиль индивидуальных бинарных отношений $r = (r_i)_{i=1}^{n}$, причем каждое отношение r_i достаточно хорошо различает элементы множества V, т.е. для любых двух различных элементов $a, b \in V$ избиратель может сказать, какой из них лучше (или хуже). Математически это означает, что каждое r_i представляет собой асимметричное и связное отношение. Как мы знаем [4], из этих свойств вытекает, что

$$\forall a, b \in V \quad a \neq b \;\Rightarrow\; r_i(a, b) + r_i(b, a) = 1. \tag{4}$$

Суммируя соотношения (4) по i и вводя количества участников голосования $n_{ab} = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i(a, b)$, считающих, что элемент a лучше элемента b, имеем

$$(a \neq b) \;\Rightarrow\; n_{ab} + n_{ba} = n. \tag{5}$$

Для нахождения $\sigma(a)$ применим соображения, аналогичные тем, которые привели нас к аксиомам самосогласованности (см. [4]). Действительно, каждый из кандидатов заинтересован в получении от избирателей как можно более высокого значения степени одобрения $\sigma(a)$ (поскольку, чем больше значение σ, тем выше вероятность избрания этого кандидата на искомое место). Пусть значения такого критерия равны $\{\sigma(a)\}_{a \in V}$. Каковы условия, которые целесообразно использовать при их вычислении?

Во-первых, если в множестве V выделяется такое подмножество $V_0 \subset V$, элементы которого единогласно признаются более предпочтительными, чем элементы $V \setminus V_0$, то естественно положить, что

$$\forall a \in V \setminus V_0 \quad \sigma(a) = 0. \tag{6}$$

Назовем это условие *аксиомой исключения заведомо плохих кандидатов.*

Пусть все заведомо плохие кандидаты исключены из рассмотрения, т.е. найдено наибольшее по мощности подмножество V_0 такое, что для любых $a, b \in V_0$ либо найдутся избиратели, считающие, что a лучше b (прямое превосходство a над b), либо существуют такие элементы $c_1, \ldots, c_k \in V_0$, что a прямо превосходит c_1, c_1 прямо превосходит c_2 и т.д., c_k прямо превосходит b (этот тип превосходства a над b будем называть *косвенным*). Легко показать, что такое множество V_0 единственно. Естественно предположить, что для элементов множества V_0 справедливо

$$\forall a \in V_0 \quad \sigma(a) > 0 \tag{7}$$

(*аксиома положительного одобрения хороших кандидатов*).

Наконец, рассмотрим, как соотносятся между собой значения $\{\sigma(a)\}_{a \in V_0}$. Для их вычисления используем игровую схему, аналогичную схеме, рассмотренной в [4]. Пусть каждый из кандидатов $a \in V_0$ доказывает "справедливость" назначения ему критерия $\sigma(a)$ в следующей процедуре: для произвольного $b \in V_0 \setminus \{a\}$ он обращается к каждому из избирателей $i \in S$ с просьбой оценить его положение по отношению к этому партнеру. При этом, весомость своих претензий он готов поддержать тем, что если некоторый избиратель считает, что a хуже b, то кандидат a обязуется уплатить b сумму денег $\alpha\sigma(b)$ (α – некоторый нормирующий множитель), а если оценка противоположная, то уже b платит a сумму $\alpha\sigma(a)$. В результате такой верификации "силы" кандидат a "зарабатывает" сумму $\alpha \sum\limits_{b \in V_0 \setminus \{a\}} n_{ab}\sigma(b)$, и "платит" сумму $\alpha \sum\limits_{b \in V_0 \setminus \{a\}} n_{ba}\sigma(a)$.

Назовем совокупность значений $\{\sigma(a)\}_{a \in V_0}$ *"справедливой"*, если выполнено условие *отсутствия посторонних субсидий*

$$\forall a \in V_0 \quad \alpha \left(\sum_{b \in V_0 \setminus \{a\}} (n_{ab}\sigma(b) - n_{ba}\sigma(a)) \right) \geq 0. \tag{8}$$

Легко обнаружить, что сформулированные выше условия аналогичны условиям, использованным в [4], а тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Существует единственный положительный набор* $\{\sigma(a)\}_{a \in V_0}$ *"справедливых" значений степени одобрения* *кандидатов, удовлетворяющий системе уравнений*

$$\sum_{b \in V_0 \setminus \{a\}} n_{ab}\sigma(b) = \sum_{b \in V_0 \setminus \{a\}} n_{ba}\sigma(a). \qquad (9)$$

Решение этой системы совпадает с собственным вектором неразложимой матрицы $T = (t_{ab})_{a,b \in V_0}$,

$$t_{ab} = \begin{cases} n_{ba}, b \neq a \\ \sum\limits_{c \in V_0 \setminus \{a\}} n_{ac} b = a, \end{cases} \qquad (10)$$

т.е. находится из системы уравнений

$$\sigma T = \lambda_0 \sigma, \qquad (11)$$

где $\lambda_0 = n(|V_0| - 1)$ – максимальное собственное значение матрицы T.

Используя соотношение (6) и набор чисел $\{\sigma(a)\}_{a \in V_0}$, построим теперь оценку уровня компромисса, достигаемого в случае выбора из V некоторого элемента a. Именно, пусть

$$\sigma_{V_0} = \max_{b \in V_0} \sigma(b). \qquad (12)$$

Назовем *уровнем компромисса элемента* a число $\gamma_V(a)$, определяемое с помощью критерия σ следующим образом:

$$\gamma_V(a) = \begin{cases} \frac{\sigma(a)}{\sigma_V}, & \text{если } a \in V_0 \\ 0, & \text{если } a \in V \setminus V_0. \end{cases} \qquad (13)$$

Уровень компромисса оказывается равным 1, если рассматриваемое правило выбирает наиболее одобряемый элемент $a \in V$ (для которого $\sigma(a) = \sigma_{V_0}$). Уровень компромисса будет равен нулю, если назначаемый правилом выбора элемент принадлежит подмножеству таких элементов из V, которые по мнению всех участников уступают любому другому из оставшихся элементов (см. (6)).

Понятие уровня компромисса можно определить и для совокупности элементов из V. Пусть, например, C – некоторая функция выбора на V. *Уровнем компромисса, достигаемого функцией выбора* на множестве $A \subset V$, назовем число $\gamma_C(A)$, принимающее значение

$$\gamma_C(A) = \frac{\sigma[C(A)]}{\sigma_{C(A)}}. \qquad (14)$$

Здесь

$$\sigma[C(A)] = \sum_{a \in C(A) \cap V_0} \sigma(a), \quad \sigma_{C(A)} = \max_{\substack{B \subset A \\ |B| = |C(A)|}} \sum_{a \in B \cap V_0} \sigma(a).$$

Из (14) видно, что величина $\gamma_C(A)$ показывает, насколько сумма значений критерия σ на элементах множества $C(A)$ уклоняется от ее максимально возможного значения, достигаемого при выборе из A такого же количества элементов, как и в множестве $C(A)$, но, возможно, другого состава.

Построенную выше величину уровня компромисса (13) можно использовать для анализа характера выбираемых вариантов тем или иным правилом выбора. Для иллюстрации обратимся опять к правилу двухтурового большинства. Пусть отношение участников голосования к множеству вариантов $\{a, b, c\}$ представлено ранжированиями, приведенными в таблице 4.

$r_1 \div r_5$	r_6	$r_7 \div r_9$	r_{10}
a	c	b	c
b	a	c	b
c	b	a	a

Таблица 4

Очевидно, в первом туре победят элементы a и b, набрав 5 и 3 голоса, соответственно. Во втором туре победит элемент a, поскольку он превосходит элемент b с соотношением голосов 6:4. Однако, из таблицы 4 видно, что хоть элемент a и является победителем по Кондорсе (легко подсчитать, что $n_{ab} = 6$, $n_{ac} = 5$), однако его ставит на последнее место 40% участников голосования. В тоже время только один участник ставит элемент b на последнее место, а 6 из них ставят его на второе место, и 4 на первое. Возникает подозрение, что b – более "компромиссный" кандидат, чем a. На это указывает также подсчет баллов Борда: a набирает 11 баллов, b – 12 баллов, c – 7 баллов. Вычислим величину γ_V для элементов a и b. Подсчитывая матрицу T согласно (10), получим

$$T = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 2 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Ее левый собственный вектор $\sigma = \left(\frac{22}{57}, \frac{23}{57}, \frac{12}{57}\right)$, и значит $\gamma_V(a) = \frac{22}{23}$, а $\gamma_V(b) = 1$.

Таким образом, этот расчет подтверждает нашу интуицию о "большей" компромиссности варианта b по сравнению с a, однако различие между ними весьма невелико и проявляется в большем преимуществе при сравнении b с элементом c. Это обстоятельство приводит к тому, что когда элемент c выбывает во втором туре из рассмотрения, a побеждает b.

В результате, из-за сужения информации "более компромиссный" вариант проигрывает во втором туре победителю по Кондорсе. Такой эффект может проявляться и при отсутствии победителя по Кондорсе. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример (профиль представлен в таблице 5).

$r_1 \div r_4$	$r_5 \div r_8$	$r_9 \div r_{10}$
a	b	c
b	c	a
c	a	b

Таблица 5

Найдем значение чисел $\{n_{xy}\}_{x,y \in \{a,b,c\}}$ для этого профиля: $n_{ab} = 6$, $n_{ca} = 6$, $n_{bc} = 8$. Видно, что ни один из элементов не является победителем по Кондорсе. Применим теперь правило *PR*: в первом туре победят варианты $\{a, b\}$, а во-втором туре – вариант a. Для вычисления уровня компромисса элементов используем матрицу

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 2 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Ее левый собственный вектор, отвечающий $\lambda_0 = 20$, равен $\sigma = \left(\frac{10}{29}, \frac{12}{29}, \frac{7}{29}\right)$, что дает следующие значения уровней компромисса: $\gamma_V(a) = \frac{10}{12}$, $\gamma(b) = 1$. Таким образом, *PR* во втором туре отдает предпочтение "менее" компромиссному варианту a, даже если он не является победителем по Кондорсе.

Легко построить пример, когда компромиссный вариант выбывает уже в первом туре. Рассмотрим профиль, представленный в таблице 6.

$r_1 \div r_4$	$r_5 \div r_8$	$r_9 \div r_{11}$
a	b	c
c	c	a
b	a	b

Таблица 6

Этот профиль характеризуется числами: $n_{ab} = 7$, $n_{ac} = 4$, $n_{bc} = 4$. Таким образом, c – победитель по Кондорсе. Однако, в первом туре побеждают элементы a и b, а во втором – элемент a.

Матрица T имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Ее левый собственный вектор $\sigma = \left(\frac{42}{135}, \frac{30}{135}, \frac{63}{135}\right)$, что дает $\gamma_V(a) = \frac{42}{63}$, $\gamma(c) = 1$. Таким образом, *PR* уже в первом туре отбрасывает элемент, обладающий наивысшим уровнем компромисса и являющийся к тому же победителем по Кондорсе.

3 Вычисление уровней компромисса для случая трех кандидатов

Систему (11) легко решить аналитически, если $|V_0| = 3$. Пусть $V_0 = \{a, b, c\}$, тогда матрица T (10) имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} n_{ab} + n_{ac} & n_{ba} & n_{ca} \\ n_{ab} & n_{ba} + n_{bc} & n_{cb} \\ n_{ac} & n_{bc} & n_{ca} + n_{cb} \end{pmatrix}$$

Ее максимальное собственное значение равно $2n$, где n – число участников голосования. Легко проверить, что собственный вектор, отвечающий этому собственному значению, пропорционален вектору $z = (z_a, z_b, z_c)$

$$\begin{aligned} z_a &= n_{ab}n_{ac} + n_{ac}n_{cb} + n_{ab}n_{bc}, \\ z_b &= n_{ba}n_{bc} + n_{bc}n_{ca} + n_{ba}n_{ac}, \\ z_c &= n_{ca}n_{cb} + n_{cb}n_{ba} + n_{ca}n_{ab}. \end{aligned} \tag{15}$$

Вектор σ, который используется для подсчета уровней одобрения элементов a, b и c, отличается от z только нормировкой $\alpha\sigma = z$, где $\alpha = \sum_{d \in V_0} z_d$. Строение слагаемых в каждой компоненте вектора z весьма показательно. Рассмотрим, например, компоненту z_a. Ее первое слагаемое представляет собой произведение чисел голосов, которые получает кандидат a при сравнении его с кандидатом b и кандидатом c, т.е. является произведением величин, численно выражающих результат прямого сравнения кандидата с каждым из остальных участников. Второе слагаемое содержит произведение чисел, выражающих результаты прямого сравнения элементов a и c, c и b. Это произведение дает численную оценку косвенного сравнения элементов a и b, использующую промежуточный элемент c. В третьем слагаемом опять приводится результат косвенного сравнения элемента a, но уже с элементом c. Совершенно такую же структуру имеют компоненты z_b и z_c. Таким образом, в отличие от баллов Борда, где для оценки элементов используется скалярный критерий $\rho^{V_0}(a)$, который для a, например, имеет вид $\rho^{V_0}(a) = n_{ab} + n_{ac}$ (т.е. содержит сумму голосов, показывающих преимущество a над b и c), компоненты вектора z содержат произведения соответствующих чисел, дополненные величинами, отражающими косвенные сравнения элементов. Заметим, что если нас интересует только упорядочение элементов по величинам компонент z (как того требует ПСВ в том случае, когда матрица T неразложима), то выражение (15) для z можно упростить (см. [7]). Именно, перепишем его компоненты в виде

$$\begin{aligned}
z_a &= 2n_{ab}n_{ac} + (n_{ac}n_{cb} + n_{ab}n_{bc} - n_{ab}n_{ac}),\\
z_b &= 2n_{ba}n_{bc} + (n_{bc}n_{ca} + n_{ba}n_{ac} - n_{ba}n_{bc}),\\
z_c &= 2n_{ca}n_{cb} + (n_{cb}n_{ba} + n_{ca}n_{ab} - n_{ca}n_{cb}).
\end{aligned} \tag{16}$$

Легко показать, пользуясь соотношениями (5), что слагаемые в скобках совпадают друг с другом, а значит, упорядочение компонент z_a, z_b и z_c можно определить, опираясь на более простой вектор $p = (p_a, p_b, p_c)$, где

$$p_a = n_{ab}n_{ac}, \quad p_b = n_{ba}n_{bc}, \quad p_c = n_{ca}n_{cb}. \tag{17}$$

Подчеркнем, однако, что этот вектор не годится для нахождения величин γ_V, т.к. сохраняя порядок компонент, меняет их отношение.

Обозначим через z_{V_0} максимальное значение компоненты z:

$$z_{V_0} = \max_{x \in V} z_x. \tag{18}$$

Тогда согласно (12), (13),

$$\forall d \in V_0 \quad \gamma_V(d) = \frac{z_d}{z_{V_0}}. \tag{19}$$

Число $\sigma(d) = z_d/\alpha$, как мы указывали ранее, связано с "силой" участника d и в контексте группового выбора показывает степень одобрения варианта d избирателями. Для случая двух альтернатив $\{a, b\}$ соответствующие числа образуют двухкомпонентный вектор $\sigma^0 = (\sigma^0(a), \sigma^0(b))$, где

$$\sigma^0(a) = \frac{n_{ab}}{n}; \quad \sigma^0(b) = \frac{n_{ba}}{n}. \tag{20}$$

Соотношения (20) следуют из того, что ПСВ для двухэлементного множества переходит в правило простого большинства (см. [1]).

Важным достоинством правила простого большинства является то, что лучший элемент из двух возможных обязательно поддерживается более, чем половиной избирателей, и значит, значение его степени одобрения превосходит $1/2$. Это присходит тогда, когда более половины избирателей поддерживают одного из кандидатов. Для случая трех кандидатов это уже не так. Выясним, при каких условиях элемент a имеет степень одобрения, не меньшую, чем $1/2$, т.е. выполнено $\sigma(a) > \sigma(b) + \sigma(c)$. Для анализа этого условия используем соотношения (15), в которых для удобства введем следующие переменные: $n_{ab} = \phi_1$, $n_{ac} = \phi_2, n_{bc} = \phi_3$. Тогда условие $z_a > z_b + z_c$ переходит в соотношение

$$3\phi_1\phi_2 + (\phi_2 - \phi_1)\phi_3 + n\phi_1 - 2n^2 \geq 0. \tag{21}$$

Для простоты рассмотрим ситуацию, когда a превосходит b и c с одинаковым преимуществом, т.е. когда $\phi_1 = \phi_2$. В этом случае неравенство (21) переходит в

$$3\phi_1^2 + n\phi_1 - 2n^2 \geq 0,$$

из которого следует, что ϕ_1 (и ϕ_2) должны быть не меньше, чем $\frac{2}{3}n$.

Таким образом, выборы в ситуации, когда на одно место претендует более двух кандидатов, будут, как правило, приводить к уровням одобрения менее, чем $1/2$, даже для самых компромиссных кандидатов (являющихся, например, и победителями по Кондорсе). Недовольных полученным выбором будет в этом случае больше, чем довольных, и в случае каких-либо трудностей такое скрытое напряжение в обществе может привести к кризису. Только в случае, когда преимущество одного кандидата над остальными неоспоримо, победитель получает одобрение более, чем половины электората. Практически, эта ситуация соответствует выбору из множества, содержащего только двух кандидатов и подтверждает целесообразность американской системы выбора президента, когда на всенародное голосование выносится два представителя ведущих партий (демократической и республиканской), а возможный третий кандидат (независимый), как правило, не набирает значительного числа голосов. Выборы такого вида не создают в обществе указанного выше раскола, за исключением случая, когда результаты двух основных кандидатов близки (см. [?]). Большое значение уровня компромисса для участвующих кандидатов достигается с помощью специальной процедуры, обеспечивающей их тщательный отбор в ходе первичных выборов, проводимых на партийном уровне. Обе партии, заинтересованные в победе своего кандидата, тщательно взвешивают шансы на победу каждого претендента, определяя тем самым наиболее компромиссную (поддерживаемую всеми избирателями, а не только сторонниками своей партии) фигуру. С этой точки зрения использование индекса (13) в процессе отбора кандидатов кажется нам чрезвычайно важным. Конечно, его расчет на основе (11) и (12) требует весьма подробной информации от избирателей, а эта информация, полученная в ходе первичных выборов, опросов и т.д., известна весьма приблизительно и сильно зависит от обработки используемых методов. При ее анализе очень полезным может оказаться метод одобрительного голосования *AV* (см. книгу С. Брамса и П. Фишберна [8]). Оказывается, для дихотомической информации (которая без труда извлекается из результатов опросов и первичных выборов, правило *AV* совпадает с ПСВ [5], и индексы компромиссности можно качественно оценить на его основе.

Представляет также интерес вопрос о том, насколько метод ПСВ, (лежащий в основе расчета индекса (13)) может быть заменен при выборе победителя более простым методом Борда. Значения величин σ, получаемых для случая трех вариантов из (15), позволяют провести такое сравнение аналитически. Действительно, пусть $V = \{a, b, c\}$, и оценки избирателей для этих элементов выражаются положительными числами n_{ab}, n_{ac}, n_{bc}. Согласно правилу Борда, элементы a и b наберут при этом $n_{ab} + n_{ac}$ и $n_{ba} + n_{bc} = n - n_{ab} + n_{bc}$ баллов, соответственно. Элемент a

превосходит по правилу Борда элемент b, если выполнено

$$n_{ab} + n_{ac} > n_{ba} + n_{bc}. \tag{22}$$

В методе ПСВ, если учесть соотношения (17), это происходит, если

$$n_{ab}n_{ac} > n_{ba}n_{bc}. \tag{23}$$

Перепишем неравенства (22) и (23) следующим образом

$$\left(\frac{n_{ab}}{n_{bc}} - 1\right) n_{bc} > \left(\frac{n_{ba}}{n_{ac}} - 1\right) n_{ac} \tag{24}$$

и

$$\frac{n_{ab}}{n_{bc}} - 1 > \frac{n_{ba}}{n_{ac}} - 1. \tag{25}$$

Пусть элемент a превосходит элемент b по правилу ПСВ, т.е. выполнено (25). Тогда если $n_{ac} \leq n_{bc}$, будет выполнено (24), т.е. a будет лучше b по баллам Борда. Легко проинтерпретировать это условие: правило ПСВ, в отличие от правила Борда, квадратично по числам n_{ed} $(e, d \in V)$, и при сравнении элементов существенным образом учитывает их косвенную силу (в данном случае она определяется числами n_{ac} и n_{bc}), проявляемую по отношению к элементу c. Если преимущество a над b достигается не за счет такого косвенного превосходства (т.е. справедливо $n_{ac} \leq n_{bc}$), а в силу прямого доминирования (за счет n_{ab}), то a будет лучше b и по баллам Борда. Наоборот, если $n_{ac} \geq n_{bc}$ и разность $(n_{ac} - n_{bc})$ достаточно велика, а именно, справедливо

$$\frac{n_{ac}}{n_{bc}} > \left(\frac{n_{ab}}{n_{bc}} - 1\right)\left(\frac{n_{ba}}{n_{ac}} - 1\right)^{-1},$$

то (22) будет нарушено. В этом случае будет выполнено неравенство $n_{ba} - n_{ab} > n_{ac} - n_{bc}$, т.е. для того, чтобы ПСВ и правило Борда упорядочивали элементы a и b противоположным образом, необходимо наличие достаточного прямого превосходства элемента b над a. В случае, когда $n_{ac} \geq n_{bc}$ и вариант a лучше b по баллам Борда, будет справедливо и неравенство (25) (т.е. a лучше b и по ПСВ), как это непосредственно следует из (24).

Следующее предложение уточняет соотношение между параметрами, для которого упорядочение по Борда и ПСВ оказываются противоположными на паре элементов a и b. Введем в рассмотрение величину $\Delta = n_{bc} - n_{ac}$, показывающую отличие косвенного превосходства элементов b и a.

Утверждение 2. *Пусть все числа* $(n_u w)_{u,w\in V}$ *положительны, и для них выполнено одно из следующих двусторонних неравенств*

$$\frac{n_{bc}}{n_{ab}}(2n_{ab}-n) < \Delta < (2n_{ab}-n) \tag{26}$$

или

$$(2n_{ab}-n) < \Delta < (2n_{ab}-n)\frac{n_{bc}}{n_{ab}}. \tag{27}$$

Тогда в первом случае имеют место соотношения

$$aR^Bb \quad \text{и} \quad bR^{sc}a, \tag{28}$$

а во втором

$$aR^{sc}b \quad \text{и} \quad bR^Ba, \tag{29}$$

где R^B *и* R^{sc} *– бинарные отношения на* V*, определяемые согласно правилу Борда и ПСВ, соответственно.*

Обратно, справедливость (28) влечет ограничения (26), а (29) – ограничения (27).

Доказательство. Рассмотрим неравенства (26): в силу того, что $\Delta < 2n_{ab} - n$, будет выполнено $n_{bc} - n_{ac} < n_{ab} - n_{ba}$, т.е. справедливо (22), и значит, имеет место aR^Bb.

Рассмотрим теперь ограничение снизу на Δ. Оно дает неравенство

$$n_{bc}(n_{ab}-n_{ba}) < (n_{bc}-n_{ac})\,n_{ab},$$

которое после раскрытия скобок переходит в

$$n_{ab}n_{ac} < n_{ba}n_{bc}, \tag{30}$$

эквивалентное $bR^{sc}a$.

Если же справедливо (28), то из неравенств (22) и (23) следует (26).

Эквивалетность (27) и (29) доказывается аналогичным способом. *Q.E.D.*

Следствие. Правило Борда и ПСВ на множестве $V = \{a,b,c\}$ дают противоположную оценку упорядочения элементов a и b тогда и только тогда, когда разность чисел n_{bc} и n_{ac} удовлетворяет одной из систем ограничений (26) или (27).

Заметим, что ограничения (26), (27) могут быть выполнены далеко не для всяких наборов положительных чисел n_{ab} и n_{bc}. Чтобы представить возникающие здесь возможности, рассмотрим систему ограничений (26), в которой для определенности будем считать, что $n_{ab} > n/2$. Тогда для выполнения (26) необходимо выполнение неравенства $n_{bc} < n_{ab}$. Кроме этого нужно еще, чтобы между целым числом $(2n_{ab} - n)$ и, вообще говоря, дробным числом $\frac{n_{bc}}{n_{ab}}(2n_{ab} - n)$ находилось хотя бы одно целое число. Это имеет место, когда выполнено

$$2n_{ab} - n - \frac{n_{bc}}{n_{ab}}(2n_{ab} - n) > 1.$$

Если разрешить это неравенство относительно n_{bc}, то мы получим

$$n_{bc} < n_{ab} - \tfrac{n_{ab}}{2n_{ab} - n}. \tag{31}$$

Это неравенство имеет смысл при $n_{ab} - \frac{n_{ab}}{2n_{ab} - n} > 0$, т.е. когда $n_{ab} > (n + 1)/2$. Оба полученных неравенства сильнее ограничивают n_{ab} и n_{bc}, чем использованные ранее неравенства $n_{ab} > n/2$ и $n_{bc} < n_{ab}$. Разрешая (31) относительно n_{ab}, получим точную форму ограничений на n_{ab} и n_{bc}:

$$n_{ab} < \chi_1 \quad \text{или} \quad n_{ab} > \chi_2,$$

где χ_1 и χ_2 ($\chi_1 < \chi_2$) – корни соответствующего (31) квадратного уравнения

$$\chi_{1,2} = \frac{n + 1 + 2n_{bc}}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(n - 2n_{bc})^2 + 2n + 1 + 4n_{bc}}.$$

4 Роль аксиомы независимости от посторонних альтернатив в смене типа рациональности функций выбора

Аксиома независимости от посторонних альтернатив *I* была явно введена в теорию выбора К. Эрроу [9], хотя ее бинарное представление использовал еще Кондорсе при обсуждении достоинств правила относительного большинства. Для случая функций выбора, строящихся на основе информации, задаваемой профилем $r = (r_i)_{i=1}^n$, аксиома *I* формулируется следующим образом.

Пусть A – любое непустое множество предъявления, $A \subset V$, и на V заданы два профиля r и r', имеющие одинаковое сужение на A, т.е. для них справедливо $\forall i \quad r_i|_A = r'_i|_A$. Тогда выбор из A, осуществляемый с помощью групповой функции выбора C, отвечающей профилю r, совпадает с выбором из A на основе функции C', отвечающей профилю r', т.е. справедливо

$$\forall A \subset V \quad r|_A = r'|_A \Rightarrow C(A) = C'(A). \tag{32}$$

Если предположить, как это сделал Эрроу, что $C = C_R$, а $C' = C_{R'}$, где, например, $R = F(r)$ – групповое бинарное отношение на V, отвечающее профилю r (см. [1]), то эта аксиома принимает вид

$$\forall A \subset V \quad r|_A = r'|_A \Rightarrow F(r)|_A = F(r')|_A. \tag{33}$$

Легко заметить, что поскольку отношение R не зависит от множества предъявления, то в (33) достаточно ограничиться двухэлементными подмножествами, чтобы получить выполнение условий (33) для всех $A \subset V$. Так возникает *бинарное представление* аксиомы I:

$$\forall a, b \in V \quad r|_{\{a,b\}} = r'|_{\{a,b\}} \Rightarrow F(r)|_{\{a,b\}} = F(r')|_{\{a,b\}}. \tag{34}$$

Подчеркнем, что такое изменение соотношений (32) определяется не каким-то иным смыслом аксиомы I, а специальным предположением о структуре функции выбора, именно, ее представимостью некоторым бинарным отношением R на V. Сама же аксиома имеет весьма прозрачный смысл. При групповом выборе на множестве кандидатов A организаторы запрашивают у участников голосования информацию, отражающую их отношение только к элементам множества A. Например, бинарная информация запрашивается в виде индивидуальных упорядочений A, выражаемых бинарными отношениями $r_i[A]$. Областью определения этих отношений является множество A, что мы и указали в виде аргумента у r_i.

Поскольку вид A (состав его элементов) зависит от процедуры выдвижения кандидатов и заранее не может быть фиксирован, теория выбора обобщает эту ситуацию, рассматривая некоторое гипотетическое множество V как тот максимальный набор кандидатов, который может быть реализован на практике. Тогда любая конкретная реализация множества предъявления A оказывается некоторым подмножеством V, $A \subset V$. Естественно предположить, что участники голосования способны предоставить информацию о кандидатах для любого подмножества V, в частности, для всего V. Эти отношения обозначим через $r_i[V]$. Фиксировав множество A и определяя выбор из него, мы интересуемся только информацией $r_i[A]$ и никакой другой.

Поэтому значение функции группового выбора на множестве A, $C(A)$, должно зависеть только от $r_i[A]$, а не от каких-то $r_i[B]$ с $B \supset A$, в частности, оно не должно зависеть от всех значений $r_i[V]$. Вот такую независимость от оценок элементов, не принадлежащих множеству предъявления, и постулирует аксиома I. Ее роль фактически сводится *к фиксации вида входной информации, на основе которой строится выбор из заданного множества.* При этом нам существенно только то, что информация определяется в виде бинарных отношений, заданных на множестве A, (т.е. нам важна их форма), но мы не можем диктовать другие особенности этой информации, т.е. определять ее содержание. Содержание информации всецело зависит от мнений и желаний участников выбора и реализуется в ходе голосования. Аксиома I никак не ограничивает этот аспект информации, беспокоясь только об ее форме. В частности, бинарные отношения на A, $r_i[A]$, могут зависеть от вида индивидуальных бинарных отношений на всем V, $r_i[V]$. Может даже не выполняться обычно используемое соотношение $r_i[A] = r_i[V]|_A$. Аксиома I в данной ситуации не накладывает на информацию никаких дополнительных ограничений, поскольку в своей формулировке (32) она по сути содержит только посылку "...если $r_i[A] = r_i'[A]$", а не то, что информация на A должна получаться сужениями на A некоторых заданных бинарных отношений. Более того, требования к форме представления исходной информации в виде профиля бинарных отношений на A совсем не исключают ее зависимости от информации об элементах, не входящих в A. Этот эффект возникает, например тогда, когда участники голосования упорядочивают элементы A, используя многокритериальный подход. Именно, пусть участник i оценивает элементы из V на основе совокупности $\left\{c_i^j\right\}_{j=1}^{k(i)}$ скалярных критериев c_i^j, сопоставляющих каждому варианту $a \in V$ набор из $k(i)$ чисел $c_i^j(a)$. Упорядочивая элементы V с помощью этих критериев и применяя какую-нибудь свертку (например, баллы Борда), участник i строит результирующую скалярную оценку $\rho_i(a)$, которая и порождает его бинарное отношение r_i на V. Если использовать так полученные отношения при построении групповой функции выбора (применяя для построения выбора из A сужение профиля r на A), то ее значения будут зависеть от поведения скалярных критериев не только на элементах из A, но и на элементах из $V \setminus A$. Меняя поведение c_i^j только на этих элементах, можно добиться изменения значений $r_i|_A$, что в свою очередь может поменять групповой выбор $C(A)$. В результате, даже при выполнении аксиомы I выбор из A будет меняться при изменении индивидуальной информации только на элементах из $V \setminus A$. Проиллюстрируем этот эффект на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим трех участников, производящих выбор из множества $V = \{a, b, c\}$. Предположим, что они ведут оценку элементов на основе следующих моделей:

1. Участник 1 использует пять критериев, согласно которым элементы V упорядочиваются согласно таблице 7.

3	2
a	b
b	c
c	a

Таблица 7
(в верхней строке указаны числа критериев,
порождающих соответствующие упорядочения)

Для построения бинарного отношения r_1 на V он использует правило Борда. Баллы Борда ρ_1 для этого упорядочения равны:

$$\rho_1(a) = 6,\ \rho_1(b) = 7,\ \rho_1(c) = 2.$$

Тогда результирующее упорядочение r_1 имеет вид: $\langle b\ a\ c \rangle$.

2. Участник 2 оценивает V также по пяти критериям, результат его оценки представлен в таблице 8.

3	2
a	c
b	b
c	a

Таблица 8

Его упорядочение r_2 согласно правилу Борда – $\langle a\ b\ c \rangle$.

3. Участник 3 оценивает V по семи критериям (см. таблицу 9).

4	3
a	b
b	c
c	a

Таблица 9

Его упорядочение, r_3, вычисленное по правилу Борда, – $\langle b\ a\ c\rangle$.

В соответствии с индивидуальными бинарными отношениями возникает профиль $(r_i)_{i=}^{3}$, представленный в таблице 10.

$r_1,\ r_3$	r_2
b	a
a	b
c	c

Таблица 10

Пусть для выработки группового решения R применяется правило простого большинства. Тогда групповое упорядочение есть $\langle b\ \ a\ \ c\rangle$. Если рассмотреть сужение профиля r на множество $\{a, b\}$, то групповое упорядочение этих элементов по правилу простого большинства будет $\langle b\ \ a\rangle$, как и должно быть согласно сужению R на $\{a, b\}$, т.к. правило простого большинства порождает для данного профиля Кондорсе-рациональную функцию выбора, которая, очевидно, удовлетворяет аксиоме I.

Оставим теперь оценки участников 2 и 3 неизменными, а критериальные оценки участника 1 слегка преобразуем, так что взаимное положение элементов a и b в них остается прежним (см. таблицу 11):

3	2
a	c
b	b
c	a

Таблица 11

Новое индивидуальное отношение участника 1, r'_i, станет теперь $\langle a\ b\ c\rangle$, т.к. $\rho'(a) = 6$, $\rho'(b) = 5$, $\rho'(c) = 4$. Измененный профиль $r' = (r'_i)_{i=1}^3$ (напомним, что мы считаем $r'_2 = r_2$, $r'_3 = r_3$) будет теперь иметь следующий вид (см. таблицу 12):

r'_1, r'_2	r'_3
a	b
b	a
c	c

Таблица 12

Групповое отношение R' на множестве $\{a, b\}$ будет теперь $\langle a\ b\rangle$, т.е. изменится на противоположное по сравнению с $R|_{\{a,b\}}$!

Таким образом, при изменении оценки элемента c (не входящего в множество $\{a, b\}$) групповое отношение, а значит, и выбор из множества $\{a, b\}$, меняется. Это по-существу противоречит идее аксиомы независимости выбора от посторонних альтернатив, если применять ее не к преобразованной информации (в виде профиля $r = (r_i)_{i=1}^3$), а к исходной информации, заданной в табл. 7-9, 11. Однако, поскольку выполнено $r|_{\{a,b\}} \neq r'|_{\{a,b\}}$, то аксиома I не будет нарушена. В результате, основным последствием использования аксиомы I является не факт независимости выбора из множества $A \subset V$ от информации о "посторонних" (т.е. лежащих в $V \setminus A$) элементах, а реализация важного для группового выбора свойства: избиратели, приходя на выборы, должны высказываться только о кандидатах, включенных в избирательный список, а не о каких-то других. Ограничение же формы представления исходной информации неизбежно вводит в групповое отношение $R = \Psi(r)$ зависимость от множества кандидатов A, поскольку функция агрегирования Ψ, строящая это отношение (см. [1], использует в качестве своего аргумента не профиль r, заданный на "потенциально возможном" множестве кандидатов V, а его сужение $r|_A$ на A:

$$R \equiv R_A = \Psi(r|_A). \tag{35}$$

Подчеркнем, что необходимость использования (35) для нахождения группового отношения на множестве A функции агрегирования, примененной к информации, выраженной в виде некоторых высказываний об элементах этого множества, продиктована не теоретическими соображениями, а традиционной процедурой проведения голосования. Аксиома *I* является всего лишь формальным следствием этой процедуры, закрепляющим на математическом языке черты реально существующего процесса, который тем самым по своей форме требует применения Борда-рациональных функций выбора. С введением аксиомы независимости от посторонних альтернатив теория выбора фактически должна была бы перейти именно к этому типу рациональности, имманентно присущему структуре этой аксиомы. Попытка же одновременного использования традиционной концепции рациональности и аксиомы *I* с неизбежностью приводит к возникновению парадоксов типа теоремы о невозможности или минимального либерализма. Переход к новому типу рациональности, важность которого интуитивно почувствовал еще в конце XVIII века Жан-Шарль Борда, снимает это противоречие, позволяя строить полнокровные классы функций демократического выбора, совместимые с требованиями аксиомы *I*.

Литература

1. Левченков В.С. Элементы эргодической теории с приложениями к проблемам выбора. II. Приложение эргодической теории к задачам выбора (учебное пособие). ВМиК МГУ, 1997.

2. Левченков В.С., Левченкова Л.Г. Два подхода к представлению о рациональном выборе//Нелинейная динамика и управление. Вып. 1: Сборник статей /Под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. - М.: Физматлит, 2001, стр. 393-416.

3. Левченков В.С., Левченкова Л.Г. Выбор по циклическим турнирным отношениям//Прикладная математика и информатика №5, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2000, стр. 86-99.

4. Левченков В.С. Игровое обоснование правила самосогласованного выбора. Вестник Моск. ун-та. Серия 15 Вычислительная математика и кибернетика, 2000, № 1, стр. 30-34.

5. Левченков В.С., Левченкова Л.Г. Проблема выбора из трехэлементного множества: некоторые уроки президентской

кампании (США, 2000г.)//Прикладная математика и информатика №7, М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2001, стр. 90.

6. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. М., Мир, 1991.

7. Гривко В.Л. Теоретическое исследование правила самосогласованного выбора и его применение в задачах обработки и анализа геофизической информации. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Москва, 1996.

8. Brams S.J., and Fishburn P.C. Approval Voting. Birkhauser, 1982.

9. Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. New Haven, London: Yale University Press, 1963.