Левченков В.С., Левченкова Л.Г.

Выбор по циклическим турнирным отношениям

1. Введение

Проблема выбора по циклическим турнирным отношениям (см. книгу [1] или обзор [2]) служит прекрасным стимулом для разработки все новых и новых подходов в теории социального выбора. Интерес к этой задаче обусловлен тем, что в силу широко известной теоремы Эрроу о невозможности [3] при достаточно умеренных требованиях, предъявляемых к отношениям профиля, любая недиктаторская функция агрегирования приводит к циклическому групповому решению по крайней мере на одном подмножестве множества предъявления. Например, правило простого большинства порождает обширное множество циклических путей в пространстве выбора. Влияние этого явления на решение задачи выбора впервые исследовалось в работе Мак-Кельви [4] и широко обсуждалось в дальнейшем.

С течением времени появилось довольно много подходов, использующих специфические особенности турнирного отношения для построения непустых множеств лучших элементов. Отметим среди них решения Фишберна [5], Миллера [6], Бенкса [7], Дутты [8], Шварца [9]. Общим недостатком всех подходов является чрезмерная обильность множества победителей, возникающая во многих конкретных случаях. Поэтому необходимость в построении новых правил выбора отнюдь не отпала.

В этой работе мы строим обобщение известного *отношения накрытия* (см. [5] и [6]), пополняя его новыми парами элементов в зависимости от некоторых числовых особенностей исходного турнирного отношения.

Полученное новое турнирное решение (названное *согласованным*) оказывается ациклическим и порождает непустое, но, вообще говоря, более узкое множество выбора, чем в случае отношения накрытия.

Использование максимального элемента $a^*\in X$ турнирного отношения T на X в качестве выбора из X покоится на естественной логике парного сравнения элементов друг с другом: если элемент a^* превосходит любой другой элемент $b^*\in X$ при сравнении по бинарному отношению T, то он и должен считаться лучшим в X. Эта логика делает неизбежным выбор a^* (который называется *победителем по Кондорсе*), но, к сожалению, весьма редко осуществима из-за отсутствия такого элемента для подавляющего числа циклических турнирных отношений. Чтобы построить выбор по T и в таких условиях, необходимо отойти от логики парных сравнений и производить сравнение в множествах из трех, четырех и т. д. элементов. Однако, a priory неясно, на основе какого принципа оценивать предпочтительность элементов в множествах такой мощности: ведь T может оказаться нетранзитивным уже и в малых множествах.

В данной работе показывается, что важную роль в решении этой задачи может играть правило выбора по Копленду [1]. Действительно, выбор победителя по Кондорсе можно провести, основываясь на выборе по Копленду в каждой паре, поскольку если справедливо aTb, то элемент a имеет и большее значение числа Копленда по сравнению с b. Однако, метод Копленда годится и для множеств из трех и более элементов, независимо от свойств транзитивности бинарного отношения. Таким образом, в целом не сводя проблему выбора из X к выбору по Копленду, можно использовать этот метод для построения других способов выбора, опираясь на него при сравнении заданного элемента из X с остальными в рамках, например, двух и трехэлементных множеств. В работе показывается, что если выбирать лучший элемент a в X, полагая что при каждом $b \in X \setminus \{a\}$ этот элемент должен быть победителем по Копленду либо в паре (a,b), либо в одной из троек $\{a,b,c\}$, где c выбирается из условия $aTcTb$, то множество всех таких лучших элементов совпадет с ненакрытым множеством $S^u(X)$. Таким образом, можно получить ненакрытое множество, *используя не отношения* накрытия R^u, а исходное турнирное отношение T и другой (непарный) принцип сравнения элементов друг с другом.

Развивая эту методологию дальше и используя сравнение элементов в рамках множеств двух, трех и четырех элементов, мы строим *согласованное турнирное решение*. Оно отбирает те элементы $a \in X$, которые при каждом $b \in X \setminus \{a\}$ являются победителями по Копленду либо в паре $\{a,b\}$ и каждой четверке $\{a,b,e,d,\}$ (при этом e и d, удовлетворяющие условиям bTe и bTd, являются элементами из X, подтверждающими силу элемента b), либо в одной из троек $\{a,b,c\}$ (с элементом c, подчиненным условию $aTcTb$ и тем самым демонстрирующим "косвенную" силу элемента a по сравнению с b). Это многоэлементное сравнение приводит к тому, что даже если элемент a выигрывает прямое сравнение с элементом b (т. е. справедливо aTb), то это обстоятельство еще не гарантирует признание его в качестве элемента лучшего чем b. Для этого ему нужно побеждать b по методу Копленда либо в некоторой тройке элементов $\{a,b,c\}$, либо даже в каждой четверке $\{a,b,e,d\}$, выбранной соответствующим образом.

2. Обзор основных турнирных решений

Под турнирным отношением (или просто турниром) мы будем понимать любое асимметричное и связное бинарное отношение T, определенное на конечном множестве X, содержащем m элементов, $|X|=m$. Формально это означает, что T удовлетворяет свойствам

а) иррефлексивности, $\forall a \in X \quad T(a,a)=0$

b) самодвойственности, $\forall a,b \in X \quad (a \neq b) \Rightarrow T(a,b)+T(b,a)=1$,

при формулировке которых используется характеристическая форма бинарного отношения T:

$$T(a,b)=\begin{cases} 1, & \text{если справедливо} \quad aTb \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \qquad (1)$$

В силу асимметричности T формальное выражение aTb означает, что элемент a строго превосходит (бьет) элемент b при парном сравнении.

Выбор из любого подмножества $A \subset X$ формализуется на основе понятия функции выбора S, определенной на множестве $2^X \setminus \varnothing$ всех непустых подмножеств множества X

$$S: \; 2^X \setminus \varnothing \to 2^X, \quad \text{причем} \quad \forall A \in 2^X \setminus \varnothing \quad S(A) \subset A.$$

Функция выбора называется *непустой,* если справедливо $(A \neq \varnothing) \Rightarrow S(A) \neq \varnothing$.

Индикаторное (характеристическое) представление функции выбора S задается семейством характеристических функций $\{W_A^S\}_{\{A \in 2^X \setminus \varnothing\}}$, описывающих каждое множество выбора $S(A)$:

$$W_A^s(a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \in S(a) \\ 0, & \text{если} \quad a \notin S(a) \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что любой индикатор $W_A^S(a)$ порождает булеву функцию, определенную на соответствующем ему множестве A

$$W_A^s: \quad A \rightarrow \{0,1\}.$$

Функция выбора S^T для турнирного отношения T строится стандартным образом на основе множеств его максимальных элементов $L(T,A)$:

$$L(T,A) = \{a \in A: \sim\exists\, b \in A\; bTa\}, \tag{3}$$

где ~ - знак логического отрицания.

Полагая теперь $S^T(A) = L(T,A)$, мы получим функцию выбора на X, но не обязательно непустую. Индикаторное представление этой функции, W_A^T, легко получается из (3):

$$W_A^T(a) = \prod_{b \in A \setminus \{a\}} T(a,b) \tag{4}$$

В силу асимметрии турнирного отношения T, $W_A^T(a)$ может принимать значение 1 не более, чем на одном элементе $a^* \in A$ $(W_X^T(a^*) = 1)$, который называется *победителем по Кондорсе.* Как показывают примеры, очень часто - в силу цикличности T - такой элемент отсутствует, что снижает ценность предложенной функции выбора. Это обстоятельство ставит проблему построения некоторого нового бинарного отношения (конечно, зависящего от T), обладающего свойством ацикличности и порождающего непустую функцию выбора S. При построении таких функций широко применяются следующие два принципа [5], обеспечивающие связь S с исходным турнирным отношением T.

Принцип Кондорсе. Если элемент $a^* \in X$ является победителем по Кондорсе для турнира T, то $S(X) = \{a^*\}$.

В силу указанного выше факта несуществования такого a^* для подавляющего числа турниров, этот принцип слабо ограничивает вид S. Поэтому было предложено следующее его обобщение.

Принцип Смита. Если множество предъявления A разбивается на два множества A_1 и A_2 так, что для всех a из A_1 и b из A_2 выполнено aTb, тогда $S(A) \subset A_1$.

Заметим, что если в A есть победитель по Кондорсе a^*, тогда $A_1 = \{a^*\}$, и из принципа Смита следует принцип Кондорсе.

Среди функций выбора, построенных по турнирному отношению T и удовлетворяющих принципу Смита, рассмотрим следующие.

1) **Ненакрытое множество** - S^u (см. [5], [6])

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad S^u(A) = L(R^u, A), \tag{5}$$

где R^u - так называемое *отношение накрытия* на A:

$\forall a, b \in A$

$$(R^u(a,b)=1) \Leftrightarrow (T(a,b)=1) \& (\forall c \in A \setminus \{a,b\} \qquad T(a,c) \geq T(b,c)). \tag{6}$$

2) **Минимальное накрывающее множество** - S^{mc} (см. [8])

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad S^{mc}(A) = MC(A), \tag{7}$$

где $MC(A)$ является наименьшим накрывающим множеством в A. При этом множество $B \subset A$ называется *накрывающим*, если для него выполнено

a) $L(R^u, B) = B$ (8)

b) $\forall a \in A \setminus B \quad a \notin L(R^u, B \cup \{a\})$.

Дутта [8] показал, что среди всех накрывающих множеств в A существует наименьшее (по включению) множество $MC(A)$, которое содержится в ненакрытом множестве $S^u(A)$:

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad MC(A) \subset S^u(A).$$

3) **Множество Копленда** - S^{SC}

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad S^{SC}(A) = \{a \in A: \quad \forall b \in A \qquad s_A(a) \geq s_A(b)\}, \tag{9}$$

где $s_A(a)$ - число Копленда для элемента $a \in A$. Оно зависит от множества предъявления a и равно количеству тех вариантов из A, которые уступают элементу a по турнирному отношению T:

$$s_A(a) = |\{b \in A: \quad aTb\}|. \tag{10}$$

Индикаторное представление функции выбора $S^{SC}(A)$ будет играть существенную роль в дальнейшем изложении, поэтому мы используем для него более простое обозначение $W_A(a)$:

$$W_A(a)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad s_A(a)=\max\limits_{b\in A} s_A(b)\\ 0, & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases} \qquad (11)$$

Отметим, что также как и для случая выбора по Копленду значения отношения накрытия $R^u(a,b)$ зависят на самом деле не только от выбора пары элементов (a,b), но и от множества предъявления A, на котором R^u определяется (см., например, соотношение (6)). Иногда, чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы будем использовать обозначение $R^u[A]$, имея в виду, что это отношение вычисляется на множестве A. Наличие такой зависимости показывает, что, в действительности, функция выбора S^u использует для построения множеств $S^u(A)$ и $S^u(B)$ (для несовпадающих A и B), вообще говоря, различные бинарные отношения $R^u[A]$ и $R^u[B]$, которые отличаются не только областями определения, но и своими значениями на общей части элементов:

$$R^u[A]|_{A\cap B}\in R^u[B]|_{A\cap B}.$$

Этот факт подчеркивает существенное концептуальное различие в подходах к построению функции выбора на основе накрывающего отношения (5) (или множества Копленда (9)) и минимального накрывающего множества (7). Действительно, в случае (5) (или (9)) выбор из множества предъявления A строится только на основе бинарного отношения, вычисляемого именно для этого множества. В случае же минимального накрывающего множества это уже не так. Действительно, чтобы найти $MC(A)$, необходимо построить совокупность всех накрывающих множеств B, удовлетворяющих (8). При этом для нахождения некоторого B используется накрывающее отношение $R^u[B]$ (см. пункт а) в формуле (8)), которое, вообще говоря, отличается от $R^u[A]$. Более того, даже для построения одного B требуется целая совокупность различных отношений $R^u[B\cup\{a\}]$ (см. пункт b) в (8)).

Отдавая предпочтение логике правил (5) и (9), мы будем строить на каждом A самостоятельное бинарное отношение (включающее в себя отношение накрытия), а по нему будем уже строить функцию выбора, выбирающую максимальные элементы этого отношения. Отметим, что похожая попытка усиления отношения накрытия была предпринята ранее в работе [10]. Однако, в предложенном авторами подходе нет гарантии того, что получаемая ими функция выбора будет непустой.

3. Согласованное турнирное решение

Легко показать, что отношение накрытия R^u для каждого A содержится в турнирном отношении T, т. е. $R^u\subset T$. Действительно, вычисляя $R^u[A]$, мы признаем любую пару элементов $(a,b)\in A^2$, принадлежащую отношению T, связанной также отношением $R^u[A]$, если выполнено соотношение (6). В противном случае эта пара не включается в отношение $R^u[A]$. Подчеркнем, что пара $(a,b)\in A^2$ не связана отношением $R^u[A]$ только в двух случаях: во-первых, когда справедливо bTa, т. е. $T(a,b)=0$, и во-вторых, когда выполнено $T(a,b)=1$, но найдется такой элемент $c\in A$, что $T(b,c)=1$, но $T(a,c)=0$ (или, эквивалентно, $T(a,c)<T(b,c)$). Другими словами, элемент a, превосходящий элемент b по

турнирному отношению T, будет превосходить его и по отношению накрытия, если a превосходит по T любой другой элемент c, который бьет b. Это означает, что соотношение $aR^u b$ может не иметь места по двум совершено разным причинам. Во-первых, потому, что элемент a не превосходит элемент b по T (другими словами, нет прямого доминирования a над b), а во-вторых, из-за того, что найдется такой элемент c, который проигрывает элементу b ($T(b,c)=1$), но бьет элемент a ($T(c,a)=1$) (и значит нет косвенного - относительно других элементов - превосходства элемента a над b).

Рассмотрим более внимательно первый случай, когда справедливо bTa. Можно ли каким-то образом усилить условие косвенного доминирования элемента a над b, чтобы компенсировать этим его прямой проигрыш элементу b? Предположим, что это можно сделать, использовав следующий вариант косвенного доминирования: пусть для множества тех c, которые отличаются от a и b, не только справедливо $T(a,c)\geq T(b,c)$, но и среди них найдутся q таких элементов $\{c_i\}^q_{i=1}$, $q\geq 1$, для которых эти неравенства будут строгими (т.е. выполнено $T(a,c_i)>T(b,c_i)$).

Определение 1. Пусть задано некоторое множество $A\in 2^X\setminus\varnothing$. Будем говорить, что элемент $a\in A$ *q - доминирует* элемент b (и обозначать это, как $aD_q b$), если выполнено

$$\forall c\in A\setminus\{a,b\} \qquad T(a,c)\geq T(b,c), \tag{12}$$

$$\sum_{c\in A\setminus\{a,b\}} (T(a,c) - T(b,c))\geq q(T(b,a) - T(a,b)). \tag{13}$$

Первое условие, очевидно, совпадает с условием косвенного доминирования, а второе - тривиально выполняется, если $T(a,b)=1$. Однако, когда $T(a,b)=0$, последнее условие гарантирует наличие не менее q элементов $c\in A\setminus\{a,b\}$, для которых $T(a,c)>T(b,c)$.

Для удобства будем называть бинарное отношение D_q, введеное в определении 1 отношением *q-доминирования.*

Заметим, что D_q явно зависит от выбора множества A. Поскольку выбор этого множества обычно ясен из контекста мы не будем указывать его в обозначении отношения.

Предложение 1. Любое отношение q-доминирования включает в себя отношение накрытия:

$$\forall A\in 2^X\setminus\varnothing, \qquad \forall a,b\in A \qquad R^u(a,b)\leq D_q(a,b). \tag{14}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что если справедливо $aR^u b$, то выполнено также $aD_q b$. Действительно, когда имеет место aTb, будет выполняться и условие (13), а условие (12) является составной частью определения R^u. *Q.E.D.*

Определим теперь по D_q функцию выбора $S^D_q(A)$, полагая

$$\forall A\in 2^X\setminus\varnothing \qquad S^D_q(A)=L(D_q,A). \tag{15}$$

Предложение 2. $S_1^D(A) \subset S_2^D(A) \subset \ldots \subset S^u(A)$.

Это утверждение вытекает из очевидного факта

$$D_1(a,b) \geq D_2(a,b) \geq \ldots \geq R^u(a,b).$$

Хорошо известно [6], что ненакрытое множество $S^u(A)$ всегда непусто и является частью верхнего цикла турнирного отношения T. Это свойство оказывается справедливым для любого $S_q^D(A)$ с $q \geq 2$.

Теорема 1. При $q \geq 2$ каждое отношение q-доминирования D_q асимметрично и ациклично, а $S_q^D(A)$ является непустой частью ненакрытого множества $S^u(A)$.

Доказательство. Пусть A - непустое множество предъявления, $s_A(a)$ - функция Копленда (10) на A. Если имеет место $D_q(a,b)=1$, то в случае $T(a,b)=1$ будет справедливо

$$\sum_{c \in A \setminus \{a,b\}} T(a,c) \geq \sum_{c \in A \setminus \{a,b\}} T(b,c),$$

а в случае $T(b,a)=1$ выполнено

$$\sum_{c \in A \setminus \{a,b\}} T(a,c) \geq \sum_{c \in A \setminus \{a,b\}} T(b,c)+q.$$

Используя определение функции Копленда (10), для обоих случаев легко получить, что $s_A(a)>s_A(b)$, если $q \geq 2$. Из этого соотношения с очевидностью вытекает асимметрия и ацикличность любого D_q при $q \geq 2$. Хорошо известно, что для таких отношений множество $L(D_q,A)$ непусто. В силу предложения 2 оно содержится в ненакрытом множестве. *Q.E.D.*

Отметим, что отношение D_1 оказывается в ряде случаев циклическим, как это следует из следующего примера.

Пример 1. Пусть $X=\{a,b,c\}$, а турнир T задан соотношениями

$$T(a,b)=T(b,c)=T(c,a)=1.$$

Тогда, согласно определению, отношение D_1 имеет вид:

$D_1(b,a)=D_1(a,c)=D_1(c,b)=1$, т. е. образует цикл.

Из теоремы 1 и предложения 2 следует, что отношение D_2 позволяет решить поставленную нами задачу: оно порождает всегда непустое множество выбора, сужающее ненакрытое множество S^u. Причем среди всех D_q $(q \geq 2)$ это отношение сужает S^u в наибольшей степени. Поэтому введем специальное обозначение $S^{mat}(A)$ для функции выбора $S_2^D(A)$ и назовем ее *согласованным турнирным решением*, имея ввиду, что вопрос о принадлежности пары (a,b) отношению D решается на основе определенного компромисса (согласованности) между числом побед элементов a и b в играх между собой и с другими участниками (подробнее математические аспекты этого согласования будут рассмотрены далее).

Теперь же изучим некоторые свойства S^{mat}.

Элементы, принадлежащие множеству $S^{mat}(A)$ можно описать, опираясь только на свойства турнирного отношения T. Чтобы сделать это, введем следующее определение.

Определение 2. Пусть в множестве A задана тройка различных элементов a, b и c. Скажем, что элемент c поддерживает элемент a по отношению к b (или, короче, является ***ab*-партнером**), если выполнено $T(a,c)=T(c,b)=1$.

Теорема 2. Произвольный элемент b из множества предъявления A принадлежит согласованному решению $S^{mat}(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in A \setminus \{b\}$ в A либо найдется хотя бы один ba-партнер, либо элемент b превосходит a по отношению T, но в A существует не более, чем один ab-партнер.

Доказательство. Если $b \in S^{mat}(A)$, то согласно (15) в A не существует такого элемента a, для которого выполнено aD_2b. Согласно определению 1, это означает, что либо нарушено условие (12), т. е. существует элемент $c \in A$, для которого $T(a,c)=0$, а $T(b,c)=1$ (и значит c является ba-партнером), либо нарушено условие (13), т. е. справедливо $T(a,b)=0$ и найдется не более одного элемента $d \in A$, для которого $T(a,d)=1$, $T(b,d)=0$ (т. е. d является ab-партнером). С другой стороны, если для произвольного $a \in A \setminus \{b\}$ выполняется хотя бы одно из условий теоремы, то для него выполнено $D_2(a,b)=0$, и значит согласно (15) b должно быть включено в $S^{mat}(A)$. *Q.E.D*

Теорема 2 накладывает на S^{mat} условия, похожие на так называемый *принцип двухшагового превосходства*, хорошо известный для ненакрытого множества: элемент $a \in A$ принадлежит $S^u(A)$ тогда и только тогда, когда $\forall b \in A \setminus \{a\}$ либо справедливо aTb, либо найдется такой $c \in A$, что выполнено $aTcTb$.

Для S^{mat} аналог этого принципа согласно теореме 2 звучит так: элемент $a \in A$ принадлежит $S^{mat}(A)$ тогда и только тогда, когда $\forall b \in A \setminus \{a\}$ либо найдется такой $c \in A$, что выполнено $aTcTb$, либо справедливо aTb, и не существует в A двух различных элементов c и d, для которых выполнено $bTcTa$ и $bTdTa$.

Очевидно, условия на $S^{mat}(A)$ более ограничивающие, чем условия двухшагового превосходства, что и обеспечивает справедливость включения $S^{mat}(A) \subset S^u(A)$.

Важность исследования турниров в контексте группового выбора была подчеркнута обнаруженной Мак-Гарви [11] связью этих отношений с бинарными отношениями, строящимися по правилу большинства для случая n строгих линейных порядков r_i $(i=1, \dots ,n)$. При этом связь T и профиля $r = \{r_i\}_{i=1}^n$ задается обычным образом:

$$\forall a,b \in A \qquad T(a,b)=1 \Leftrightarrow |\{i:\ ar_ib\}| > |\{i:\ br_ia\}|. \tag{16}$$

Это обстоятельство позволяет перенести на турниры те нормативные условия - типа Парето-оптимальности, монотонности или нейтральности, - которые считаются традиционными для задач группового выбора. Соответствующие условия оказываются выполненными и для S^{mat}.

Теорема 3. S^{mat} порождает на X функцию выбора, удовлетворяющую условиям Парето-оптимальности, нейтральности и монотонности. Она удовлетворяет также условию Смита и аксиоме Эрроу о независимости от посторонних альтернатив.

Доказательство легко следует из связи (16), транзитивности профиля и определения S^{mat}.

Заметим, что если a^* является победителем по Кондорсе в множестве A, то $S^{mat}(A)=\{a^*\}$.

Известно, что ненакрытое множество $S^u(A)$ также совпадает с победителем по Кондорсе, если он существует. Однако, когда его нет в A, множество $S^u(A)$ обязательно содержит не менее трех альтернатив (см. [6] или [2]). Согласованное решение не подвержено такому ограничению. Этот факт подтверждается следующим примером.

Пример 2. Пусть $X=\{a^*,w,a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\}$ - множество предъявления, содержащее 8 элементов. Зададим турнирное отношение T на X матрицей $(T(a,b))_{a,b\in X}$, представленной в Таблице 1.

	a^*	w	a_1	a_2	b_1	b_2	c_1	c_2
a*	0	0	1	1	1	1	1	1
w	1	0	1	1	0	0	1	1
a_1	0	0	0	0	1	1	1	1
a_2	0	0	1	0	1	1	1	1
b_1	0	1	0	0	0	0	1	1
b_2	0	1	0	0	1	0	0	0
c_1	0	0	0	0	0	1	0	0
c_2	0	0	0	0	0	1	1	0

Табл. 1. Матрица турнирного отношения из примера 2

Используя (12) и (13), легко найти вид D_2, именно, справедливо a^*D_2w, $a^*D_2a_1$, $a^*D_2a_2$, $a^*D_2c_1$, $a^*D_2c_2$, wD_2b_1, и $b_1D_2b_2$. Таким образом, $S^{mat}(X)=\{a^*\}$. В то же время, поскольку a^* не является победителем по Кондорсе, $S^u(X)=\{a^*,w,b_1,b_2\}$. Отметим также, что множество Дутты $MC(X)$ для этого случая совпадает с множеством Шварца $TEQ(X)$ (см. определение в [9] или в [12]) и содержит три элемента: $MC(X)=TEQ(X)=\{a^*,w,b_2\}$. Таким образом, в данном примере S^{mat} оказывается самым узким непустым турнирным решением.
Однако, существуют ситуации, для которых $S^{mat}\setminus TEQ\neq\varnothing$ или даже $TEQ\subset S^{mat}$.

Пример 3. (Dutta [12])}{Пусть X содержит 8 элементов, $X=\{x_1,...,x_8\}$, а турнирное отношение задается матрицей (см. Табл. 2).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	0	0	1	0	0	1	0	0
x_2	1	0	0	1	0	0	1	0
x_3	0	1	0	1	1	0	0	0
x_4	1	0	0	0	1	1	1	1
x_5	1	1	0	0	0	1	0	1
x_6	0	1	1	0	0	0	1	1
x_7	1	0	1	0	1	0	0	1
x_8	1	1	1	0	0	0	0	0

Табл. 2. Матрица турнирного отношения из примера 3

Легко проверить, что $S^{mat}(X)=\{x_3,x_4,...,x_8\}$, так как D_2 включает только две пары: $x_4D_2x_2$ и $x_6D_2x_1$. Согласно [8], $TEQ(X)=\{x_1,x_2,...,x_7\}$, а $MC(X)=X$. Таким образом,

$TEQ(X) \setminus S^{mat}(X)=\{x_1,x_2\}$, а $S^{mat}(X) \setminus TEQ(X)=\{x_8\}$.

Пример 4 (Schwartz [9]). Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_9\}$, а турнирное отношение задано матрицей, представленной в Таблице 3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0	1
x_3	0	0	0	1	1	0	0	1	1
x_4	0	1	0	0	0	0	1	0	1
x_5	1	1	0	1	0	1	0	1	0
x_6	1	0	1	1	0	0	1	0	1
x_7	1	1	1	0	1	0	0	1	1
x_8	1	1	0	1	0	1	0	0	1
x_9	1	0	0	0	1	0	0	0	0

Табл. 3. Матрица турнирного отношения из примера 4

Для этого примера $S^{mat}(X)=\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8\}$, так как отношение D_2 включает следующие пары: $x_6D_2x_2$, $x_7D_2x_4$ и $x_7D_2x_9$. Множество TEQ существенно меньше: $TEQ(X)=\{x_5,x_6,x_7\}$.

Анализируя размеры множеств выбора в примерах 3 и 4 для различных типов решений, следует помнить то отличие, которое существует между подходом, примененным для построения $S^{mat}(A)$ и подходом, использованным при определении $MC(A)$ (а также и $TEQ(A)$). В первом случае на A строится некоторое бинарное отношение D_2, максимальные элементы которого и составляют $S^{mat}(A)$. Во втором, множество $MC(A)$ получается на основе некоторых условий накрытия и устойчивости (см. соотношения a) и b) в (8)), которые вводят в рассмотрение не одно, а много (и, вообще говоря, разных) бинарных отношений на A, зависящих от того подмножества $S\subset A$, которое выделяется как претендент на решение.

Если применить такой же подход к S^{mat}, то можно получить следующий эффект. Рассмотрим в примерах 3 и 4 наряду с S^{mat} его степени, т. е.

$S^{mat}(A), S^{mat}(S^{mat}(A))=(S^{mat})^2(A), \dots$

Тогда оказывается, что для примера 3 $(S^{mat})^3(X)=\{x_4\}$, т. е. сводится к единственному элементу. Аналогично, в примере 4 $(S^{mat})^3(X)=\{x_7\}$.

К сожалению, даже несмотря на эффективное сужение множеств выбора, такой подход кажется нам некорректным. Это связано с тем, что отношение D_2 на X и отношение D_2 на $S^{mat}(X)$ - это, вообще говоря, два разных (!) бинарных отношения, построенных по различным частям информации о выборе (определяемой соответствующими сужениями турнирного отношения T). В силу этого, сравнение элементов из X с целью построения $S^{mat}(X)$ и сравнение элементов из $S^{mat}(X)$, например, при нахождении $(S^{mat})^2(X)$ - это две различных процедуры, относительно которых элементы из X находятся в неэквивалентном положении, что ставит под сомнение обоснованность превосходства элементов из $(S^{mat})^2(X)$ над элементами из $S^{mat}(X)$.

Процедура построения на множестве A бинарного отношения накрытия $R^u[A]$ со всей отчетливостью показывает, что значения этого отношения на парах элементов из A связаны не только с поведением турнирного отношения T на этих парах, но и с определенной согласованностью его значений на тройках элементов. Действительно, для некоторой пары $a,b \in A$ мы полагаем $R^u(a,b)=1$, если не только $T(a,b)=1$, но и для всех троек различных элементов вида $\{a,b,c\}$, $c \in A$, справедливо $T(a,c) \geq T(b,c)$. В результате, включение (или невключение) элемента $a \in A$ в ненакрытое множество $S^u(A)$ также должно зависеть от результата тернарных сравнений этого элемента с остальными элементами из A. Чтобы формализовать это утверждение, используем характеристическое представление (2) для функции выбора.

Оказывается, что турнирные решения $S^u(A)$ и $S^{mat}(A)$ могут быть описаны на основе значений функции выбора Копленда (9) - $S^{SC}(\{a,b\})$, $S^{SC}(\{a,b,c\})$, $S^{SC}(\{a,b,c,d\})$ - для предъявлений, содержащих пары, тройки или четверки элементов из A. В соответствии с (11) и несколько упрощая обозначения будем записывать их индикаторные представления в виде W_{ab}, W_{bc} и W_{abcd}.

Определение 3. Будем говорить, что функция выбора S на X включает победителей по Копленду

а) *на парах элементов* из X, если

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad W_A^S(a) \geq \prod_{b \in A \setminus \{a\}} W_{ab}(a) \tag{17}$$

b) *на парах или тройках элементов* из X, если

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad W_A^S(a) \geq \prod_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \Big(W_{ab}(a) \vee \bigvee_{\substack{c \in A^-(b) \\ c \neq a}} W_{abc}(a)\Big), \tag{18}$$

где $A^-(b)=\{c \in A:\ cTb\}$, а $\vee$ - операция дизъюнктивного сложения: $1 \vee 0 = 0 \vee 1 = 1 \vee 1 = 1$ и $0 \vee 0 = 0$.

При этом мы используем традиционные соглашения:
если $A=\varnothing$, то $\bigvee_{a \in A}(\dots)=0$, а $\prod_{a \in A}(\dots)=1$.

Фактически, соотношение (17) означает, что функция выбора $S(A)$ должна включать в выбор победителя по Кондорсе, если он существует в A. Действительно, легко убедиться, что $W_{ab}(a)=T(a,b)$ и значит справа в (17) стоит функция выбора по отношению T (см. (4)), которая отлична от нуля только на победителе по Кондорсе.

Соотношение (18) показывает, что $S(A)$ содержит элемент a, если для любого другого элемента b он оказывается победителем по Копленду либо в паре (a,b), либо в одной из троек $\{a,b,c\}$, содержащей "достаточно сильный" элемент c, а именно, для которого справедливо cTb.

Теорема 4. Функция выбора $S^u(A)$ удовлетворяет условию (18) и содержится в любой другой, подчиненной этому условию, функции выбора.

Доказательство. Сначала проверим, что ненакрытое множество $S^u(A)$ удовлетворяет (18). Действительно, пусть $a \in A$ таково, что индикаторное представление $W^u_A(a)$ этой функции обращается в нуль на a, $W^u_A(a)=0$, т. е. элемент a не принадлежит $S^u(A)$. Согласно определению ненакрытого множества, в этом случае должен существовать в A такой элемент b, для которого $R^u(b,a)=1$ и значит, $T(b,a)=1$ и $\forall c \in A\backslash\{a,b\}$ $T(b,c) \geq T(a,c)$. Тогда $W_{ab}(a)=0$, и для любого $c \in A$ лучшего, чем b, справедливо $T(a,c)=0$. Следовательно, в тройке элементов $\{a,b,c\}$ элемент a имеет число Копленда, меньшее по величине, чем b, т. е. $W_{abc}(a)=0$. Таким образом, для этого элемента и правая часть неравенства (18) обращается в нуль, т. е. оно справедливо для W^u_A.

С другой стороны, пусть произвольная функция выбора S удовлетворяет (18) и $a \in A$ выбрано так, что $W^u_A(a)=1$. Тогда согласно принципу двухшагового превосходства для любого $b \in A\backslash\{a\}$ либо выполнено $T(a,b)=1$ (и значит, $W_{ab}(a)=1$), либо существует такой $c \in A\backslash\{a\}$, что $T(c,b)=1$ и $T(a,c)=1$ (а значит, $W_{abc}(a)=1$, так как при $T(a,b)=0$ все три элемента имеют одинаковые числа Копленда, равные 1). В обоих случаях правая часть (18) на выбранном элементе a обращается в единицу, что дает для указанной функции выбора $W^S_A(a)=1$. Таким образом, $S(A) \supset S^u(A)$. *Q.E.D.*

Замечание 1. Из доказательства теоремы следует, что индикаторное представление функции выбора S^u фактически совпадает с правой частью неравенства (18):

$$\forall A \in 2^X \backslash \varnothing \qquad W^u_A(a)=\prod_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \Big(W_{ab}(a) \vee \bigvee_{\substack{c \in A^-(b) \\ c \neq a}} W_{abc}(a)\Big). \tag{19}$$

Замечание 2. Аналогичным способом легко показать, что индикаторное представление функции выбора S^T имеет вид:

$$\forall A \in 2\text{^}X \backslash \varnothing \qquad W^T_A(a)=\prod_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} W_{ab}(a). \tag{20}$$

Замечание 3. Сравнивая (19) и (20), легко увидеть, что справедливо естественное неравенство

$$\forall A \in 2^X \backslash \varnothing \qquad W^T_A(a) \leq W^u_A(a), \tag{21}$$

т. е. функция выбора S^T содержится в S^u.

Рассмотрим теперь аналогичные представления для $S^{mat}(A)$. Поскольку согласно построению эта функция выбора содержится в S^{u} и включает победителя по Кондорсе, то для ее индикаторного представления W_A^m, очевидно, справедливы следующие ограничения

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad W_A^T(a) \le W_A^m(a) \le W_A^u(a). \tag{22}$$

Более точное описание W_A^m дается следующей конструкцией.

Определение 4. Будем говорить, что функция выбора S на X включает победителей по Копленду ***в парах, четверках или тройках элементов*** из X, если

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing$$

$$W_A^S(a) \ge \prod_{\substack{b \in A \\ b \ne a}} \Big(W_{ab}(a) \prod_{\substack{c,d \in A^+(b) \\ c \ne d}} W_{abcd}(a) \vee \bigvee_{\substack{c \in A^-(b) \\ c \ne a}} W_{abc}(a)\Big), \tag{23}$$

где $A^+(b) = \{c \in A\colon\ bTc\}$.

Условие (23) отличается от (17) структурой первого слагаемого в правой части неравенства. Оно содержит информацию о победителях по Копленду в парах и четверках элементов из A. Отметим, что для сравнения относительной силы элементов a и b в случае, когда элемент a превосходит элемент b по турнирному отношению T, мы добавляем к ним еще два других элемента $c,d \in A$, причем выбираем их так, чтобы подчеркнуть "сильные стороны" элемента b (это означает, что b должно быть лучше каждого из них по T). Если элемент a оказывается в этом окружении победителем по Копленду и это имеет место для всех допустимых c и d (когда $c,d \in A^+(b)$), то такой элемент согласно (23) будет включен в $S(A)$.

Теорема 5. Согласованное турнирное решение $S^{mat}(A)$ удовлетворяет условию (23) и содержится в любой функции выбора, подчиненной этому условию.

Доказательство. Проверим сначала, что $S^{mat}(A)$ удовлетворяет (23). Для этого достаточно рассмотреть те элементы $a \in A$, которые не лежат в $S^{mat}(A)$. Пусть b - тот элемент из A, который препятствует включению a в $S^{mat}(A)$, т. е. справедливо bD_2a. Это означает, что $\forall c \in A \setminus \{a,b\}$ $T(b,c) \ge T(a,c)$. Далее возникают два случая.

Случай 1. $T(b,a)=1$. Тогда $W_{ab}=W_{abc}(a)=0$.

Случай 2. $T(a,b)=1$. В силу того, что справедливо bD_2a найдутся два различных элемента e и d из $A \setminus \{a,b\}$, для которых справедливо $bTeTa$ и $bTdTa$. Но тогда $W_{abcd}(a)=0$, так как число Копленда для a меньше числа Копленда для b. Аналогично, для троек различных элементов $\{a,b,c\}$, таких что $T(c,b)=1$, справедливо $W_{abc}(a)=0$, так как число Копленда для a меньше числа Копленда для c.

Таким образом, в обоих случаях правая часть неравенства (23) на элементе a обращается в нуль, что и доказывает высказанное выше утверждение.

Наконец, если некоторая функция выбора S удовлетворяет (23), а элемент a принадлежит $S^{mat}(A)$, то тогда он принадлежит и $S(A)$. Действительно, в силу

теоремы 2, если $a \in S^{mat}(A)$, то для любого $b \in A \setminus \{a\}$ либо существует $c \in A \setminus \{a\}$, такой что $aTcTb$ (и значит $W_{abc}(a)=1$), либо $T(a,b)=1$ и для всех различных $c,d \in A^{+}(b) \setminus \{a\}$ справедливо $T(a,c) \vee T(a,d)=1$, что дает $W_{ab}(a) \cdot W_{abcd}(a)=1$. В результате $a \in S^{mat}(A) \Rightarrow a \in S(A)$, т. е.
$S(A) \supset S^{mat}(A)$.

Q.E.D.

Следствие. Согласованное турнирное решение имеет следующее представление своей индикаторной функции W_A^m

$$\forall A \in 2^X \setminus \varnothing \qquad W_A^D(a) = \prod_{\substack{b \in A \\ b \neq a}} \Big(W_{ab}(a) \prod_{\substack{c,d \in A^{+}(b) \\ c \neq d}} W_{abcd}(a) \vee \bigvee_{\substack{c \in A^{-}(b) \\ c \neq a}} W_{abc}(a)\Big).$$

Литература

1. Laslier J.-F. Tournament Solutions and Majority Voting// Studies in Economic Theory, Springer, 1997.

2. Moulin H. Choosing from a Tournament// Social Choice and Welfare, 1986, N3, p.271-291.

3. Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. New Haven, London: Yale University Press, 1963.

4. McKelvey R.D. Intransitivity in Multidimensional Voting Models and Some Implementations for Agenda Control// Journal of Economic Theory, 1976, N12, p.472-482.

5. Fishburn P.C. Condorcet Social Choice Functions// SIAM Journal of Applied Mathematics, 1977, N33, p.469-489.

6. Miller N.R. A New Solution Set for Tournaments and Majority Voting: Further Graph-Theoretical Approach to the Theory of Voting// American Journal of Political Science, 1980, N24, p.68-96.

7. Banks J.S. Sophisticated Voting Outcomes and Agenda Control// Social Choice and Welfare, 1985, N4, p.245-306.

8. Dutta B. Covering Sets and a New Condorcet Choice Correspondence// Journal of Economic Theory, 1988, N44, p.63-80.

9. Schwartz T. Cyclic Tournament and Cooperative Majority Voting: a Solution// Social Choice and Welfare, 1990, N7, p.19-29.

10. Laffond G. and Laine J. Weak Covering Relations// Theory and Decision, 1994, N37, p.245-265.

11. McGarvey D.C. A Theorem on the Construction of
Voting Paradoxes// Econometrica, 1953, N21, p.608-610.

12. Dutta B. On the Tournament Equilibrium Set// Social Choice and Welfare, 1990, N7, p.381-383.