С.А. Ложкин, А.В. Кондратов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ИТЕРАТИВНЫМИ КОНТАКТНЫМИ СХЕМАМИ

1. Введение

Одна из основных задач математической кибернетики – задача синтеза управляющих систем, – сформулирована С.В.Яблонским в [6]. В общем виде эта задача ставится следующим образом. Имеется некоторый класс схем (контактные схемы, схемы из функциональных элементов, формулы и т.п.), с помощью которых можно реализовать любую функцию алгебры логики (ФАЛ). Сложность схемы характеризуется обычно числом элементов, ее составляющих, а под сложностью ФАЛ понимается минимальная из сложностей схем, реализующих эту функцию [5]. Задача синтеза сводится, как правило, либо к изучению сложности отдельных ФАЛ, либо к оценке т.н. функции Шеннона, которая зависит от натурального аргумента n и определяется как максимальная из сложностей ФАЛ от n переменных.

Напомним, что К.Шеннон [7] установил порядок роста функции Шеннона для сложности контактных схем, а О.Б.Лупанов (см., например, [5]) получил асимптотику функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ во всех основных классах схем (контактные схемы, схемы из функциональных элементов, формулы, релейно-контактные схемы). В [2, 4] С.А.Ложкин уточнил оценки остаточного члена асимптотического разложения для некоторых функций Шеннона и в целом ряде случаев получил т.н. оценки высокой степени точности, в которых установлена асимптотика второго члена указанного разложения.

В данной работе получены асимпотические оценки высокой степени точности для сложности реализации систем функций в классе итеративных контактных схем, являющемся расширением класса контактных схем.

2. Основные определения и описание полученных результатов

Напомним (см. [3]) определение итеративной контактной схемы. Сеть Σ с одним входом и m упорядоченными выходами, в которой все ребра (дуги) помечены *булевскими переменными* (БП) $x_1, \dots, x_n$ или их отрицаниями $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, называется $(1, m)$-*контактной схемой*

(КС) *от* БП $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$. При этом число контактов КС Σ называется ее *сложностью* и обозначается через $L(\Sigma)$. Предполагается, что вход КС Σ помечен символом "1", а ее выходы – выходными БП $z_1, \ldots, z_m$, то есть КС Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$. В каждой вершине КС Σ обычным образом реализуется функция проводимости от ее входа к этой вершине, а сама КС Σ реализует систему ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$, где $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ – ФАЛ, реализуемая в выходной вершине z_j, $1 \leq j \leq m$.

Для КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m)$ определим обычным образом операцию *присоединения ее управляющей БП x_i к выходу z_j*, которая применима, если БП x_i входит в Σ без отрицаний, а ее контакты не лежат на простых проводящих цепях, соединяющих вход 1 с выходом z_j. Заметим, что при этом ФАЛ f_j, реализуемая на выходе z_j КС Σ, не зависит от x_i. В результате выполнения указанной операции в графе КС Σ происходит снятие БП z_j, сопоставление связанной с ней вершине внутренней БП u и замена всех пометок x_i на пометку u. Полученная таким образом схема Σ' имеет вид $\Sigma'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_m)$ и реализует в каждой своей вершине ФАЛ, получающуюся в результате подстановки ФАЛ f_j вместо переменной x_i в ту ФАЛ, которая реализовывалась в этой вершине КС Σ. Функционирование самой схемы Σ' представляет собой, как обычно, набор из ФАЛ, реализуемых на ее выходах.

Аналогично определяется операция (одновременного) присоединения нескольких управляющих БП КС Σ к ее выходам, при выполнении которой каждой участвующей в присоединениях выходной вершине Σ сопоставляется только одна внутренняя БП, причем разным вершинам сопоставляются разные БП. Любая из полученных таким образом схем называется *итеративной контактной схемой (ИКС) на базе КС* Σ . Под сложностью $L(\Sigma')$ ИКС Σ' на базе КС Σ понимается сложность $L(\Sigma)$. Класс всех ИКС обозначим через S.

Сложность $L(f)$ функции f в классе S определяется как минимальная из сложностей схем Σ из класса S, реализующих f. Введем функцию Шеннона

$$L(n) = \max_{f \in P_2(n)} L(f),$$

где $P_2(n)$ – множество всех ФАЛ от БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Аналогичным образом определяется функция $L(n, m)$ – функция Шеннона для сложности реализации систем из m функций множества $P_2(n)$. Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *При* $m < 2^{2^{(n-1)/2}-n}$ *справедлива оценка*

$$L(n,m) = \frac{m \cdot 2^{n-1}}{n+\log m}\left(1 + \frac{5\log(n+\log m)}{2(n+\log m)} + O\left(\frac{1}{n+\log m}\right)\right).$$

3. Нижняя мощностная оценка для рассматриваемой функции Шеннона

Приступим к получению нижней оценки теоремы. Схему Σ, $\Sigma \in S$, будем называть *минимальной* в классе S, если для любой эквивалентной ей схемы Σ', $\Sigma' \in S$, справедливо неравенство $L(\Sigma') \geq L(\Sigma)$, причем в случае $L(\Sigma') = L(\Sigma)$ число вершин Σ' не меньше, чем число вершин Σ. Заметим, что минимальная схема является связным графом. Обозначим через $S(L,n,m)$ максимальное по включению множество попарно не эквивалентных минимальных схем Σ из класса S, функционирование которых описывается системой из m ФАЛ от переменных $X(n)$ и для которых $L(\Sigma) \leq L$. Нижняя оценка функции Шеннона $L(n,m)$ выводится из обычного мощностного неравенства

$$|S(L(n,m),n,m)| \geq 2^{m \cdot 2^n}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Для* $m < 2^{2^{n/2}}$ *справедлива оценка*

$$|S(L,n,m)| \leq \left(c_1 \frac{(L+2n+m)^2}{\log^3(L+2n+m)}\right)^{L+2n+m}, \tag{2}$$

где c_1 *– некоторая константа.*[1]

Доказательство. Пусть $\Sigma \in S(L,n,m)$, через p обозначим число вершин в схеме Σ, а через q, $q \leq L$, – число ее ребер. Число ребер в остовном дереве схемы, содержащем p вершин, будет равно $p-1$. Как известно (см., например, [1]), число упорядоченных корневых деревьев с не более, чем $(p-1)$ ребрами не превосходит 4^{p-1}. Оставшиеся $q-p+1$ ребер в схеме можно будет расставить не более, чем $H^{L-p+1}_{\frac{p(p-1)}{2}+L-p+1}$ способами.[2] Так как проводимостью каждого ребра может управлять

[1]Буквой c с различными индексами будем обозначать константы, не зависящие от n, m, L.

[2]Через H^m_n обозначается число сочетаний с повторениями. Известно, что $H^m_n = C^m_{n+m-1}$

переменная, ее отрицание или функция, реализованная в любой вершине, кроме корневой, то число способов, которыми можно будет задать функции, управляющие ребрами, будет не более, чем $(2n+p-1)^L$. Так же надо выбрать m выходных вершин – это можно сделать C_{p-1}^m способами. В итоге получаем

$$|S(L,n,m)| \leq \max_{0\leq p\leq L+1} \left(4^{p-1} H^{L-p+1}_{\frac{p(p-1)}{2}+L-p+1} (2n+p-1)^L C_{p-1}^m\right). \quad (3)$$

Теперь надо определить максимум этого выражения в зависимости от числа вершин в схеме. Известно, что $H_s^r \leq \frac{(s+r-1)^r}{r!} < (1+\frac{s-1}{r})^r e^r$. Преобразовав выражение (3), получим, что надо найти следующий максимум:

$$\max_{0\leq x<a} \left(\left(\frac{3x^2}{L-x} \right)^{L-x} (4x)^L \right),$$

где $x = 2n+p-1$ и $a = L+2n+m$. Оценивая его согласно лемме 20 из работы [2] и учитывая ограничение $m < 2^{2^{n/2}}$, получаем утверждение леммы. Лемма полностью доказана.

Из (1) и леммы 1 обычным образом получается нижняя оценка для функции Шеннона $L(n,m)$ при $m < 2^{2^{n/2}}$:

$$L(n,m) \geq \frac{m\cdot 2^{n-1}}{n+\log m}\left(1+\frac{5\log(n+\log m)}{2(n+\log m)}+O\left(\frac{1}{n+\log m}\right)\right). \quad (4)$$

4. Построение универсального множества

Пусть $\phi(y_1,\ldots,y_p)$ – существенная ФАЛ, то есть ФАЛ, существенным образом зависящая от всех своих БП. Множество ФАЛ G, $G\in P_2(m)$, называется *ϕ-универсальным множеством (ϕ-УМ) порядка m*, если любая ФАЛ g, $g\in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = \phi(g_1,\ldots,g_p),$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i=1,\ldots,p$.

Число строк (столбцов) матрицы будем называть ее *высотой* (соответственно, *длиной*). Множество всех матриц длины n и высоты s, состоящих из 0 и 1, будем обозначать через $B^{s,n}$. Определим специальную матрицу $\mu_s, \mu_s \in B^{s,2^s}$, для любого s , $s=2^m$, $m=1,2,\ldots$, как матрицу из 0 и 1 следующего вида:

$$\mu_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

столбцами которой являются все различные столбцы высоты s, каждый из которых является столбцом значений, определяющим некоторую функцию от m переменных. Легко видеть, что множество функций, задаваемое матрицей μ_s, является ϕ-УМ для $\phi \equiv x$, т.к. любой столбец $\beta, \beta \in B^{s,1}$, содержится среди столбцов μ_s.

Приступим теперь к построению специальной схемы, которая будет использоваться при доказательстве основной теоремы и оценке ее параметров. Это будет КС $\hat{\Sigma}$, показанная на рис.1, где $y_1, \dots, y_t$ – входы Σ, а z – ее выход,

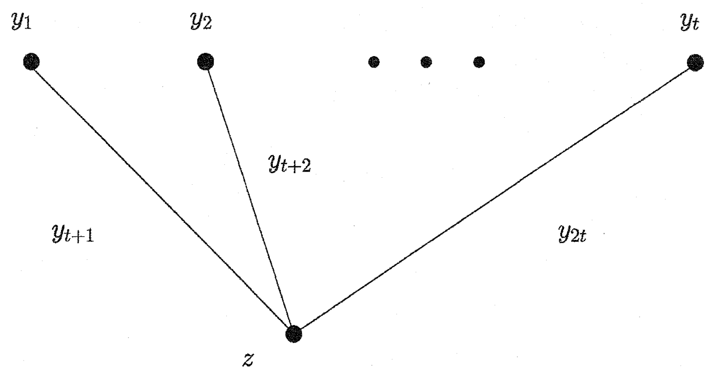

Рис. 1

которая реализует ФАЛ ψ от БП $y_1, \dots, y_p$, где $p = 2t$, такую, что

$$\psi(y_1, \dots, y_p) = y_1 y_{t+1} \vee \dots \vee y_t y_{2t}. \tag{6}$$

Лемма 2. *Для функции ψ вида (6) и для любого натурального q можно построить ψ-УМ G порядка q, где $|G| = 2^{s'}t + 2^{s''}$, $t(s'+s'') \geq 2^q > t(s'+s'') - s''$, а s' и s'' – четные. При этом сложность реализации системы ФАЛ из G в классе S не превосходит*

$$c_2|G| + O(2^q \cdot t \cdot (2^{s'/2} + 2^{s''/2})).$$

Доказательство. Построим матрицу M следующего вида (см. рис.2):

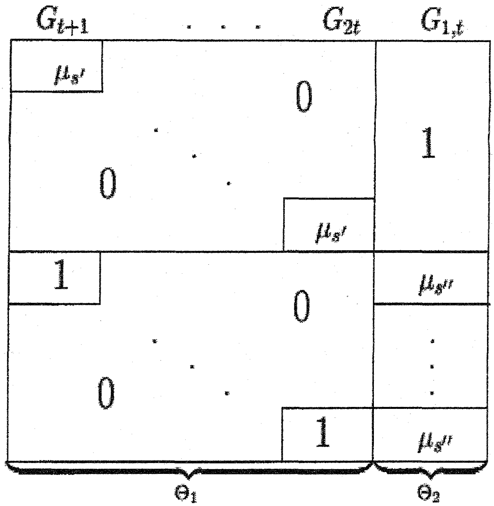

Рис. 2

Полосы столбцов $G_{t+1}, \ldots, G_{2t}$ соответствуют переменным $y_{t+1}, \ldots, y_{2t}$, а полоса $G_{1,t}$ – переменным $y_1, \ldots, y_t$. Блоки $\mu_{s'}$, $\mu_{s'} \in B^{s',2^{s'}}$, и $\mu_{s''}$, $\mu_{s'} \in B^{s'',2^{s''}}$ – матрицы определенной выше (5) структуры (высота матрицы из последней полосы может быть меньше, чем s'', для того чтобы высота всей матрицы была равна 2^q), следовательно, $\Theta_1 = t2^{s'}$, а $\Theta_2 = 2^{s''}$. Из построения следует, что матрица M задает ψ-УМ G порядка q и число ФАЛ, содержащихся в этом множестве, удовлетворяет требуемой оценке.

Далее будем реализовывать построенное УМ G. Разложим функцию, задаваемую любым столбцом, по последней переменной

$$f = x_q g' \vee \bar{x}_q g''. \tag{7}$$

В силу четности чисел s' и s'' четная и нечетная компоненты матрицы M (матрицы, получающиеся из исходной вычеркиванием всех строк с четными (нечетными) номерами) совпадают с точностью до перестановки столбцов, среди которых имеется не более $t(2^{s'/2} + 2^{s''/2})$ различных. Соберем все столбцы матрицы M и реализуем их в соответствии с (7).

Функции g' и g'' реализуем аналогично методу каскадов (см., например, [5]) со сложностью $O(2^q)$. Величина $t(2^{s'/2}+2^{s''/2})$ возникает в силу выбора функций g' и g''. Лемма полностью доказана.

5. Верхние оценки и поведение рассматриваемой функции Шеннона

Получим оценку функции Шеннона для сложности реализации одной функции в классе ИКС.

Лемма 3. *Для сложности реализации ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ в классе ИКС справедлива следующая оценка*

$$L(n) \le \frac{2^{n-1}}{n}\left(1+\frac{5\log n}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Будем применять технику, подобную используемой в [3] при получении асимптотических оценок. Возьмем произвольную функцию $f(\tilde{x})$, где $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_n)$, и построим схему Σ_f, $\Sigma_f \in S$, которая реализует f с нужной нам сложностью. Разложим реализуемую функцию f следующим образом:

$$f(x',x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1},\dots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}}\cdots x_n^{\sigma_n}\cdot f_{\sigma''}(x'), \tag{8}$$

где $x'=(x_1,\dots,x_q)$, $x''=(x_{q+1},\dots,x_n)$ и $f_{\sigma''}(x')=f(x',\sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q}. Пусть Σ'' – $(2^{n-q},1)$-контактное дерево (КД) от БП x''. Обозначим через Σ_G ИКС, которая реализует ψ-УМ G из леммы 2. Схема строится в соответствии с леммой 2. Схема Σ' содержит ИКС Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, где $\sigma''\in B^{n-q}$, на одном из своих выходов. Каждый выход схемы Σ' является выходом КС $\hat{\Sigma}$, изображенной на рис.1, присоединенной входами $y_1,\dots,y_t$ и управляющими БП $y_{t+1},\dots,y_{2t}$ к выходам Σ_G в соответствии с представлением

$$f_{\sigma''}(x')=\psi(g_{\sigma'',1},\dots,g_{\sigma'',p}),$$

где ψ задается (6). Такое представление корректно в силу определения ϕ-УМ и леммы 2.

Искомая ИКС Σ_f имеет вид $\Sigma_f=\Sigma''(\Sigma')$ и реализует ФАЛ f в соответствии с разложением (8). Заметим, что корректность операции присоединения схемы $\hat{\Sigma}$ к выходам схемы Σ_G при построении схемы Σ' обеспечивается отсутствием в любой схеме $\hat{\Sigma}$ двух проводящих на каком-либо наборе α' , $\alpha'\in B^{n-q}$, контактов, так как $g_i(\alpha')\cdot g_k(\alpha')=0$, если g_i и

g_k задаются столбцами из полос G_i и G_k соответственно и $t < i \leq k \leq p$. Корректность присоединения КД Σ'' обусловлена его разделительностью [3]. Для схемы Σ_f выполняются следующие неравенства

$$L(\Sigma_f) \leq t2^{n-q} + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leq$$
$$\leq t2^{n-q} + 2 \cdot 2^{n-q} + c_2|G| + O(2^q \cdot t \cdot (2^{s'/2} + 2^{s''/2})),$$

из которых, выбрав следующие (удовлетворяющие условиям леммы 2) значения параметров: s' и s'' – четные натуральные числа, для которых

$$n - 3\log n \leq s' < n - 3\log n + 2, \quad n - 2\log n \leq s'' < n - 2\log n + 2,$$

$t =]2^q/(s' + s'')[$[3], а $q =]2\log n[$ получим

$$L(\Sigma_f) \leq \frac{2^n}{2n - 5\log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \frac{2^{n-1}}{n}\left(1 + \frac{5\log n}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Лемма полностью доказана.

Теперь приступим к доказательству верхней оценки основной теоремы.

Лемма 4. *Для* $m < 2^{2^{(n-1)/2} - n}$ *справедлива следующая оценка*

$$L(n,m) \leq \frac{m \cdot 2^{n-1}}{n + \log m}\left(1 + \frac{5\log(n + \log m)}{2(n + \log m)} + O\left(\frac{1}{n + \log m}\right)\right).$$

Доказательство. Возьмем произвольную систему F из m ФАЛ, $F = (f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x}))$, где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, и построим $(1,m)$-ИКС Σ_F, которая реализует систему F с нужной нам сложностью. Для каждой ФАЛ f_j, $j = 1, \ldots, m$ повторяем все построения леммы 3, за исключением того, что схема Σ_G строится один раз для всех функций. Для полученной таким образом ИКС Σ_F получаем следующую оценку:

$$L(\Sigma_F) \leq L(\Sigma_G) + m(t2^{n-q} + L(\Sigma''))$$

Выбирая следующие (удовлетворяющие условиям леммы 2) значения параметров: s' и s'' – четные натуральные числа, для которых

$$n + \log m - 3\log(n + \log m) \leq s' < n + \log m - 3\log(n + \log m) + 2,$$

$$n + \log m - 2\log(n + \log m) \leq s'' < n + \log m - 2\log(n + \log m) + 2,$$

$t =]2^q/(s' + s'')[$, а $q =]2\log(n + \log m)[$ получаем требуемую оценку

[3]Через $]x[$ обозначается ближайшее целое число, большее x.

$$L(\Sigma_F) \leq \frac{m \cdot 2^{n-1}}{n+\log m}\left(1+\frac{5\log(n+\log m)}{2(n+\log m)}+O\left(\frac{1}{n+\log m}\right)\right).$$

Ограничение $m < 2^{2^{(n-1)/2}-n}$ вытекает из того, что q должно быть меньше, чем n. Лемма полностью доказана.

Полученная верхняя оценка совпадает с полученной в §3 нижней оценкой до второго члена разложения, что и доказывает основную теорему.

Литература

1. Алексеев В.Б., Ложкин С.А. Элементы теории графов, схем и автоматов (учебное пособие для студентов). М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000 г.

2. Ложкин С. А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Москва, МГУ, 1997.

3. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики: Учебное пособие. М.: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004.

4. Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Выпуск 6. М.: Наука, 1996. С. 189-214.

5. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

6. Яблонский С. В. Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. Вып. 2. М.: Физматгиз, 1959. С. 7-38.

7. Shannon C. E. The synthesis of two-terminal swithing circuits // Bell Syst. Techn.J., 1949. V. 28, N1. P.59-98.