Ложкин С. А., Дэн Бенсин

О построении надежных схем из ненадежных функциональных элементов с прямыми и итеративными входами

(кафедра математической кибернетики; университет Цинхуа, Пекин, КНР)

Введение

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов (СФЭ) над базисом $Б$, $Б=\{E_i\}_{i=1}^{b}$, где элемент E_i имеет k_i, $k_i \ge 1$, входов и реализует функцию алгебры логики (ФАЛ) $\psi_i(x_1,\dots,x_{k_i})$ так, что вероятность появления на выходе E_i при входном наборе $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_i})$ значения $\overline{\psi}_i(\alpha)$ равна $\eta_i(\alpha), 0<\eta_i(\alpha)<\frac{1}{2}$. Положим

$$\varepsilon_i = \min_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_i})}\eta_i(\alpha), \quad \omega_i = \max_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_i})}\eta_i(\alpha), \quad \varepsilon_Б = \min_{\varepsilon_i>0}\varepsilon_i$$

и будем считать элемент E_i *абсолютно надежным (абсолютно ненадежным)*, если $\omega_i=0$ (соответственно $\varepsilon_i>0$). Предполагается, что события, связанные с правильным или неправильным функционированием различных элементов СФЭ Σ над $Б$, являются независимыми. При этом предположении для СФЭ Σ, которая имеет n входов (входных переменных) $x=(x_1,\dots,x_n)$ и реализует на своем единственном выходе ФАЛ $f(x_1,\dots,x_n)$, обычным образом определяется вероятность $\eta(\Sigma,\alpha)$ того, что на выходе Σ при $x=\alpha$ реализуется значение $\overline{f}(\alpha)$. Введем, далее, величину

$$\omega(\Sigma) = \max_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_i})}\eta(\Sigma,\alpha),$$

которая характеризует ненадежность СФЭ Σ в целом.

Пусть $U_Б^{\tau}$ — некоторый класс СФЭ, состоящий из схем «типа» τ, построенных из элементов базиса $Б$. Класс $U_Б^{\tau}$ называется *полным*, если любая ФАЛ f может быть реализована некоторой СФЭ Σ из $U_Б^{\tau}$. Считается, что ФАЛ f допускает *надежную реализацию* в классе $U_Б^{\tau}$, если для любого $\xi>0$ существует СФЭ Σ, $\Sigma\in U_Б^{\tau}$, реализующая f и такая, что $\omega(\Sigma)<\xi$. Полный класс $U_Б^{\tau}$ называется *надежным классом*, если любая ФАЛ f допускает в нем надежную реализацию.

Обозначим через $U_Б^{C}$ класс всех СФЭ над базисом $Б$. Рассмотрим случай, когда базис $Б$ имеет вид $Б=Б_1\cup Б_2$, где каждый элемент из $Б_1$ является абсолютно надежным, а каждый элемент из $Б_2$ — абсолютно ненадежным. Из [4] следует, что в этом случае полный класс $U_{Б}^{C}$ является надежным классом тогда и только тогда, когда множество базисных ФАЛ элементов $Б_1$ не содержится целиком ни в одном из следующих замкнутых классов ФАЛ[2]:

- классе D, который состоит из дизъюнкций переменных и констант;
- классе K, который состоит из конъюнкций переменных и констант;
- классе L, который состоит из линейных ФАЛ;
- классе F_4^{∞}, который состоит из ФАЛ вида $x_i \vee f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$;
- классе F_8^{∞}, который состоит из ФАЛ вида $x_i \cdot f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$.

Если в базисе $Б_1$ имеются констаны 0 и 1, эти условия эквивалентны тому, что в классе $U_{Б_1}^{C}$ можно реализовать ФАЛ «голосования» $h(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$.

В [6,7] получены необходимые и достаточные условия того, что класс $U_{Б}^{C}$, где $Б$ — произвольный полный базис из ненадежных элементов общего вида, является надежным классом.

Пусть теперь некоторые входы элемента E_i, $i=1,\ldots,b$, базиса $Б$ являются т. н. прямыми входами, а остальные — итеративными входами этого элемента. Обозначим через $U_{Б}^{П,И}$ класс тех СФЭ Σ над базисом $Б$, в которых каждый прямой вход любого элемента присоединен к входу схемы, а на входы Σ помимо входных переменных могут «поступать» константы 0, 1. Те неконстантные входы СФЭ Σ, $\Sigma \in U_{Б}^{П,И}$, к которым присоединены только итеративные входы элементов базиса $Б$, считаются *итеративными*, а остальные — *прямыми* входами схемы Σ.

В работе [5] получен критерий полноты, из которого следует, что класс $U_{Б}^{П,И}$ является полным тогда и только тогда, когда в нем существует СФЭ Σ с итеративными входами y_1, y_2, которая реализует ФАЛ $\mu(x,y_1,y_2)=xy_1 \vee \bar{x}y_2$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. Полный класс $U_{Б}^{П,И}$, где $Б=Б_1 \cup Б_2$ и $Б_1$ состоит из абсолютно надежных, а $Б_2$ — из абсолютно ненадежных элементов, является надежным классом тогда и только тогда, когда либо класс $U_{Б_1}^{П,И}$ является полным, либо найдется СФЭ Σ, $\Sigma \in U_{Б_1}^{П,И}$, с итеративными входами y_1, y_2, y_3, которая реализует ФАЛ $h(y_1,y_2,y_3)$.

Достаточность условий теоремы для надежной реализации любой ФАЛ f в классе $U_{Б}^{П,И}$ очевидна (см., например, [4]).

Необходимость этих условий доказывается в §3 на основе анализа замкнутых классов, состоящих из тех ФАЛ с прямыми и итеративными переменными, которые могут быть реализованы схемами из $U_{Б}^{П,И}$ (см. §2).

---

[2] Используемые здесь обозначения для классов D, K, L связаны с [5] и не соответствуют [4].

Заметим, что из доказательства теоремы вытекает возможность эффективной проверки установленного в ней критерия.

Краткое изложение полученных результатов опубликовано в [8]

2. Некоторые особенности функциональной системы класса функций алгебры логики с прямыми и итеративными переменными.

Напомним некоторые определения и результаты [5], поскольку проблема полноты класса $U_{Б}^{П,И}$ тесно связана с проблемой полноты для ФАЛ с прямыми и итеративными переменными в рамках соответствующей функциональной системы.

Для множества булевских переменных U через $P_2(U)$ обозначим множество тех ФАЛ, все существенные переменные которых принадлежат U. Функции, не имеющие общих существенных переменных, называются *независимыми*.

Пусть $X=\{x_1,x_2,...\}$ и $Y=\{y_1,y_2,...\}$ — счетные множества булевских переменных, причем переменные из X (Y) считаются *прямыми* (соответственно *итеративными*) переменными. Положим

$$P_2^{П,И}=P_2(X\cup Y),\quad P_2^{П}=P_2(X),\quad P_2^{И}=P_2(Y).$$

На множестве $P_2^{П,И}$ определим операцию *итеративно-правильной суперпозиции*, которая включает в себя следующие виды операций:

1) переименование (с отождествлением) прямых переменных;

2) подстановка констант 0, 1 вместо переменных;

3) переименование (без отождествления) итеративных переменных;

4) подстановка одной из двух независимых ФАЛ вместо итеративной переменной другой ФАЛ;

5) замена итеративных переменных прямыми переменными;

6) отождествление итеративных переменных.

В дальнейшем под операцией суперпозиции понимается операция итеративно-правильной суперпозиции, а под ФАЛ — ФАЛ из $P_2^{П,И}$.

Операции суперпозиции могут применяться многократно. Для записи суперпозиций, в которых участвуют ФАЛ из A, $A\subseteq P_2^{П,И}$, сначала, как обычно, индукцией по глубине вводится понятие *формулы над* A, а затем для каждой формулы F над A индуктивно определяется реализуемая ею ФАЛ. Аналогичным образом определяется итеративно-правильная СФЭ над базисом $Б$, каждый элемент которого реализует соответствующую ФАЛ из A, причем на входы схемы помимо переменных разрешается подавать константы 0, 1. Заметим, что множество всех таких СФЭ совпадает с множеством $U_{Б}^{П,И}$, если считать, что на прямые (итеративные) входы схем из $U_{Б}^{П,И}$ «подаются» переменные из X (соответственно $X\cup Y$).

Множество тех ФАЛ, которые можно получить из ФАЛ системы A в результате применения операций суперпозиции с номерами из T', где $T'\subseteq T=\{1,2,...,6\}$, обозначим через $[A]_{T'}$, и пусть $[A]_T=[A]$. Множество ФАЛ Q, такое, что $Q\supseteq\{0,1,x_1\}$ и $[Q]=Q$, считается *замкнутым классом*. Множество ФАЛ A', называется *полным (предполным)* *относительно множества* ФАЛ A'', если $[A'] \supseteq A''$ (соответственно $[A']$ не содержит своим подмножеством A'', но $[A' \cup \{\varphi\}] \supseteq A''$ для любой ФАЛ φ, $\varphi \in A'' \setminus [A']$).

Полнота множества ФАЛ A, относительно множества $P_2^{П}$ является необходимым и достаточным условием полноты класса $U_{Б}^{П,И}$.

В [5] отмечалось, что для любого замкнутого класса Q пересечение $Q \cap P_2^{И}$ является «обычным» замкнутым классом в $P_2 = P_2^{И}$, который содержит константы из $B=\{0,1\}$, и поэтому совпадает с одним из классов системы Δ, $\Delta=\{B,I,O,D,K,L,M,P_2^{И}\}$, где

$$I=B\cup Y,\quad O=I\cup\{\bar{y} : y\in Y\},$$

класс D (класс K) включает в себя константы и дизъюнкции (соответственно конъюнкции) переменных из Y, а классы L и M состоят из линейных и монотонных ФАЛ от переменных из Y соответственно. Для каждого δ, $\delta\in\Delta$, через $Z(\delta)$ обозначим множество тех замкнутых классов Q, для которых $Q \cap P_2^{И} = \delta$. Заметим, что для каждого δ, $\delta\in\Delta$, замкнутые классы $r(\delta)$ и $R(\delta)$ такие, что

$$r(\delta)=[\delta]_{\{5\}},\quad R(\delta)=\{f\in P_2^{П,И} : [\{f\}]_{\{2\}} \cap P_2^{И} \subseteq \delta\},$$

являются минимальным и максимальным (по включению) классами системы $Z(\delta)$ соответственно. Заметим также, что $R(P_2^{И})=r(P_2^{И})=P_2^{П,И}$, что класс $R(\delta)$ полон относительно $P_2^{П}$ при любом δ, а класс $r(\delta)$ — только при $\delta=P_2^{И}$, и что класс $R(\delta)$ содержит ФАЛ $\mu(x_1,y_1,y_2)$ при любом $\delta\neq B$.

Из определения следует, что любую ФАЛ $f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_t)$ в случае $f\in R(L)$ можно представить в виде

$$f=\bigoplus_{j=1}^{t} y_j\varphi_j \oplus \varphi_0, \tag{1}$$

в случае $f\in R(D)$ — в виде

$$f=\bigvee_{j=1}^{t} y_j\varphi_j \vee \varphi_0, \tag{2}$$

а в случае $f\in R(K)$ — в двойственном к (2) виде

$$f=\left(\mathop{\&}_{j=1}^{t} \left(y_j \vee \varphi_j\right)\right) \& \varphi_0, \tag{3}$$

где $\varphi_j \in P_2^{П}$ при всех j, $0\le j\le t$. Заметим, что в случаях $f\in R(O)$ и $f\in R(I)$ для ФАЛ f справедливы представления (1) и (2) соответственно, где никакие две из ФАЛ φ_j, $j=1,\dots,t$, не обращаются в 1 на одном и том же наборе.

В [5] было установлено, что для каждого δ, $\delta\in\Delta\setminus\{B, P_2^{И}\}$, в системе $Z(\delta)$ имеется либо один, либо два предполных относительно $R(\delta)$ замкнутых класса, которые были названы *основными* классами системы $Z(\delta)$. При этом оказалось, что система $Z(M)$ состоит только из классов $r(M)$ и $R(M)$, причем класс $r(M)$ является ее основным классом, $Z(L)$ состоит из счетного, а системы $Z(K)$, $Z(D)$, $Z(O)$, $Z(I)$, $Z(B)$ — из континуального множества классов. Оказалось также, что каждый основной класс системы $Z(\delta)$, $\delta \in \{L,K,D,O,I\}$, а в случае $\delta = B$ — класс $R(B) = P_2^{П}$, является пределом счетной расширяющейся последовательности замкнутых классов системы $Z(\delta)$, ни один из которых не является полным относительно $P_2^{П}$. Это означает, что ни один из указанных классов не имеет конечной и полной (относительно $P_2^{П}$) подсистемы ФАЛ.

3. Необходимые условия надежности для полного класса схем из абсолютно надежных и абсолютно ненадежных функциональных элементов с прямыми и итеративными входами.

Докажем необходимость условий теоремы для надежности класса $U_{Б}^{П,И}$. Пусть по-прежнему A — множество ФАЛ из $P_2^{П,И}$, реализуемых элементами из $Б$. Предположим, что класс $U_{Б}^{П,И}$ является полным и надежным, а класс $U_{Б_1}^{П,И}$ полным не является, и докажем, что в этом случае $[A]$ содержит $h(y_1,y_2,y_3)$.

Обозначим через A_1 множество ФАЛ из $P_2^{П,И}$, реализуемых элементами из $Б_1$, и пусть

$$Q=[A], \quad Q_1=[A_1], \quad \delta_1=Q_1 \cap P_2^{И}.$$

Из полноты (неполноты) класса $U_{Б}^{П,И}$ (сответственно $U_{Б_1}^{П,И}$) следует, что система ФАЛ A (сответственно A_1), а значит, и класс ФАЛ Q (сответственно Q_1) являются (сответственно не являются) полными относительно множества $P_2^{П}$. Заметим, что класс δ_1 при этом является одним из классов системы $\Delta \setminus \{P_2^{И}\}$, и рассмотрим все соответствующие случаи.

Пусть $\delta_1 = M$. В этом случае из неполноты класса Q_1 следует (см. §2), что $Q_1 = r(M)$. В то же время, очевидно, имеет место включение $h(y_1,y_2,y_3) \in M$, и поэтому в классе $U_{Б_1}^{П,И}$ имеется СФЭ (формула), реализующая ФАЛ $h(y_1,y_2,y_3)$.

Заметим, что во всех остальных случаях $h(y_1,y_2,y_3)\notin Q_1$ и докажем, что в каждом из них класс $U_{Б}^{П,И}$ не является надежным. Из неполноты класса Q_1 относительно $P_2^{П}$ следует, что найдется ФАЛ $g(x_1,...,x_n)$ из $P_2^{П}$, которая не входит в Q_1 и поэтому не может быть реализована СФЭ из $U_{Б_1}^{П,И}$. Пусть СФЭ Σ, $\Sigma\in U_{Б}^{П,И}$, реализует ФАЛ g, а Σ' — максимальная по включению вершин подсхема схемы Σ, которая содержит выход Σ и состоит из элементов базиса $Б_1$. Пусть, далее, СФЭ Σ' реализует ФАЛ $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_t)$ из Q_1, а итеративные входы $y_1,...,y_t$ СФЭ Σ' присоединены в СФЭ Σ к выходам различных элементов из $Б_2$. Во всех рассматриваемых случаях в зависимости от типа системы $Z(\delta_1)$ для ФАЛ f будет справедливо одно из представлений (1)-(3). Пусть, например, $\delta_1=D$ или $\delta_1=I$. Тогда $f\in R(\delta_1)$ и для f справедливо (2).

Если бы для любого набора $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ значений переменных $x=(x_1,...,x_n)$ такого, что $g(\alpha)=0$, были бы справедливы равенства $\varphi_1(\alpha)=...=\varphi_t(\alpha)=0$, то имело бы место тождество $g(x)=f(x,1,...,1)$, и поэтому ФАЛ g можно было бы реализовать СФЭ из $U_{Б_1}^{П,И}$. Следовательно, найдутся набор $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и число j, $1\leq j\leq t$, для которых

$$g(\alpha)=0 \qquad \text{и} \qquad \varphi_j(\alpha)=1.$$

Заметим, что при $x=\alpha$ вероятность появления 1 на выходе СФЭ Σ не меньше, чем вероятность появления 1 на выходе функционального элемента E_i из $Б_2$, связанного с итеративным входом y_j СФЭ Σ'. Таким образом,

$$\eta(\Sigma,\alpha)\geq\varepsilon_i\geq\varepsilon_{Б}>0,$$

и ненадежность класса $U_{Б}^{П,И}$ в этом случае доказана.

Случай $\delta_1=K$ рассматривается двойственным образом.

Пусть теперь $\delta_1=L$ или $\delta_1=O$ и для ФАЛ f имеет место представление (1). В этом случае найдутся набор $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и число j, $1\leq j\leq t$, такие, что $\varphi_j(\alpha)=1$, так как иначе ФАЛ g можно было бы реализовать СФЭ из $U_{Б_1}^{П,И}$. Заметим, что при $x=\alpha$ вероятность появления неправильного значения на выходе СФЭ Σ не меньше, чем вероятность появления нечетного числа неправильных значений на выходах тех s, $s\geq1$, элементов СФЭ Σ, которые связаны с существенными итеративными переменными ФАЛ $f(\alpha,y_1,...,y_t)$ и, в частности, с переменной y_j. Заметим также, что эта вероятность не меньше, чем вероятность появления при $x=\alpha$ неправильного значения на выходе первого из указанных элементов и, если $s\geq 2$, одновременного появления на выходе последнего из них значения, равного сумме по модулю 2 тех значений, которые появились на выходах остальных (s-2) элементов (равного 0 при s=2). Следовательно,

$$\eta(\Sigma,\alpha)\geq\varepsilon_Б^2,$$

и ненадежность базиса $Б$ в рассматриваемом случае доказана.

Случай $\delta_1=B$ очевиден и, таким образом, доказательство теоремы завершено.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 99-01-01111.

Литература

1. Яблонский С. В. Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики, вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5-25.

2. Яблонский С. В. Надежность управляющих систем. — М.: Издательство МГУ, 1991.

3. Дэн Бенсин. Поведение схем из функциональных элементов при наличии источников неисправностей. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М., 1997.

4. Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Проблемы кибернетики, вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 29-37.

5. Ложкин С. А. О полноте и замкнутых классах функций алгебры логики с прямыми и итеративными переменными // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, вычисл. матем. и киберн. — 1999, N 3. — С. 35-41.

6. Тарасов В. В. К проблеме полноты для систем функций алгебры логики с ненадежной реализацией // Математ. сборник. — 1975. — 98, N 3. — С. 378-394.

7. Тарасов В. В. К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Математ. заметки. — 1976. — 20, N 3. — С. 391-400.

8. Ложкин С. А., Дэн Бенсин. О построении надежных схем из ненадежных функциональных элементов с прямыми и итеративными переменными // Тр. IV Межд. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». 19-25 июня 2000 г.—М., 2000.—С. 67-68.